Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 10, с. 642 – 649 © 2022 г. 25 мая

Теория вращающегося двумерного вигнеровского кластера

Махмуд М. Махмудиан[+*1)], *Мехрдад М. Махмудиан*[+*1)], *М. В. Энтин*[+1)]

[+] *Институт физики полупроводников, Сибирское отделение РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[*] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 6 февраля 2022 г.
После переработки 8 апреля 2022 г.
Принята к публикации 14 апреля 2022 г.

Численно и аналитически изучен двумерный вигнеровский кластер (ДВК) в параболической потенциальной яме с числом электронов до 200. Показано, что внутренняя часть ДВК в аксиально-симметричной потенциальной яме имеет поликристаллический характер, в то время как электроны во внешних слоях образуют выраженные круговые оболочки. Рассмотрено масштабирование кластера при изменении жесткости ямы. Найден порог свободного вращения твердого кластера в аксиально-симметричной потенциальной яме. Исследовано воздействие на ДВК соосного соленоида с переменным (включаемым) магнитным полем. Показано, что слабое вихревое электрическое поле приводит изначально неподвижный твердый ДВК во вращение с угловой скоростью, равной половине циклотронной частоты. Кроме того, при более сильном вихревом поле кластер, помимо вращения, начинает периодически сжиматься, сохраняя свою структуру. Дальнейшее увеличение вихревого поля может приводить к полному коллапсу кластера, сопровождаемому разрушением его структуры. Достаточно сильное вихревое электрическое поле может также приводить к дифференциальному вращению оболочек ДВК. Найден коэффициент вращательного трения за счет омических потерь в материале затвора, которое может ограничивать свободное вращение ДВК.

DOI: 10.31857/S123456782210007X, EDN: dytwjm

Введение. Вигнеровский кристалл [1] представляет собой систему отталкивающихся заряженных частиц с компенсацией однородно распределенных противоположных зарядов. Если отталкивание достаточно сильное, заряженные частицы образуют кристалл. В двумерной системе положительные и отрицательные заряды могут быть пространственно разделены, что позволяет формировать двумерные вигнеровские кристаллы [2–5].

Системы с конечным числом электронов изучались как экспериментально [6] так и теоретически [7, 8]. Мы [9] рассмотрели двумерные вигнеровские кластеры (ДВК) до 50–200 электронов при нулевой температуре в несимметричном параболическом потенциале.

Частным случаем такой системы является конечный электронный кластер в изотропном внешнем потенциале $k(x^2 + y^2)/2$. Электроны в этом кластере образуют почти изотропное распределение с поликристаллическим ядром. Моделирование показывает, что этот кластер также может характеризоваться оболочечной структурой [10–13]. Достаточно небольшие классические кластеры состоят из хорошо разделенных оболочек, с хорошей упорядоченностью внутри оболочек и слабой связью между ними.

Отметим, что, несмотря на долгую историю вопроса, двумерный вигнеровский кристалл продолжает оставаться в центре внимания исследователей (см., например, [14–22] и ссылки там).

В отличие от вышеупомянутых работ, здесь мы сосредоточены на жесткости и деформируемости двумерного вигнеровского кластера (ДВК). Во-первых, есть режимы движения ДВК как твердого тела. Нужно заметить, что вращение твердого невесомого заряженного тела рассматривалось как учебная задача в курсе электродинамики [23]. Однако изучаемая нами система имеет свою специфику, существенно отличающую ее от учебной задачи. Во-вторых, ДВК является относительно твердым только при слабой приложенной к нему силе. Более быстрое вращение или сильное внешнее электрическое поле может существенно деформировать ДВК. В частности, наличие структуры "оболочки", более жесткой внутри, чем связь оболочек между собой допускает их независимое вращение.

Целью настоящей работы является исследование движения электронов в двумерном вигнеровском кластере.

1)e-mail: mahmood@isp.nsc.ru; m.makhmudian1@g.nsu.ru; entin@isp.nsc.ru

Работа построена следующим образом. Сначала мы опишем результаты моделирования структуры кластера. Затем будут представлены аналитические рассуждения о самоподобии структуры кластера. После этого средняя плотность кластеров будет описана на основе внутренней периодичности и оболочечной структуры кластера. Далее мы определим пороговую угловую скорость, начиная с которой кластер перестает существовать из-за бесконечного расширения.

После этого будет рассмотрена задача ДВК во включаемом магнитном поле от соосного ДВК соленоида. Будет показано, что такое поле приводит ДВК во вращение с угловой частотой, равной половине циклотронной частоты свободного электрона. Действие более сильного магнитного поля ведет к периодическому сжатию кластера с сохранением его структуры. Дальнейшее увеличение поля ведет к полному коллапсу кластера. В этом случае взаимодействие индивидуальных электронов приводит к их рассеянию и разрушению структуры ДВК.

