Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 8, с. 520 – 527

Исследование свойств когерентности и запутанности макроскопических квантовых интерферирующих альтернатив

Ю. И. Богданов[1]*, Н. А. Богданова, Д. В. Фастовец, В. Ф. Лукичев*

Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 февраля 2022 г.
После переработки 14 марта 2022 г.
Принята к публикации 18 марта 2022 г.

Предложен подход, позволяющий рассчитывать характеристики когерентности и интерференции макроскопических квантовых систем. На основе разложения Шмидта представлен общий метод анализа двухчастичных квантовых систем, позволяющий исследовать квантовую запутанность между системой и окружением, а также когерентность интерферирующих альтернатив. Получены простые формулы, выражающие связь между когерентностью, интерференционной видностью и числом Шмидта. Разработанный метод применен к многомодовым квантовым состояниям кота Шредингера.

DOI: 10.31857/S1234567822080092

1. Введение. Интерференция квантовых состояний является ключевым ресурсом квантовых информационных технологий [1]. Рассматриваемое явление наблюдается в самых различных физических системах, включая дифракционные решетки, бифотонные поля, двухлучевые электронные интерферометры [2] и другие. Взаимодействие квантовой системы с окружением приводит к возникновению эффекта декогерентизации, при котором квантовое состояние системы неконтролируемо изменяется. Изучение характеристик когерентности различных открытых квантовых систем [3–6] в максимально общем виде, является важной задачей, за которой стоит возможность учета и компенсации декогерентизации при реализации квантовых вычислений и квантовых симуляторов.

Одним из примеров интерферирующих квантовых систем являются квантовые состояния кота Шредингера, которые представляют собой суперпозицию когерентных состояний [7] с разной фазой. Данные состояния активно используются в квантовой оптике и оптических технологиях [8–10]. Кроме того, эти состояния используются и в других областях науки, например, в вычислениях с непрерывными переменными [11–13], в квантовых кодах с исправлением ошибок [14, 15] и в прецизионных измерениях [16, 17]. Существенный практический интерес представляют многомодовые состояния, образованные несколькими подсистемами (модами). Наличие запутанности в таких состояниях делает их универсальным инструментом для использования в различных квантовых алгоритмах [18, 19].

Важно отметить, что генерация многомодовых состояний квантового кота Шредингера является чрезвычайно сложной задачей, поскольку прямое преобразование когерентного состояния света в состояние кота Шредингера требует создания среды со значительной нелинейностью [20]. Масштабирование и генерация многомодовых состояний кота Шредингера – весьма сложная задача еще и из-за наличия декогерентизации. Отметим, что для большинства приложений требуется, чтобы состояния когерентного кота Шредингера имели достаточно высокие значения среднего числа фотонов и числа мод [12, 21]. Проблема генерации многомодовых состояний кота Шредингера с высоким средним числом фотонов является важной и актуальной как с точки зрения фундаментальной науки, так и с точки зрения прикладного интереса в метрологии, алгоритмах квантовых вычислений и т.д.

2. Многомодовое состояние кота Шредингера. Многомодовое состояние кота Шредингера является непосредственным обобщением одномодового состояния. Последнее представляет собой суперпозицию двух когерентных состояний, отличающихся по фазе на π (см., например, [22, 23]):

$$|\psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+q_\alpha)}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle). \qquad (1)$$

Здесь $q_\alpha = \langle\alpha| - \alpha\rangle = \exp(-2|\alpha|^2)$. В координатном представлении состояние кота Шредингера есть:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2}C_\alpha}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cosh(\sqrt{2}\alpha x). \qquad (2)$$

[1]e-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

Здесь $C_\alpha = (\exp(2\bar{\alpha}^2) + \exp(-2\bar{\bar{\alpha}}^2))^{-1/2}$ – нормировочный множитель, в записи которого использованы следующие обозначения для действительной и мнимой частей соответственно: $\bar{\alpha} = \mathrm{Re}(\alpha)$, $\bar{\bar{\alpha}} = \mathrm{Im}(\alpha)$.

