Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 11, с. 685 – 691 © 2022 г. 10 июня

Сверхизлучательный фазовый переход в микроструктурах с комплексной сетевой архитектурой

А. Ю. Баженов[1)], М. М. Никитина, А. П. Алоджанц

Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (ИТМО), 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 25 марта 2022 г.
После переработки 17 апреля 2022 г.
Принята к публикации 26 апреля 2022 г.

В настоящей работе предложена новая концепция топологической организации микроструктур, поддерживающих сверхсильное взаимодействие двухуровневых систем с фотонным полем и обладающих топологией сети (графа) со степенным распределением степени узлов. В рамках теории среднего поля изучен фазовый переход к состоянию сверхизлучения, который приводит к образованию двух дисперсионных ветвей поляритонов и сопровождается появлением ненулевой макроскопической поляризацией двухуровневых систем. Выявлено, что специфика поведения такой системы зависит от статистических характеристик сетевой структуры, а именно, от нормированного второго момента $\zeta \equiv \langle k^2\rangle/\langle k\rangle$ распределения степеней узлов. Показано, что частота Раби может быть существенно увеличена в аномальном режиме сетевой структуры, где ζ значительно возрастает. Многомодовая (волноводная) структура взаимодействия вещества и поля в этом режиме может приводить к установлению сверхсильной связи, которая в основном и обеспечивает возникновение высокотемпературного фазового перехода.

DOI: 10.31857/S1234567822110027, EDN: ikzyof

Повышение эффективности взаимодействия светового излучения с веществом является одной из принципиальных проблем современных квантовых технологий, см., например, [1]. Доступные в настоящее время материалы позволяют осуществлять сильную, а также сверхсильную связь при таком взаимодействии [2]. Сильная связь вещества и поля предполагает периодический обмен энергией между двухуровневыми системами (ДУС), которыми служат атомы, квантовые точки, экситоны и т.д., и квантованным полем резонатора [3–5].

Режим сильной связи возникает, если однофотонная частота Раби $2g_0$ преобладает над спонтанным распадом, скоростями дефазировки и потерями в резонаторе; современные эксперименты с холодными атомами позволяют наблюдать вакуумное расщепление Раби, достигаемое с помощью одного атома (см., например, [3]). Однако на практике улучшение параметра коллективной связи материи и поля представляет собой более важную насущную задачу для квантовой информации, которая использует различные физические системы обработки и передачи квантовой информации, см. [6, 7]. Частота расщепления Раби в этом случае зависит от параметра коллективной связи ДУС и поля $g = \sqrt{N}g_0$, который демонстрирует увеличение параметра взаимодействия поля с веществом в $\sqrt{N}$ раз; N – это количество ДУС, взаимодействующих с одномодовым полем резонатора. В этом случае эффективный спин Дике, который можно приписать ансамблю ДУС, ведет себя как гигантский квантовый осциллятор, эффективно связанный с одной квантованной модой, что описывается параметром g, см. [8].

С недавних пор усилия исследователей направлены на получение (коллективного) режима сверхсильной связи ДУС с полем резонатора, ср. с [2, 9, 10]. В частности, сверхсильная связь образуется в результате одного обхода традиционного резонатора Фабри–Перо при коллективном взаимодействии ансамбля ДУС с квантованным (многомодовым) полем, см. [2, 9, 11, 12].

С другой стороны, малый объем резонатора, а также большой дипольный момент ДУС позволяют получать достаточно большие значения коллективного параметра связи g, или даже g_0, которые могут быть сопоставимыми с частотой ω_{ph} поля резонатора, т.е. $g_0/\omega_{ph} \simeq 0.01 \div 0.1$ [1]. Сверхсильный режим со значением $g_0/\omega_{ph} \equiv 0.12$ был экспериментально реализован с потоковыми сверхпроводящими кубитами, взаимодействующими с модой резонатора, образованного линией передачи (*transmission line resonator*) в микроволновом диапазоне частот [10].