Далее будет рассмотрено трение вращения кластера, вызванное омическими потерями в электроде затвора, вызванными вращением. Найдем установившееся вращение ДВК и пределы, когда трение несущественно.

В последнем разделе будет проведен обзор полученных результатов.

Структура вигнеровского кластера. Здесь мы будем рассматривать N отталкивающихся электронов с двумерными координатами $\mathbf{r}_i$ с потенциалами $V(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}$, помещенных в потенциальную яму $U(\mathbf{r}) = k(x^2+\beta^2 y^2)/2$, где $-e$ – заряд электрона, (x, y) – координаты электрона в плоскости, а β определяет анизотропию потенциала ямы. При нулевой температуре положения электронов минимизируют полную потенциальную энергию.

Легко понять, что центр масс ДВК $\sum_i \mathbf{r}_i$ не зависит от $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ и, следовательно, обращается в нуль.

Когда N достаточно велико, электроны образуют кластер более или менее круглой формы. Внутри кластера они распределены эквидистантно в поликристаллической структуре. Характерные кластеры показаны на рис. 1. Видно, что при изменении k кластеры изменяются самоподобно. Это свойство исследуется аналитически в следующем разделе.

Самоподобие вигнеровских кластеров и модель непрерывного кластера. ДВК формируется параболической ямой и кулоновским отталкиванием электронов. Оба взаимодействия имеют степенную зависимость от координат. В результате положения электронов в ДВК и его форма масштабно-инвариантны. При масштабировании $k \to \lambda k$ и $r \to \to \nu r$ электронный гамильтониан преобразуется как

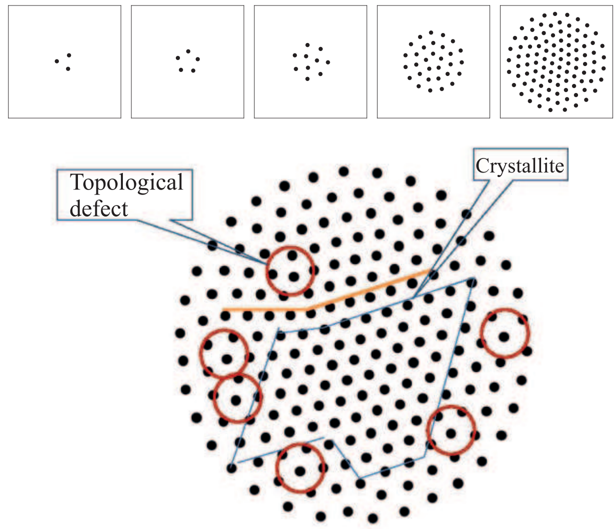

Рис. 1. (Цветной онлайн) Структуры кластеров с 3, 5, 10, 31, 50 и 100 (вверху) и 200 (внизу) электронами в гармонической яме. Показана блочная структура аксиально-симметричного 200-электронного кластера. Отмечены 5-кратные топологические дефекты

$$H = \nu^{-1} \sum_{i\neq j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \lambda\nu^2 \frac{1}{2} \sum_i k(x_i^2 + \beta^2 y_i^2).$$

Если $\lambda = \nu^{-3}$, гамильтониан H масштабируется как $H \to \nu^{-1} H$ и зависимость H от координаты не меняется. Отсюда следует, что все координаты масштабируются как $k^{-1/3}$, а энергия – как $k^{1/3}$. Падение энергии при $k \to 0$ связано с бесконечным расширением кластера.

Пусть электроны – сплошная жидкость с плотностью $n(\mathbf{r})$. Тогда

$$H = \frac{e^2}{2} \int d^2r d^2r' \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{k}{2} \int d^2r (x^2 + \beta^2 y^2) n(\mathbf{r}).$$

Минимизируя по $n(\mathbf{r})$, имеем условие

$$2e^2 \int d^2r' \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - k(x^2 + \beta^2 y^2) = 0.$$

Если $\beta = 1$, получается $n(\mathbf{r}) \propto r$. Примерное соблюдение этого правила показано на рис. 2а.

Следующим шагом является учет зависимости радиуса кластера R от числа электронов N. Если предположить однородное распределение электронов внутри кластера, то мы имеем энергию ямы $\sim kNR^2/4$ и кулоновскую энергию $\sim e^2N^2/2R$. Минимизируя по R, получаем $R \sim (Ne^2/k)^{1/3}$. Отметим, что мы учли дальнодействующее кулоновское отталкивание и пренебрегли короткодействующим электронным отталкиванием. Именно дальнодействующее кулоновское взаимодействие, расходящееся при больших N, отвечает за рост размера кластера с N. Для концентрации электронов в центре кластера получаем $n(0) \sim N/\pi R^2 = N^{1/3}(k/e^2)^{2/3}/\pi$.