Состояние кота Шредингера в импульсном представлении задается Фурье-образом от состояния в координатном представлении (2):

$$\tilde{\psi}_\alpha(p) = \frac{\sqrt{2}\tilde{C}_\alpha}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right) \cos(\sqrt{2}\alpha p). \tag{3}$$

Здесь $\tilde{C}_\alpha = (\exp(2\bar{\bar{\alpha}}^2) + \exp(-2\bar{\alpha}^2))^{-1/2}$ – нормировочная константа. Можно заметить, что константы C_α и $\tilde{C}_\alpha$ переходят друг в друга, если $\bar{\alpha}^2$ и $\bar{\bar{\alpha}}^2$ меняются местами. Более подробно, при повороте когерентного состояния на угол $\pi/2$ координата переходит в импульс $x \to p$, а амплитуда α переходит в некоторую новую амплитуду α': $\alpha \to \alpha' = \exp(i\pi/2)\alpha = i\alpha$, поэтому $\bar{\alpha}' = -\bar{\bar{\alpha}}$, а $\bar{\bar{\alpha}}' = \bar{\alpha}$. При таком преобразовании координатная волновая функция (2) переходит в импульсную волновую функцию (3).

Рассмотренное одномодовое состояние можно непосредственно обобщить на многомодовый случай. По аналогии с (1) определим состояние кота Шредингера, образованное n модами, следующей формулой:

$$|\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \prod\limits_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}\right)}} \times$$
$$\times \left(|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle + |-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n\rangle\right). \tag{4}$$

Здесь $q_{\alpha_j} = \langle\alpha_j|-\alpha_j\rangle = \exp(-2|\alpha_j|^2)$, $j = 1, \ldots, n$. Координатное представление многомодового состояния кота Шредингера есть непосредственное обобщение соответствующей формулы (2) для одномодового случая:

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{2}C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}{\sqrt[4]{\pi^n}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \cosh\left(\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right). \tag{5}$$

Здесь

$$C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \left(\exp\left(2\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j^2\right) + \exp\left(-2\sum_{j=1}^{n} \bar{\bar{\alpha}}_j^2\right)\right)^{-1/2}$$

– нормировочный множитель, в записи которого, аналогично одномодовому случаю, использованы обозначения: $\bar{\alpha}_j = \mathrm{Re}(\alpha_j)$, $\bar{\bar{\alpha}}_j = \mathrm{Im}(\alpha_j)$.

Аналогично координатному представлению, импульсное представление многомодового состояния кота Шредингера есть непосредственное обобщение соответствующей формулы (3) для одномодового случая:

$$\tilde{\psi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{\sqrt{2}\tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}{\sqrt[4]{\pi^n}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) \cos\left(\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j\right), \tag{6}$$

где

$$C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \left(\exp\left(2\sum_{j=1}^{n} \bar{\bar{\alpha}}_j^2\right) + \exp\left(-2\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j^2\right)\right)^{-1/2}$$

– нормировочный множитель. Заметим, что, как и в одномодовом случае, нормировочные множители координатного и импульсного представлений связаны соотношением $\tilde{C}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = C_{i\alpha_1, i\alpha_2, \ldots, i\alpha_n}$. Снова, как и в одномодовом случае, при повороте когерентного состояния в каждой моде на угол $\pi/2$, координатная волновая функция (5) переходит в импульсную волновую функцию (6).

3. Исследование когерентности состояний с использованием разложения Шмидта. Выделим в состоянии (4) две подсистемы. Пусть первая подсистема A является основной и содержит в себе первые $n-m$ мод состояния, а вторая подсистема B, которую мы рассматриваем в качестве окружения, состоит из оставшихся m мод

$$\Bigg|\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}}_{A}, \overbrace{\alpha_{n-m+1}, \ldots, \alpha_n}^{B}\Bigg\rangle +$$
$$+ \Bigg|\underbrace{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_{n-m}}_{A}, \overbrace{-\alpha_{n-m+1}, \ldots, -\alpha_n}^{B}\Bigg\rangle.$$

Рассмотрим двухчастичную систему, состоящую из представленных подсистем A и B. У нас имеются две интерферирующие альтернативы $|\varphi_1\rangle = |\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}\rangle$ и $|\varphi_2\rangle = |-\alpha_1, \ldots, -\alpha_{n-m}\rangle$ первой подсистемы A, запутанные с соответствующими состояниями $|e_1\rangle = |\alpha_{n-m+1}, \ldots, \alpha_n\rangle$ и $|e_2\rangle = |-\alpha_{n-m+1}, \ldots, -\alpha_n\rangle$ второй подсистемы B, которая характеризует окружение (все указанные состояния нормированы на единицу):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + q_1 q_2)}}(|\varphi_1, e_1\rangle + |\varphi_2, e_2\rangle). \tag{7}$$

Здесь $q_1 = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \exp\left(-2\sum_{j=1}^{n-m}|\alpha_j|^2\right)$ – амплитуда вероятности обнаружить альтернативу $|\varphi_1\rangle$ при условии, что была приготовлена альтернатива $|\varphi_2\rangle$. Аналогично $q_2 = \langle e_1|e_2\rangle = \exp\left(-2\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{n-m+j}|^2\right)$ – амплитуда вероятности совпадения состояний окружения.