1)e-mail: b.a.y@mail.ru

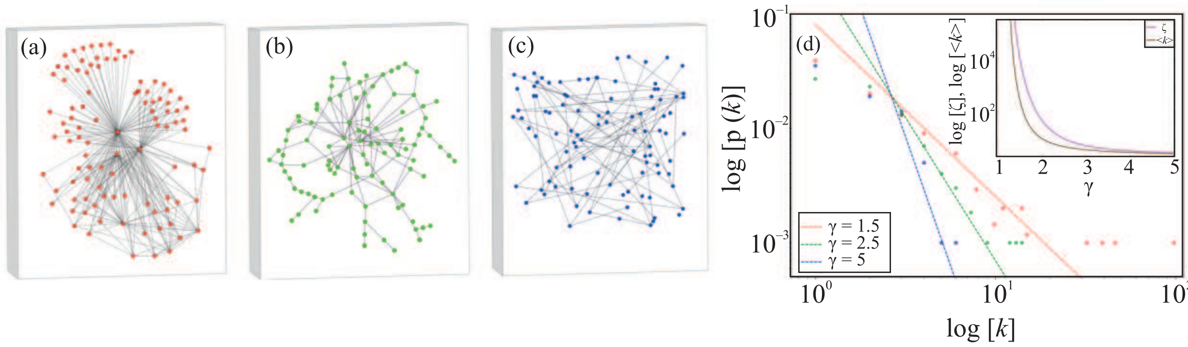

Рис. 1. (Цветной онлайн) Образцы сетевых структур, обладающих степенным законом распределения степени узлов для: (a) – $\gamma = 1.5$, (b) – $\gamma = 2.5$ и (c) – $\gamma = 5$, которые соответствуют $p(k) \propto k^{-\gamma}$ для распределения степеней узлов (фотонных каналов) представленных на (d) в двойном логарифмическом масштабе соответственно. Вставка в (d) показывает зависимость $\langle k\rangle$ и ζ от γ (в логарифмическом масштабе по оси ординат) для сетевой архитектуры с количеством узлов $N = 100$ и $k_{\min} = 2$

Получение сверхсильной связи поля с атомными, или полупроводниковыми ДУС является важной и очень сложной задачей, поскольку величина g_0/ω_{ph} весьма мала и составляет 10^{-6} и 10^{-3} в имеющихся экспериментах, соответственно ср. с [3, 13].

В данной работе для решения проблемы реализации сверхсильной связи квантованного поля и вещества впервые предлагается использовать вполне определенные топологические свойства сетевых структур. А именно, мы предлагаем организовать искусственную структуру (материал) в виде графа (сети), позволяющего осуществить сверхсильную связь между коллективным спином ДУС, расположенных в узлах, и модами волноводов, являющихся ребрами графа, ср. с [14]. При этом полагаем, что топология такого графа (сети) подчиняется степенному закону распределения степени узлов (СРСУ), который хорошо известен в информационных науках при исследованиях различных информационных процессов в реальных сетях [15]. В частности, хабы, которые могут возникать в таких сетях, обеспечивают гораздо более быстрое и надежное распространение информации [16].

Основной задачей работы является определение степени влияния архитектуры сети на величину расщепления Раби и возникновения высокотемпературного фазового перехода в сверхизлучающее (СИ) состояние.

В литературе явление сверхизлучения, как правило, обсуждается в двух предельных случаях. А именно, СИ рассматривают в существенно неравновесных системах ДУС и поля при реализации определенных условий на характерные времена релаксационных, а также коллективных процессов в среде, см., например, [17–20]. Во-вторых, рассматривается сверхизлучение как результат фазового перехода второго рода, происходящего в термодинамически равновесной системе ДУС и квантованного поля, см. например, [21, 22]. Разумеется, в общефизическом контексте такое деление весьма условно, поскольку достижения полного термодинамического равновесия в среде ДУС и квантованного поля невозможно добиться практически. Однако в ряде случаев все же удается получить связанные состояния атомных или экситонных систем и квантованного поля, близкие по своим свойствам к термодинамически равновесным, способные демонстрировать коллективные эффекты сверхизлучения и/или Бозе-Эйнштейновской конденсации (БЭК), ср. с [13, 23, 24]. В этом случае необходимо сперва приготовить среду и поле для наблюдения фазового перехода, в котором уже небольшие релаксационные процессы существенного влияния на саму суть эффекта не оказывают. Такая процедура физически основана на термализации связанных состояний вещества и поля, при которой учет релаксационных процессов играет важную роль, см., например, [25, 26]. В эксперименте рассматриваемый фазовый переход хорошо различим от существенно неравновесных фазовых переходов (например, лазерной генерации), которые могут иметь место в той же системе, но при других параметрах накачки, разности населенностей ДУС и т.д., см., например, [13, 27]. В данной работе речь пойдет именно о термодинамически равновесном фазовом переходе к СИ в топологической модели взаимодействия ДУС с квантованным излучением, которая может быть реализована с помощью различных физических систем, обладающих определенной спецификой в достижении термализации. Исследование такой специфики представляет самостоятельную как теоретическую, так и экспериментальную задачу, и именно в силу своей масштабности выходит за рамки этой работы.

Предлагаемая здесь модель состоит из N локализованных ДУС, занимающих узлы графа, как показано на рис. 1, и находящихся в термодинамически равновесном состоянии при температуре T. Любой j-й узел обладает некоторым количеством ребер, которые связывают его с другими узлами. Количество ребер, которые принадлежат любому j-му узлу может быть охарактеризовано степенью этого узла k_j.