Таким образом, дальнодействующее отталкивание определяет размер и плотность электронов внутри кластера. В то же время ближний порядок, ответственный за кристаллическую структуру, определяется короткодействующей частью потенциала взаимодействия.

Следует подчеркнуть, что относительно большое расстояние между оболочками по сравнению с расстоянием между электронами приводит к более слабой межоболочечной связи, по сравнению со взаимодействием внутри оболочки. Мы увидим, что это влияет на динамику электронов.

Оболочки ДВК. Многоэлектронные кластеры удобно описывать электронной плотностью $n(\mathbf{r})$, усредненной по межэлектронному расстоянию. В осесимметричном потенциале плотность зависит только от расстояния r. Сглаженная плотность $n(r)$ показана на рис. 2 (здесь и далее при численных расчетах используются единицы $e = m = c = 1$). Рисунок 2 демонстрирует отчетливые осцилляции, вызванные оболочками кластера.

Почему ДВК имеет отчетливо выраженные оболочки? Источником этого является круговая симметрия внешнего потенциала, диктующая ту же форму кластера. Направление границы определяет направление слоев атомов вблизи границы. В то же время внутренняя часть кластера испытывает в основном влияние соседних электронов, что диктует периодическое расположение электронов для минимизации отталкивания соседних электронов. Одновременное выполнение противоречивых требований приводит к разделению кластера на блоки (см. рис. 1, внизу).

Следует подчеркнуть, что слабое сцепление оболочек допускает их самостоятельное вращение при достаточно большом внешнем крутящем моменте.

Распределение потенциала того же ДВК в сравнении с потенциалом ямы $kr^2/2$ показано на рис. 3. Видно, что присутствие электронов уплощает дно потенциальной ямы.

Кластер в переменном магнитном поле. При низких температурах электроны стремятся минимизировать полную потенциальную энергию. В результате формируется твердый поликристаллический кластер круглой внешней формы. Такая система обладает всеми свойствами твердого тела. Без

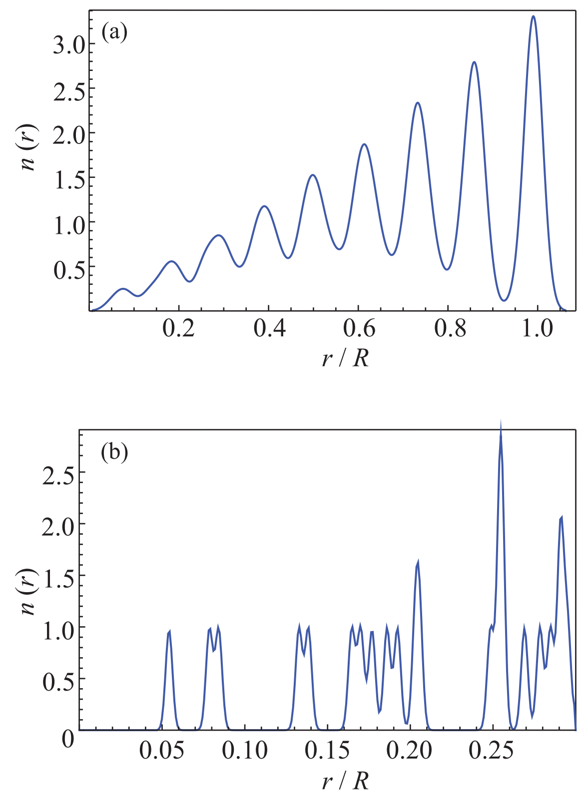

Рис. 2. (Цветной онлайн) Сглаженная радиальная электронная плотность аксиально-симметричного вигнеровского кластера с $N = 200$ электронов. (a) – Сильное сглаживание по радиусу на величину $\delta r = 0.02R$. Средняя плотность линейно растет с радиусом. Отчетливые осцилляции отражают оболочечную структуру кластера. (b) – Слабое сглаживание при $\delta r = 0.002R$, подчеркивает кристаллический ближний порядок

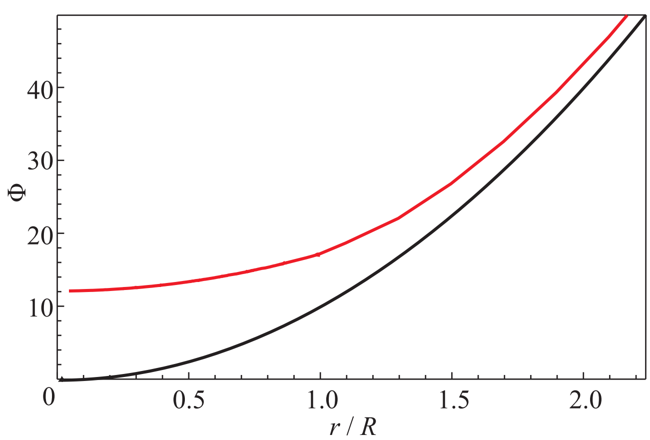

Рис. 3. (Цветной онлайн) Распределение потенциала Φ (верхняя кривая, красная) в ДВК с $N = 200$ электронов в сравнении с потенциалом ямы $kr^2/2$ (нижняя кривая, черная) при $\beta = 1$, $k = 0.02$

трения, будучи приведенным во вращение, оно будет вращаться бесконечно долго.