Рассмотрим с использованием разложения Шмидта квантовую запутанность между системой и окружением, а также когерентность интерферирующих альтернатив. Замечательно, что рассматриваемая задача сводится к исследованию двухкубитной системы, независимо от сложности интерферирующих состояний и состояний окружения самих по себе. При этом, первый кубит задает интерферирующие альтернативы, а второй – соответствующие им состояния окружения. Путем ортогонализации нетрудно получить базисные состояния рассматриваемых кубитов. Для кубита, связанного с интерферирующими альтернативами, получаем следующие состояния логического ноля и логической единицы:

$$|0\rangle_1 = |\varphi_1\rangle, \quad |1\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{1-|q_1|^2}}(|\varphi_2\rangle - q_1|\varphi_1\rangle). \qquad (8)$$

Аналогично, для кубита окружения имеем:

$$|0\rangle_2 = |e_1\rangle, \quad |1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{1-|q_2|^2}}(|e_2\rangle - q_2|e_1\rangle). \qquad (9)$$

В результате двухкубитовое состояние (7) можно представить в виде:

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle. \qquad (10)$$

Здесь $c_{00} = \frac{1+q_1q_2}{\sqrt{2(1+q_1q_2)}}$, $c_{01} = \frac{q_1\sqrt{1-|q_2|^2}}{\sqrt{2(1+q_1q_2)}}$, $c_{10} = \frac{q_2\sqrt{1-|q_1|^2}}{\sqrt{2(1+q_1q_2)}}$, $c_{11} = \frac{\sqrt{(1-|q_1|^2)(1-|q_2|^2)}}{\sqrt{2(1+q_1q_2)}}$. Рассмотрим квадрат модуля детерминанта $\Delta = |c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10}|^2$. Из представленных выражений следует, что $\Delta = \frac{(1-|q_1|^2)(1-|q_2|^2)}{4(1+q_1q_2)^2}$. Через параметр Δ можно выразить веса разложения Шмидта λ_0 и λ_1

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\Delta}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\Delta}), \qquad (11)$$

а также число Шмидта:

$$K = \frac{1}{\lambda_0^2+\lambda_1^2} = \frac{1}{1-2\Delta}. \qquad (12)$$

Заметим, что в случае хорошо различимых альтернатив, например, для узких щелей в эксперименте Юнга, когда $q_1 = 0$, получим: $\Delta = (1-|q_2|^2)/4$.

С явлением интерференции в теории оптических явлений неразрывно связано понятие видности интерференционной картины V [24]. Видность интерференционной картины (для узких щелей) определяется в классической оптике формулой:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \qquad (13)$$

Здесь $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивность регистрируемого оптического сигнала. На языке разложения Шмидта в качестве полезного сигнала $I_{\max}$ выступает вес λ_0 основной (нулевой) моды, а в качестве шума $I_{\min}$ выступает вес λ_1 первой моды, поэтому получаем следующую связь между видностью и числом Шмидта:

$$V = \lambda_0 - \lambda_1 = \sqrt{\frac{2-K}{K}} = \sqrt{1-4\Delta}. \qquad (14)$$

Заметим, что непосредственное рассмотрение интерференционной картины от двух узких щелей [25] показывает, что данное нами определение видности полностью согласуется с классическим определением. Для хорошо различимых альтернатив (для узких щелей в эксперименте Юнга), когда $q_1 = 0$, имеем следующую простую связь между видностью и когерентностью состояний окружения:

$$V = |q_2| = |\langle e_1|e_2\rangle|. \qquad (15)$$

Сравнивая представленное описание интерферирующих квантовых альтернатив с классическим описанием явления когерентности, мы видим, что скалярное произведение состояний окружения $q_2 = \langle e_1|e_2\rangle$ выступает в качестве естественного обобщения классического параметра γ, называемого степенью когерентности световых колебаний [24].