Физически материал с архитектурой графа на рис. 1 может быть воссоздан разными путями. Например, в качестве ДУС можно взять двухуровневые нейтральные атомы, которые можно удерживать на поверхности двумерной (фотонокристаллической) структуры с помощью эффекта Казимира–Полдера [28]. В этом случае соответствующие потенциалы удержания отдельных атомов, образованные Ван-дер-Ваальсовыми силами притяжения, фактически формируют сеть микрорезонаторов, ср. с [29]. Связь между атомами можно организовать с помощью той же (фотонокристаллической) системы волноводов [30], или, например, использовать технологию прямой лазерной записи волноводных структур, которая в настоящее время широко используется для создания квантовых (фотонных) чипов, см., например, [31]. В этом случае ребрами графа являются волноводы, которые на практике допускают сверхнизкие потери на уровне 0.1 дБ/см. Еще один метод приготовления рассматриваемых не периодических структур основан на использовании индуцируемых лазерным излучением микроловушек для ансамбля холодных нейтральных атомов, см. например, [32–34].

Другой способ разработки микроструктуры с сетевым интерфейсом может быть основан на существующих (технологических) возможностях управления топологией экситон-поляритонов в полупроводниковых микрорезонаторах Фабри–Перо с большой добротностью [35]. Эти возможности весьма разнообразны физически и направлены на модификацию общего микрорезонатора с получением требуемых топологических характеристик. Альтернативно, можно создать сеть микростолбиков (*micropillars*), которые представляют из себя микрорезонаторы с квантовыми точками и могут быть размещены в узлах графа, как это показано на рис. 1. Рассматриваемые здесь искусственные материалы представляют большой интерес с точки зрения исследований различных фазовых переходов, а также БЭК экситон-поляритонов, которая может происходить при высоких температурах.

Наконец, еще один многообещающий способ реализации графов, изображенных на рис. 1, связан с технологиями волоконной оптики, которые позволяют проектировать метасети для целей квантовой коммуникации и квантового Интернета, см. [36, 37].

Гамильтониан H, описывающий взаимодействие фотонного поля с системой ДУС в рамках графовой структуры волноводов на рис. 1 имеет следующий вид:

$$H = \hbar\sum_{i}^{N}\frac{\omega_{0,i}\sigma_i^z}{2} + \hbar\omega_{ph}\frac{1}{N}\sum_{i}^{N}\sum_{v}^{k_i} a_v^\dagger a_v + \\ + \frac{\hbar g}{\sqrt{N}}\sum_{i}^{N}\sum_{v}^{k_i}\left(a_v\sigma_i^+ + a_v^\dagger\sigma_i^-\right), \quad (1)$$

где $a_v(a_v^\dagger)$ – оператор уничтожения (рождения) фотона моды v-го волновода, σ_i^z – оператор инверсии населенности для i-й ДУС, $\omega_{0,i}$ – резонансная частота перехода ДУС с основного в возбужденное состояние, g – это константа связи ДУС с фотонным полем, имеющим частоту ω_{ph} (далее для удобства записи формально полагаем $\hbar = k_B = 1$, для постоянных Планка и Больцмана, соответственно). Гамильтониан (1) коммутирует с оператором, характеризующим число возбуждений $N_{ex,i}$ i-го узла, который определяется как

$$N_{ex,i} = \sum_{i}^{N}\frac{\sigma_i^z}{2} + \sum_{v}^{k_i} a_v^\dagger a_v. \quad (2)$$

В работе мы используем приближение среднего поля в рамках термодинамического подхода большого канонического ансамбля, который подразумевает наличие отличного от нуля химического потенциала μ; его можно учесть, проведя в (1) замены $\Omega_{0,i} = \omega_{0,i} - \mu$ и $\Omega_{ph} = \omega_{ph} - \mu$, см. [38]. Кроме того, предполагаем, что все фотонные моды находятся в когерентных состояниях $|\alpha_v\rangle$, определяемых соотношением $a_v|\alpha_v\rangle = \alpha_v|\alpha_v\rangle$, где α_v принимаются действительными и равными для всех узлов. Такое приближение оправдано, если моды сильно перекрываются и обладают схожими физическими характеристиками, ср. с [22]. Усреднив (1) по когерентным состояниям $|\alpha_v\rangle$, получим:

$$H = \sum_{i}^{N}\frac{\Omega_{0,i}\sigma_i^z}{2} + \Omega_{ph}\langle k\rangle\Lambda^2 + \frac{g\Lambda}{\sqrt{N}}\sum_{i}^{N}\left(\sigma_i^+ + \sigma_i^-\right), \quad (3)$$

где $\Lambda \equiv \alpha_v = \sqrt{N_{ph}}$ есть параметр порядка для (3), N_{ph} – среднее число фотонов в сетевой структуре.