Рассмотрим кластер, расположенный на оси соленоида с нестационарным однородным магнитным полем $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$, $B(-\infty) \neq B(\infty)$. Это поле индуцирует вихревое электрическое поле $E_\varphi = -\frac{\dot{B}r}{2c}$, которое создает крутящий кластер момент силы

$$M = -e \sum_i E_\varphi(r_i) r_i, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i$ – координата i-го электрона. В отсутствие трения крутящий момент M вызывает вращение твердого кластера с угловой скоростью Ω, подчиняющийся уравнению $J\dot{\Omega} = M$, где $J = m\sum_i r_i^2$ – момент инерции, с решением $\Omega(t) = \frac{e}{2mc}(B(t) - B(-\infty))$. Здесь m – масса электрона. Таким образом, если $B(-\infty) = 0$ и $B(\infty) = \text{const}$, твердый кластер будет вращаться с циклотронной получастотой $\Omega(\infty) = eB(\infty)/2mc$. Если $B(-\infty) \neq 0$ и $B(\infty) = 0$, то $\Omega(\infty) = -eB(-\infty)/2mc$.

Заметим, что поведение твердого кластера заметно отличается от поведения свободных электронов: в тех же условиях они будут независимо вращаться вокруг некоторых положений.

Поскольку крутящий момент и момент инерции пропорциональны друг другу, частота вращения оказывается независимой от структуры кластера, что является следствием однородности магнитного поля внутри соленоида. Это отличает рассматриваемую систему, в частности, от [23], где изучалось вращение заряженного диска под действием вихревого электрического поля, создаваемого соосным бесконечно-тонким соленоидом. Заметим, что по той же причине расширение кластера не меняет его вращательного движения.

Кластер, вращающийся в переменном магнитном поле, не является абсолютно твердым. На рисунке 4 приведены результаты моделирования согласно зависимости

$$B(t) = B_0(\text{th}((t - t_0)/c_0) + 1). \tag{2}$$

Видно, что радиус таких кластеров существенно меняется при вращении. Это объясняется радиальным толчком от силы Холла в магнитном и вихревом электрическом полях, после чего кластер начинает вращаться с радиальными плазменными колебаниями. Однако в слабом магнитном поле радиальная деформация кластера незначительна.

Фокусировка переменным магнитным полем. Если магнитное поле становится достаточно сильным, то кластер может сильно сжиматься

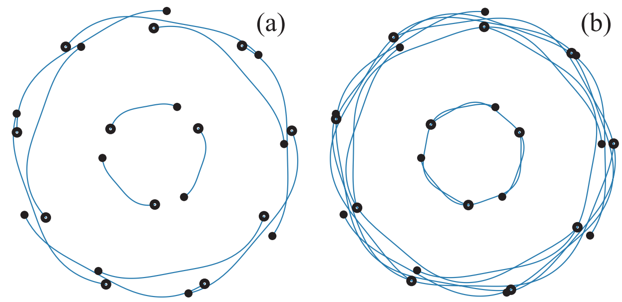

Рис. 4. (Цветной онлайн) Вращение ДВК с $N = 12$ электронами переменным магнитным полем $B(t)$, согласно (2), при $B_0 = 1$, $t_0 = 1$, $c_0 = 0.1$. Сплошные и пустые кружки – начальные и конечные положения электронов, линии – их траектории. Рисункам (a) и (b) соответствуют $t = 4$, 8

(рис. 5). Электроны периодически собираются вблизи начала координат. Временная периодичность определяется комбинационной частотой $\sqrt{(k/2m)^2 + \omega_c^2}$.

Рассмотрим это явление аналитически. Пусть на невзаимодействующий электрон, покоящийся на радиусе r_i, воздействует включение магнитного поля, создающего короткоимпульсное вихревое электрическое поле. После этого электрон приобретает тангенциальную скорость $eB(t)r_i/2m$ и движется по циклотронной орбите радиусом $eB(\infty)r_i/(2m\omega_c) = r_i/2$. В этом случае кластер будет уменьшаться самоподобно. Через время π/ω_c все $r_i(t)|_{t\to\pi/\omega_c} \to 0$. Этот результат справедлив для всех электронов, независимо от начального радиуса $r_i(0)$. Другими словами, все электроны удивительно синхронно собираются в нуле. Таким образом, магнитное поле и импульсное вихревое электрическое поле совместно работают как временнáя фокусирующая линза (см. рис. 5).