4. Примеры исследования явлений когерентности и интерференции. Разработанный математический аппарат может быть применен к любой сколь угодно сложной системе, в которой имеется интерференция двух различных альтернатив. Прежде чем рассматривать приложение развитой теории к многомодовым состояниям кота Шредингера, рассмотрим в качестве простой иллюстрации классическую задачу о двухщелевой интерференции поляризованных световых пучков, изученную Араго и Френелем более 200 лет назад [26]. Пусть, для определенности, исходное излучение поляризовано вертикально. Разместим в левой щели поляроид, ось поляризации которого повернута на угол $\theta/2$ от вертикали. Аналогично, разместим в правой щели поляроид, ось поляризации которого повернута на угол

$-\theta/2$ от вертикали, отличающийся от первого только знаком. Поляроиды в щелях действуют на излучение по-разному, создавая тем самым разные поляризационные состояния окружения $|e_1\rangle$ и $|e_2\rangle$ для интерферирующих альтернатив и вызывая появление запутанности между координатной и поляризационной степенями свободы света. Угол между направлениями поляризаторов равен θ, поэтому степень когерентности есть $\langle e_1|e_2\rangle = \cos(\theta)$, а видность равна $V = |\langle e_1|e_2\rangle| = |\cos(\theta)|$. Интерференция полностью исчезает ($V = 0$), когда угол между направлениями поляризации становится прямым $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, что и наблюдалось в опытах Араго и Френеля в 1819 г. [26]. Заметим, что в реальных оптических системах состояния окружения $|e_1\rangle$ и $|e_2\rangle$, как и сами интерферирующие альтернативы $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$, могут быть весьма сложными, но простые формулы (14) и (15) остаются верными и в общем случае.

Рассмотрим теперь более подробно частный случай многомодового состояния кота Шредингера, для которого амплитуды состояний в каждой моде равны одному и тому же действительному числу α, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$.

Осуществим ортогональное преобразование к новым (нормальным) координатам в координатном представлении: $q_j = O_{jk}x_k$, $j,k = 1,\ldots,n$. Здесь O – ортогональная матрица, первая строка которой состоит из n одинаковых элементов, равных $1/\sqrt{n}$. Обратное преобразование задается матрицей, транспонированной по отношению к исходной: $x_j = O^T_{jk}q_k$, $j,k = 1,\ldots,n$. Учитывая, что сумма квадратов координат остается инвариантной при ортогональных преобразованиях, мы можем в рассматриваемом случае представить волновую функцию многомодового состояния кота Шредингера (5) в новых координатах в виде:

$$\psi_{\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_n=\alpha}(q_1,q_2,\ldots,q_n) = \\ = \psi_{\alpha_0}(q_1)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi^{n-1}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}q_j^2\right). \quad (16)$$

Важно отметить, что в новых координатах состояние перестало быть запутанным. Здесь $q_1 = \frac{x_1+\ldots+x_n}{\sqrt{n}}$ – первая (главная) нормальная координата. Ей отвечает одномерное состояние $\psi_{\alpha_0}(q_1)$ кота Шредингера (2) с амплитудой $\alpha_0 = \alpha\sqrt{n}$. Остальным нормальным координатам $q_2,q_3,\ldots,q_n$ в (16) отвечают вакуумные состояния.

Описанный алгоритм может быть использован для численного моделирования сложным образом коррелированных исходных многомерных координат $x_1,x_2,\ldots,x_n$ кота Шредингера посредством генерации независимых нормальных координат $q_1,q_2,\ldots,q_n$ с последующим их ортогональным преобразованием. При этом случайная величина q_1 соответствует одномерному распределению кота Шредингера с амплитудой $\alpha_0 = \alpha\sqrt{n}$, а остальные координаты $q_2,q_3,\ldots,q_n$ представляют собой гауссовы случайные величины с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1/2$, отвечающей дисперсии вакуумных флуктуаций.

Рассматриваемое одномерное состояние кота Шредингера $\psi_{\alpha_0}(q_1)$ можно переписать в виде:

$$\psi_{\alpha_0}(q_1) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}\sqrt{1+\exp(-2\alpha^2 n)}}\times \\ \times\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1-\sqrt{2}\alpha\sqrt{n})^2\right)+\right. \\ \left.+\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1+\sqrt{2}\alpha\sqrt{n})^2\right)\right]. \quad (17)$$

Будем условно считать, что в суперпозиции (17) первое слагаемое отвечает состоянию “живого” кота, а второе – состоянию “мертвого” кота. Распределение вероятностей, отвечающее волновой функции (17), есть:

$$P_{\alpha_0}(q_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\exp(-2\alpha^2 n))}\times \quad (18) \\ \times\left[\frac{1}{2}e^{-(q_1-\sqrt{2}\alpha\sqrt{n})^2}+\frac{1}{2}e^{-(q_1+\sqrt{2}\alpha\sqrt{n})^2}+e^{-(q_1^2+2\alpha^2 n)}\right].$$