Наличие потенциала ямы частично нарушает эту синхронную фокусировку, но из-за упомянутого ранее уплощения дна ямы это нарушение слабое и, таким образом, в расчетах мы видим многократный возврат к началу с сохранением структуры кластера. Другой причиной нарушения структуры кластера является дискретность электронов, из-за которой происходит рассеяние их друг на друге при сближении. Однако эти слабые нарушения увеличиваются при сжатии кластера и накапливаются при большем количестве возвратов, что после многократных возвратов разрушает структуру кластера.

Вращательное разрушение вигнеровского кластера. Достаточно быстрое вращение сопровождается разрушением кластера. Это связано с преобладанием центробежной силы над потенциалом ло-

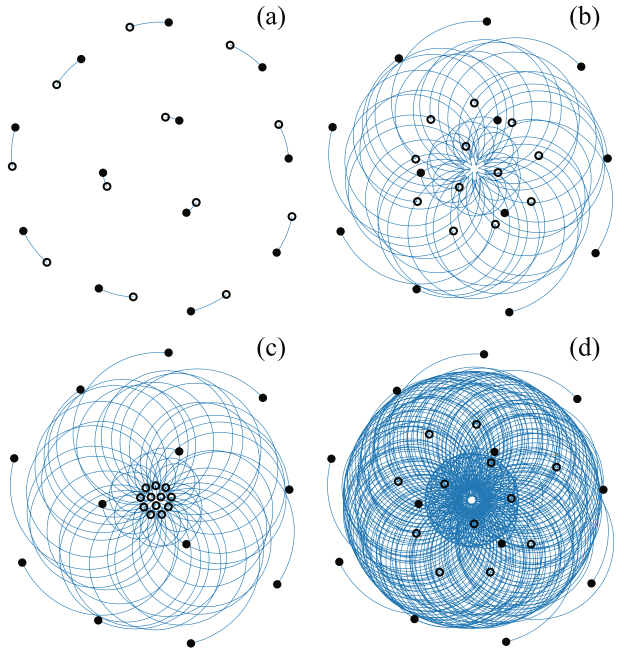

Рис. 5. (Цветной онлайн) Фокусировка электронов ДВК с $N = 12$ электронами при $B_0 = 7.76$, $t_0 = 1$, $c_0 = 0.1$. Сплошные и пустые кружки – начальные и конечные положения электронов, линии – их траектории. Рисункам (a)–(d) соответствуют $t = 1$, 2.45, 2.54, 8.8. После азимутального толчка от вихревого электрического поля (a), электроны начинают двигаться по циклотронным орбитам с диаметрами, равными r_i, которые проходят через окрестность центра. Кластер сжимается, сохраняя форму ((b) и (c)). Внутренняя и внешняя круглые области соответствуют следу от траекторий электронов на первой и второй оболочках. После многократного прохождения через центральную область слабое воздействие других электронов, накапливаясь, приводит к разрушению структуры кластера (d)

вушки. Пусть $B(-\infty) \neq 0$ и $B(\infty) = 0$. Когда ДВК приведен во вращение с угловой скоростью $\Omega = -eB(-\infty)/2mc$, на электроны во вращающейся системе координат действует центробежная сила $m\Omega^2 r$. Центробежный потенциал $-m\Omega^2 r^2/2$ вычитается из потенциала притяжения ямы $kr^2/2$. Следовательно, все расстояния в кластере (в частности, его размер) изменяются как $(k - m\Omega^2)^{-1/3}$. При $m\Omega^2 \to k$ размер кластера $R \to \infty$. Если $m\Omega^2 > k$, кластер перестает существовать.

Индуцированное дифференциальное вращение. Мы видели, что разность асимптотических значений магнитного поля $\delta B = B(\infty) - B(-\infty)$ вызывает постоянное вращение кластера как целого после установления магнитного поля. Но в этом случае для постоянного вращения кластера требуется $B(\infty) - B(-\infty) \neq 0$.

Другая проблема возникает, когда мы создаем импульсное магнитное поле. Вопрос: может ли вращение остаться после окончания импульса? Ответ положительный. Это тот случай, когда вращение ограничено какими-то угловыми барьерами. Например, это происходит, когда яма имеет небольшую асимметрию, $\beta \neq 1$, или если рассматривается дифференциальное вращение оболочки.

Моделью этого явления является движение маятника. После сильного толчка маятник может продолжать вращение. Это так, даже если временной интеграл крутящего момента (другими словами, электрическое поле $\propto \delta B$) равен нулю: правый толчок приведет маятник в колебание, а синхронизированный левый толчок может преобразовать отклонение маятника в постоянное вращение.

Ранее мы видели, что осесимметричные кластерные оболочки слабо связаны. Это позволяет приводить их во вращение независимо без разрушения узла достаточно малым крутящим моментом.

Рассмотрим осесимметричный кластер в вихревом электрическом поле с крутящим моментом $M(t)$. Оболочки испытывают периодический по углу потенциал. Предположим, что все оболочки, кроме одной, неподвижны. Это можно сделать, если затормозить их вращение слегка асимметричным внешним потенциалом. Мы будем рассматривать различные функции $M(t)$. Во-первых, это поле, обусловленное $B(t)$, с постоянными начальными и конечными значениями, как при рассмотрении твердотельного вращения кластера. Из рассмотрения твердого вращения видно, что допускается и дифференциальное вращение.

Движение оболочки определяется нелинейным уравнением для угла оболочки $\varphi(t)$, зависящим от крутящего момента, приложенного к этой оболочке $M(t)$:

$$J\ddot{\varphi} + A \sin\varphi = M(t). \tag{3}$$

Член $A \sin\phi$ представляет собой периодическую по углу ϕ силу со стороны других (неподвижных) оболочек, величина J здесь есть момент инерции оболочки, $M \propto J$. Уравнение (3) не имеет общего аналитического решения.

На рисунке 6 показано численное решение φ для $M(t) = 2(\exp(-(t-t_1)^2/t_3^2) - \exp(-(t-t_2)^2/t_3^2))$, при $t_1 = 10$, $t_2 = 15$, $t_3 = 1$, что соответствует пику с провалом. $M(t)$ антисимметрична относительно точки $(t_1 + t_2)/2$. Выбраны начальные условия $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Отсутствие отражения $t \to -t$ необхо-

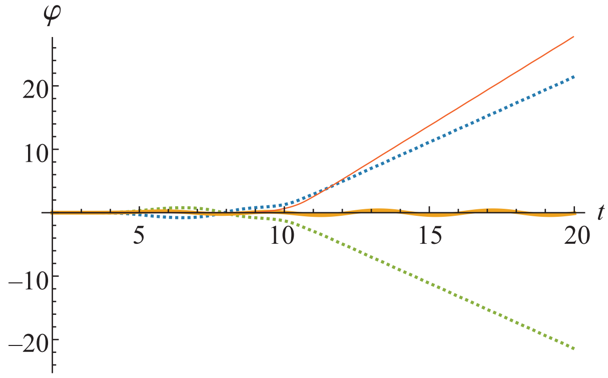

Рис. 6. (Цветной онлайн) Моделирование дифференциального вращения оболочки в соответствии с уравнением (3) при $A = 1$, $M_0 = -1, 0.4, 1$ (пунктирная, толстая, штрихпунктирная) соответственно. Тонкая кривая соответствует одиночному провалу $M(t) = 2\exp(-(t-t_2)^2/t_3^2)$. При малом $|M_0| = 0.4$ угол кластера φ колеблется вблизи минимума энергии. При большем $|M_0|$ кластер после конечного поворота в одну сторону в течение импульса начинает вращаться в противоположном направлении, определяемом знаком M_0

димо для получения постоянного вращения после импульса.

Для сравнения мы привели также результат для $M(t) = -2\exp(-(t-t_2)^2/t_3^2)$ и $B(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, $B(t) \to B(\infty)$ в точке $t \to \infty$. Этот случай аналогичен рассмотренному выше случаю твердого вращения.

Таким образом, стационарное вращение оболочки может быть вызвано изменением магнитного поля от одного значения при $t = -\infty$ до другого при $t = \infty$, либо несимметричным во времени импульсным возмущением $B(t)$, в том числе, с нулевым интегралом по времени.

Однонаправленное вращение, вызванное импульсным полем с нулевым средним, в некотором смысле аналогично фотогальваническому эффекту. В рассматриваемом здесь случае и временная, и пространственная обратимость нарушается самим внешним крутящим моментом. Роль процесса релаксации заключается в остановке послеимпульсного движения. В то же время в случае фотогальванического эффекта рассеяние необходимо для нарушения обратимости времени.

Следует подчеркнуть, что это возмущение должно быть достаточно сильным, чтобы преодолеть барьеры вращения.

Заметим, что если импульсы периодические, то момент M получит стационарный вклад, пропорциональный времени релаксации.

Трение вращающегося кластера. В предыдущем разделе не учитывалось трение вращающегося кластера.

Для изучения трения кластера необходимо понять, каковы его источники. Во-первых, кластер представляет собой массивный объект. Следовательно, его трение отличается от одиночных частиц. В случае одиночных электронов они рассеиваются на фононах, примесях или других электронах. Трение массивного кластера может происходить за счет фононов, если он имеет сверхзвуковую скорость. При температуре T тепловая скорость равна $\sqrt{T/Nm}$, то есть мала, когда N велико, и испускания фононов не происходит.