В контексте рассматриваемой задачи наиболее интересен случай, когда каждая мода несет в себе малое число фотонов ($\alpha^2 \ll 1$), но общее число фотонов велико ($n\alpha^2 \gg 1$). Пусть, например, $\alpha = 0.01$, а $n = 10^6$, тогда $\exp(-2\alpha^2 n) = \exp(-200) = 1.38\cdot 10^{-87}$ – исчезающе малая величина. Это соответствует приближению хорошо различимых альтернатив в (17) и при этом, согласно (18), распределение вероятностей для q_1 представляет собой смесь с равными весами двух гауссовых распределений со средними соответственно $\pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{n}$ и дисперсиями, равными $\sigma^2 = 1/2$. Здесь знак “плюс” отвечает состоянию “живого” кота, а знак “минус” – состоянию “мертвого” кота. В условиях, когда $\alpha\sqrt{n} \gg 1$, рассматриваемые альтернативы могут быть хорошо различимы между собой, если найти величину q_1 посредством измерения суммарной координаты во всех n модах. Однако в условиях макроскопического числа мод, нет необходимости измерять все n мод, а достаточно измерить только ограниченное их число $m \ll n$ такое, что $\alpha\sqrt{m} \sim 1$. При этом суммарная координата в ограниченной системе из m мод позволит предсказывать суммарную координату в полной системе из n мод (т.е. оценивать "жив", кот или "мертв"). Это оказывается возможным в силу сильной корреляционной связи между рассматриваемыми величинами. Исследуем искомые корреляционные связи между подсистемами. Для этого осуществим ортогональное преобразование к нормальным координатам для подсистем A и B, рассмотренных выше. Для подсистемы A в координатном представлении получим: $q_j^A = O_{jk}^A x_k$, $j,k = 1,\dots,n-m$. Здесь O^A – ортогональная матрица, действующая в подсистеме A, первая строка которой состоит из $n-m$ одинаковых элементов, равных $1/\sqrt{n-m}$. Аналогично, для подсистемы B в координатном представлении получим: $q_j^B = O_{jk}^B x_{n-m+k}$, $j,k = 1,\dots,m$. Здесь O^B – ортогональная матрица, действующая в подсистеме B, первая строка которой состоит из m одинаковых элементов, равных $1/\sqrt{m}$.

Заметим, что в рассматриваемом случае ортогональные преобразования в подсистемах A и B являются локальными преобразованиями, которые действуют только внутри подсистем и не меняют характеристик запутанности между самими рассматриваемыми подсистемами. Теперь мы можем представить волновую функцию многомодового состояния кота Шредингера (5) в новых координатах в виде:

$$\psi^{A,B}_{\alpha_1=\alpha_2=\dots\alpha_n=\alpha}(q_1^A,\dots,q_{n-m}^A;q_1^B,\dots,q_m^B) =$$

$$= \psi_{\alpha_0^A\alpha_0^B}(q_1^A,q_1^B)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi^{n-2}}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-m}(q_j^A)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}(q_j^B)^2\right). \quad (19)$$

В новых координатах запутанность состояния определяется координатами $q_1^A = \frac{x_1+\dots+x_{n-m}}{\sqrt{n-m}}$ и $q_1^B = \frac{x_{n-m+1}+\dots+x_n}{\sqrt{m}}$, которые есть первые (главные) нормальные координаты в подсистемах A и B соответственно. Им отвечает двумерное состояние $\psi_{\alpha_0^A\alpha_0^B}(q_1^A,q_1^A)$ кота Шредингера с амплитудами $\alpha_0^A = \alpha\sqrt{n-m}$ и $\alpha_0^B = \alpha\sqrt{m}$ соответственно (явный вид этого состояния можно легко найти с помощью формулы (5)). Остальным нормальным $n-2$ координатам $q_2^A,\dots,q_{n-m}^A; q_2^B,\dots,q_m^B$ в (19) отвечают вакуумные состояния.

Рассматриваемое двумерное состояние кота Шредингера можно переписать также в виде:

$$\psi_{\alpha_0^A\alpha_0^B}(q_1^A,q_1^B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\exp(-2\alpha^2 n)}}\times \quad (20)$$

$$\times\Bigg[\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^A-\sqrt{2}\alpha_0^A)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^B-\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)+$$

$$+\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^A+\sqrt{2}\alpha_0^A)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^B+\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)\Bigg].$$

Полученная формула наглядно представляет квантовую запутанность между переменной q_1^A, отвечающей состоянию кота и переменной q_1^B, отвечающей окружению. Наблюдение переменной окружения q_1^B вблизи $\sqrt{2}\alpha_0^B = \sqrt{2}\alpha\sqrt{m}$ отвечает регистрации состояния "живого" кота. Напротив, наблюдение q_1^B вблизи $-\sqrt{2}\alpha_0^B = -\sqrt{2}\alpha\sqrt{m}$ отвечает регистрации состояния "мертвого" кота.