Электроны в твердых телах обычно рассеиваются заряженными примесями. В отличие от этого, в кластере при низкой температуре относительное движение электронов заморожено и рассеяние одиночных электронов на примеси не происходит; вместо этого кластер при низкой температуре останавливается, минимизируя энергию кулоновской и параболической ям. Таким образом, мы приходим к выводу о поиске нетрадиционных источников трения. Одним из них являются омические потери в металлическом затворе.

Трение может быть небольшим. Однако для достаточно большого кластера линейная скорость окружности кластера достигает очень большого значения. Например, при $R = 10^{-3}$ см, $B(-\infty) = 0$, $B(\infty) = 1$ Тл получаем $\Omega = 8.8 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}$ и $\Omega R = 8.8 \cdot 10^7$ см/с. Очевидно, что на самом деле такое быстрое вращение будет ограничено трением.

На самом деле есть много разных способов затормозить это вращение. Кластер большой массы, очевидно, будет оказывать сильное сопротивление своему поступательному движению. Например, для твердого ДВК, кулоновское рассеяние большого заряженного кластера на примесях растет пропорционально квадрату заряда кластера и его массы (из-за плотности состояний). Это дает зависимость вероятности рассеяния кластера $\propto N^3$. В сравнении, акустическое рассеяние растет слабее, как N из-за плотности состояний. Аналогичное поведение ожидается и для вращения кластера. С другой стороны, удаленность проводящего слоя от двумерного уменьшает омические потери.

Ниже мы рассмотрим трение, вызванное омическими потерями в металлическом затворе.

Пусть дебаевский радиус r_D в затворе меньше его толщины. Любой электрон на расстоянии d от затвора индуцирует поверхностную плотность заряда n_s в точке поверхности затвора $\boldsymbol{\rho}$ (ниже точки в металлическом затворе, считая от его поверхности $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$):

$$en_s = -\frac{ed}{4\pi[(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_i)^2 + d^2]^{3/2}}.$$

При движении этот электрон со скоростью $\mathbf{v}_i$ создает переменную поверхностную плотность заряда. Уравнение непрерывности дает вертикальную плотность тока на металлической поверхности $j_z = -e\dot{n}_s$. Плотность тока в металле подчиняется уравнению $\nabla\mathbf{j} = 0$. Пусть теперь r_D меньше расстояния между электронами в кластере. Тогда потенциал индуцированного тока будет удовлетворять уравнению

$$\sigma\Delta\phi = 0 \tag{4}$$

с граничным условием $\sigma\partial\phi/\partial z = e\dot{n}_s$, где σ – проводимость материала затвора. Решение уравнения (4) имеет вид

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{e[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_i]\boldsymbol{\rho}}{\sigma((\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_i)^2 + (z+d)^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ – трехмерная координата, $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловой скорости. Мощность тепловыделения $Q = \int d^2\boldsymbol{\rho} j_z \phi$, После замены получаем

$$Q = \frac{3e^2 d}{\sigma} \int d^2\boldsymbol{\rho} \frac{[\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}_i]_z^2}{((\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_i)^2 + d^2)^4}. \tag{5}$$

Если d много больше межэлектронного расстояния в кластере, заряды изображений не перекрываются и электроны испытывают независимые аддитивные моменты силы трения. Сила трения $\mathbf{F}_{fr}$ при одноэлектронном поступательном движении определяется соотношением $Q = \mathbf{F}_{fr}\mathbf{v}$. При вращении линейная скорость i-й частицы $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i$ – скорость. Вычисляя интеграл в уравнении (5), получаем $\mathbf{F}_{fr} = \frac{\pi e^2}{2\sigma d^3}\mathbf{v}$. Уравнение поступательного движения одного электрона имеет вид $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{fr}/m = \mathbf{v}/\tau_{fr}$. Тогда роль времени релаксации играет величина $\tau_{fr} = 2m\sigma d^3/\pi e^2$.

Для установившегося вращения, приравнивая Q к потерям на трение $M_{fr}\boldsymbol{\Omega}$, где M_{fr} – нормальная составляющая момента трения, получаем $M_{fr} = Q/\Omega$. Момент трения выражается через τ_{fr}: $M_{fr} = J/\tau_{fr}$.

Уравнение свободного вращения кластера с учетом трения имеет вид $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}/\tau_{fr}$. Оценка при $\sigma = 5 \times 10^7$ см/м, $m = 10^{-30}$ кг, $d = 10^{-8}$ м дает $\tau_{fr} \sim 10^{-9}$ с.

В более общем случае поля от разных электронов перекрываются и трение содержит интерференционный вклад. Мы изучим этот случай в другом месте.