В выражении (20) амплитуды вероятностей наблюдений состояний "живого" и "мертвого" кота пропорциональны соответственно величинам $\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^B-\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)$ и $\exp\left(-\frac{1}{2}(q_1^B+\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)$. Тогда вероятности "выживания" P_0 и "гибели" кота P_0 будут выражаться формулами:

$$P_0 = \frac{\exp\left(-(q_1^B-\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)}{\exp\left(-(q_1^B-\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)+\exp\left(-(q_1^B+\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)},$$

(21)

$$P_1 = \frac{\exp\left(-(q_1^B+\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)}{\exp\left(-(q_1^B-\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)+\exp\left(-(q_1^B+\sqrt{2}\alpha_0^B)^2\right)}.$$

Соответствующие вероятности задаются первой нормальной координатой окружения $q_1^B = \frac{x_{n-m+1}+\dots+x_n}{\sqrt{m}}$, которая, в свою очередь, определяется суммарной координатой всех измеренных мод окружения.

Введем понятие "здоровья" H многомодового кота Шредингера, которое определим формулой:

$$H(m) = \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right). \quad (22)$$

Из формул (21) и (22) нетрудно получить, что "здоровье" многомодового кота Шредингера определяется суммой всех измеренных мод окружения:

$$H(m) = 4\alpha\sqrt{2}\sum_{j=1}^{m}x_{n-m+j}. \quad (23)$$

Введенный параметр определяет уровень "коллапса" квантового состояния кота Шредингера. Очевидно, что значение $H = 0$ соответствует $P_0 = P_1 = 0.5$ и отвечает максимальной когерентности между подсистемами. Далее, если $H\to+\infty$ (при $n\to\infty$ и $m\to\infty$), то $P_0\to 1$ (коллапс к состоянию "живого" кота), и наоборот, если при тех же условиях $H\to-\infty$, то $P_0\to 0$ (коллапс к состоянию "мертвого" кота).

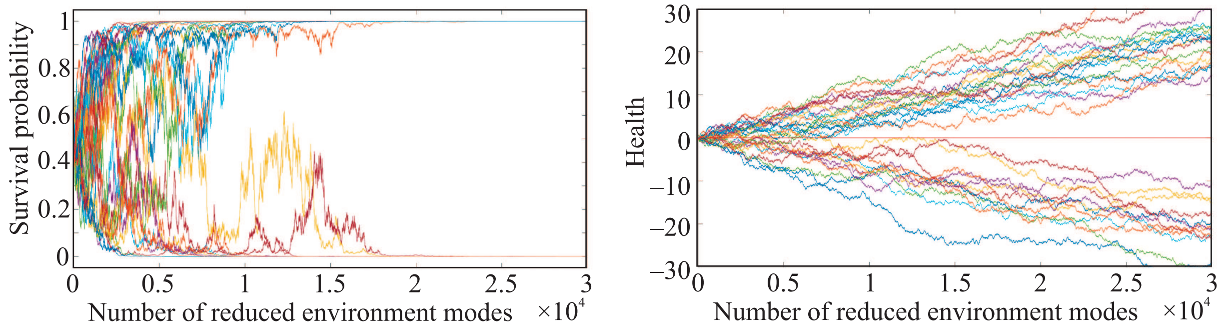

Рис. 1. (Цветной онлайн) Слева: зависимость вероятности "выживания" кота Шредингера от числа редуцированных мод, $\alpha = 0.01$, $n = 1000000$. Выполнено 30 численных экспериментов. Справа: зависимость параметра "здоровья" кота Шредингера от числа редуцированных мод (для тех же данных, что и слева)

На рисунке 1 представлены зависимость вероятности "выживания" P_0 (слева) и параметра "здоровья" H (справа) для многомодового кота Шредингера в зависимости от числа измеренных мод окружения m. Видно, что, начиная примерно с $m = 15 \cdot 10^3$ (соответствует $m\alpha^2 = 1.5$ фотона), суперпозиция состояний "живого" и "мертвого" кота практически полностью разрушается. Мы видим, что многомодовое квантовое состояние кота Шредингера является практически неустойчивым, так как редукция всего лишь одного-двух фотонов приводит к почти полной потери когерентности исходного квантового состояния.

Структура состояния (20) полностью соответствует структуре двухчастичного состояния (7), при этом $q_1 = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \exp(-2\alpha^2(n-m))$, а $q_2 = \langle e_1|e_2\rangle = \exp(-2\alpha^2 m)$. В условиях макроскопически большого числа мод n параметр q_1 исчезающе мал, при этом видность интерференционной картины есть:

$$V = |\langle e_1|e_2\rangle| = \exp(-2\alpha^2 m). \tag{24}$$

Из формулы (24) мы видим, что в условиях, когда каждая мода содержит в среднем ничтожное число фотонов (α^2 очень мало), можно наблюдать разрушение состояний весьма большого числа мод без существенного влияния на свойства когерентности и интерференции. Однако, когда среднее суммарно накопленное число фотонов в декогерентизированных модах составит величину всего порядка одного фотона ($\alpha^2 m \sim 1$), суперпозиция макроскопических альтернатив станет практически малозаметной. В этом смысле исходная идея Шредингера [27] о возможном решающем влиянии отдельной микрочастицы на судьбу макроскопического объекта является совершенно верной.

Для наглядного представления интерференции удобно перейти от координатного представления к импульсному представлению, что легко сделать заменой α на $i\alpha$. Введем главную компоненту, связанную с интерференцией:

$$x = \frac{p_1 + \ldots + p_{n-m}}{\sqrt{n-m}}. \tag{25}$$

Ее распределение, которое и обеспечивает интерференцию, находится посредством интегрирования по переменной окружения. Результат имеет вид:

$$\tilde{P}(x) = \frac{1}{(1+\exp(-2n\alpha^2))\sqrt{\pi}} \times$$
$$\times \exp(-x^2)\left[1 + V\cos(2\sqrt{2}\alpha\sqrt{n-m}x)\right]. \tag{26}$$

Здесь видность задается представленной выше формулой (24). Рассматриваемое явление наглядно иллюстрируется на рис. 2. Демонстрируется хорошее согласие между теорией, задаваемой формулой (26), и результатами численного моделирования в соответствии с представленным выше методом.

5. Выводы. В настоящей работе был предложен и исследован математический аппарат анализа систем с интерферирующими альтернативами. С использованием разложения Шмидта был разработан общий метод анализа двухчастичных квантовых систем, позволяющий исследовать квантовую запутанность между системой и окружением, а также когерентность интерферирующих альтернатив. Были получены простые формулы, выражающие связь между когерентностью, интерференционной видностью и числом Шмидта. В качестве иллюстрации были исследованы характеристики когерентности и интерференции для многомодового квантового состояния кота Шредингера. Было показано, что явление декогерентизации многомодовых состояний ярко проявляется в условиях, когда имеется много мод, в каждой из которых среднее число фотонов много меньше единицы. Гипотетически, макроскопически раз-

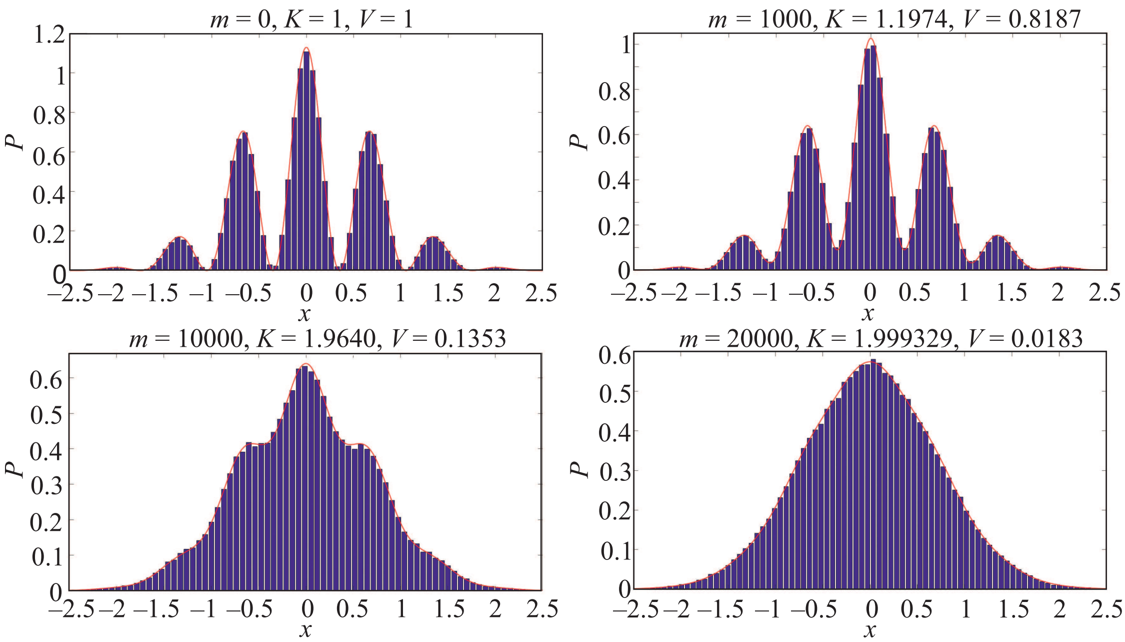

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость интерференционной картины от числа редуцированных мод, $\alpha = 0.01$, $n = 100000$. Сравнение результатов численных экспериментов (гистограммы) с теорией (линии). Гистограммы отвечают объему выборки 200000