Выводы. Мы исследовали структуру двумерного вигнеровского кластера. Мы обнаружили, что благодаря своей жесткости кластер в аксиально-симметричной потенциальной яме может быть приведен во вращение за счет вихревого электрического поля в переменном магнитном поле. Было показано, что после включения магнитного поля кластер начинает вращаться с угловой скоростью, равной половине конечной циклотронной частоты одиночного электрона. Примечательно, что эта скорость не зависит от структуры кластера.

Без магнитного поля свободное вращение кластера ограничено центробежным расширением до бесконечности, когда центробежная сила превышает притяжение гармонической ямы. Было показано, что в достаточно сильном магнитном поле приведенный во вращение первоначально неподвижный кластер начнет сжиматься, сохраняя свою форму (все относительные расстояния между электронами).

При дальнейшем увеличении магнитного поля может происходить периодический полный коллапс кластера. Это объясняется тем, что, в пренебрежение межэлектронным взаимодействием по сравнению с магнитным полем, циклотронные орбиты свободных электронов, приведенных в движение вихревым электрическим полем, через циклотронный полупериод пройдут вблизи центра кластера (и повторят прохождение через центр еще через период). При сжатии роль межэлектронного взаимодействия увеличивается, электроны начинают рассеиваться друг на друге, возникает картина хаотического движения – структура кластера разрушается.

Вращение кластера может быть остановлено трением. Нами обнаружен новый механизм вращательного трения кластеров, а именно, трение, вызванное наведенными омическими токами. Из-за большого заряда кластера мы ожидаем, что этот механизм будет преобладающим.

Помимо указанного источника трения, твердое движение кластера может сопровождаться возбуждением колебательных мод. Квантование плазмонов приводит к порогу возбуждения: энергия вращения кластера $J\Omega^2/2$ должна превышать минимальную энергию колебаний $\hbar\omega_{\min}$. Это подавляет плазмонный механизм трения при низкой температуре. Мы оставляем рассмотрение этого эффекта для будущих публикаций.

Мы не учли квантовые эффекты, в том числе электронное квантование и спиновую подсистему, также оставив эти эффекты на будущее.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 20-02-00622).

1. E. P. Wigner, Trans. Faraday Soc. **34**, 678 (1938).
2. А. В. Чаплик, ЖЭТФ **35**, 395 (1972).
3. P. M. Platzman and H. Fukuyama, Phys. Rev. B **10**, 3150 (1974).
4. А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **31**, 275 (1980).
5. C. C. Grimes and G. Adams, Phys. Rev. Lett. **42** 795 (1979).
6. R. C. Ashoori, Nature **379**, 413 (1996).
7. C. Yannouleas and U. Landman, Phys. Rev. Lett. **82**, 5325 (1999).
8. R. Egger, W. Häusler, C. H. Mak, and H. Grabert, Phys. Rev. Lett. **82**, 3320 (1999).
9. Mehrdad Mahmoodian and M. V. Entin, J. Phys. Conf. Ser. **2227**, 012012 (2022).
10. Ю. Е. Лозовик, УФН **153**, 356 (1987).
11. V. M. Bedanov and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **49**, 2667 (1994).
12. V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **51**, 7700 (1995).
13. A. V. Filinov, M. Bonitz, and Yu. E. Lozovik, Phys. Rev. Lett. **86**, 3851 (2001).
14. R. Chitra, T. Giamarchi, Eur. Phys. J. B **44**, 455 (2005).
15. Y. P. Chen, G. Sambandamurthy, Z. H. Wang, R. M. Lewis, L. W. Engel, D. C. Tsui, P. D. Ye, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Nat. Phys. **2**, 452 (2006).
16. N. D. Drummond, and R. J. Needs, Phys. Rev. Lett. **102**, 126402 (2009).
17. Y. P. Monarkha and V. E. Syvokon, Low Temp. Phys. **38**, 1067 (2012).
18. M. Zarenia, D. Neilson, B. Partoens, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **95**, 115438 (2017).
19. I. Shapir, A. Hamo, S. Pecker, C. P. Moca, Ö. Legeza, G. Zarand, and S. Ilani, Science **364**, 870 (2019).
20. E. C. Regan, D. Wang, C. Jin et. al. (Collaboration), Nature **579**, 359 (2020).
21. B. Padhi, R. Chitra, and P. W. Phillips, Phys. Rev. B **103**, 125146 (2021).
22. T. Smolenski, P. E. Dolgirev, C. Kuhlenkamp, A. Popert, Y. Shimazaki, P. Back, X. Lu, M. Kroner, K. Watanabe, T. Taniguchi, I. Esterlis, E. Demler, and A. Imamoglu, Nature **595**, 53 (2021).
23. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс, *Феймановские лекции по физике. Электродинамика*, АСТ, М. (2020), т. 4, гл. 17, п. 4, 352 с.