личимые интерферирующие альтернативы в многомодовом состоянии кота Шредингера могут характеризоваться сколь угодно высокими значениями полной энергии и полного числа фотонов. Однако такие макроскопически различимые суперпозиции практически полностью разрушаются уже при наблюдении ограниченного числа мод окружения, суммарно содержащих в себе порядка одного фотона. Таким образом, судьба легендарного кота Шредингера зависит не от макроскопического наблюдателя, а от микроскопических процессов, затрагивающих ограниченное число мод окружения и составляющих ничтожно малую долю от самого исходного многомодового состояния.

Работа выполнена в рамках проекта # 22-12-00263 Российского Научного Фонда при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант # 20-1-1-34-1).

1. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М. (2006), 824 с.
2. E. Buks, R. Schuster, M. Heiblum, D. Mahalu, and V. Umansky, Nature **391**, 871 (1998).
3. Х.- П. Бройер, Ф. Петруччионе, *Теория открытых квантовых систем*, Регулярная и хаотическая динамика, М.-Ижевск (2010), 824 с.
4. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
5. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **111**(9), 632 (2020).
6. Ю. С. Бараш, ЖЭТФ **158**(4), 761 (2021).
7. R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
8. S. J. van Enk and Ch. A. Fuchs, Phys. Rev. Lett. **88**, 027902 (2001).
9. K. Ch. Tan, T. Volkoff, H. Kwon, and H. Jeong, Phys. Rev. Lett. **119**, 190405 (2017).
10. S. Bose, D. Home, and S. Mal, Phys. Rev. Lett. **120**, 210402 (2018).
11. J. S. Neergaard-Nielsen, M. Takeuchi, K. Wakui, H. Takahashi, K. Hayasaka, M. Takeoka, and M. Sasaki, Phys. Rev. Lett. **105**, 053602 (2010).
12. T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, Phys. Rev. A **68**, 042319 (2003).
13. H. Jeong and M. S. Kim, Phys. Rev. A **65**, 042305 (2002).
14. P. T. Cochrane, G. J. Milburn, and W. J. Munro, Phys. Rev. A **59**, 2631 (1999).
15. D. Gottesman, A. Kitaev, and J. Preskill, Phys. Rev. A **64**, 012310 (2001).
16. T. C. Ralph, Phys. Rev. A **65**, 042313 (2002).
17. J. Joo, W. J. Munro, and T. P. Spiller, Phys. Rev. Lett. **107**, 083601 (2011).
18. A. Gilchrist, K. Nemoto, W. J. Munro, T. C. Ralph, S. Glancy, S. L. Braunstein, and G. J. Milburn, Journal

of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **6**(8), S828 (2004).
19. M. Daoud, A.R. Laamara, and R. Essaber, International J. Quantum information **11**(6), 1350057 (2013).
20. T. Peyronel, O. Firstenberg, Q-Y. Liang, S. Hofferberth, A.V. Gorshkov, T. Pohl, M.D. Lukin, and V. Vuletić, Nature **488**, 57 (2012).
21. A.P. Lund, T.C. Ralph, and H.L. Haselgrove, Phys. Rev. Lett. **100**, 030503 (2007).
22. V.V. Dodonov, I.A. Malkin, and V.I. Man'ko, Physica **72**(3), 597 (1974).
23. S. Glancy and H.M. Vasconcelos, J. Opt. Soc. Am. B **25**, 712 (2008).
24. M. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, М. (1973), 719 с.
25. Yu.I. Bogdanov, K.A. Valiev, S.A. Nuyanzin, and A.K. Gavrichenko, Russian Microelectronics **39**, 221 (2010).
26. D.F.J. Arago and A.J. Fresnel, Ann. Chim. Phys. **10**, 288 (1819), на французском; пер. на англ. *The Wave Theory Of Light: Memoirs Of Huygens, Young And Fresnel* (1900), ed. by H. Crew; https://archive.org/details/wavetheoryofligh00crewrich/page/144/mode/2up.
27. E. Schrodinger, Naturwissenschaften **23**, 807, 8, 844 (1935), на нем., пер. на англ. Proceedings of the American Philosophical Society **124**, 323 (1980).