Далее, определим плотность возбуждений $\rho \equiv \equiv \frac{1}{N}\langle \sum_i^N N_{ex,i}\rangle$, которая представляет собой нормированное среднее общее число возбуждений и может быть получена из (2) в виде

$$\rho = \frac{\langle k\rangle \Lambda^2}{N} + \frac{1}{2}S_z, \tag{4}$$

где $S_z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^z\rangle$ – средняя коллективная инверсия населенности. В рамках теории среднего поля статистическая сумма $Z(N,T) = Tr(e^{-\beta H})$ с Гамильтонианом (3) имеет следующий вид:

$$Z(N,T) = e^{-\beta\Omega_{ph}\langle k\rangle\Lambda^2} \prod_i^N 2\cosh\left[\frac{\beta}{2}\sqrt{\Omega_{0,i}^2 + 4\frac{g^2k_i^2}{N}\Lambda^2}\right], \tag{5}$$

где $\beta \equiv 1/T$ – обратная температура. Далее, полагаем, что количество узлов достаточно велико, $N \gg 1$, и структура сети допускает переход к непрерывному распределению $p(k)$. Этот переход требует замены $\frac{1}{N}\sum_i ... \to \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} ...p(k)dk$, где $k_{\min}$ и $k_{\max}$ являются минимальным и максимальным значениями степени узла k, см. [14]. В этом случае с помощью (5) получаем

$$\Omega_{ph} = \frac{g^2}{\langle k\rangle}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k^2}{\Gamma}\tanh\left[\frac{\beta\Gamma}{2}\right]p(k)dk; \tag{6a}$$

$$\rho = \langle k\rangle\frac{\Lambda^2}{N} - \frac{1}{2}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{\Omega_0}{\Gamma}\tanh\left[\frac{\beta\Gamma}{2}\right]p(k)dk, \tag{6b}$$

где $\Gamma \equiv \sqrt{\Omega_0^2 + 4\frac{k^2}{N}g^2\Lambda^2} = \sqrt{\Omega_0^2 + 4k^2g_0^2\Lambda^2}$ и предполагается, что все ДУС идентичны друг другу, так что $\Omega_{0,i} = \Omega_0$ в (6).

Система (6) описывает основные свойства параметра порядка Λ (6a) и плотности возбуждений ρ (6b) в термодинамически равновесном состоянии. Решение (6) включает также нахождение химического потенциала μ для различной топологии сети. В этой связи мы рассматриваем СРСУ-сети, которые определяются функцией распределения $p(k)$, [16]:

$$p(k) = \frac{(\gamma-1)k_{\min}^{\gamma-1}}{k^\gamma}, \tag{7}$$

где γ – показатель степени. Сеть с распределением (7) подчиняется условию нормировки $\int_{k_{\max}}^{+\infty} p(k)dk = = \frac{1}{N}$, согласно которому подразумевается, что сеть с N узлами обладает более чем одним узлом с $k > k_{\max}$. Из (7) также следует, что $k_{\max} = k_{\min}N^{\frac{1}{\gamma-1}}$.

Статистические свойства сети описываются с помощью первого ($\langle k\rangle$) и второго ($\langle k^2\rangle$) моментов для распределения степеней узлов, которые определяются как (ср. с [14]):

$$\langle k^m\rangle = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k^m p(k)dk, \quad m = 1, 2. \tag{8}$$

В работе нас интересует параметр $\zeta = \frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle}$, который определяет основные статистические свойства выбранной сети. Показатель степени γ описывает три различных области, которые определяют основные характеристики для $\langle k\rangle$ и ζ в аномальном ($1 < < \gamma < 2$), безмасштабном ($2 < \gamma < 3$), и случайном ($\gamma > 3$) режимах, соответственно. Свойства сетей, обладающих распределением (7) при $\gamma = 2$ и $\gamma = 3$, рассчитываются отдельно.

На рисунке 1a–c приведены примеры сетевых структур, смоделированных численно, которые относятся к аномальному (рис. 1a), безмасштабному (рис. 1b), и случайному (рис. 1c) режимам соответственно. В настоящее время существуют различные алгоритмы генерации таких сетей с распределением, близким к (7), см., например, [16]. Так как число узлов на практике всегда ограниченно ($N = 100$ для рис. 1), то конечное (получаемое численно) распределение степени узлов будет дискретным; оно характеризуется точками на рис. 1d, которые описывают вероятности того, что узлы сетей на рис. 1a–c будут иметь степени вершин, соответствующих данной вероятности. На рисунке 1d совокупность этих точек аппроксимирована соответствующими пунктирными линиями, которые определяются из (7) при заданном γ (эти линии соответствуют логарифмическим зависимостям для (7), приведенным по осям абсцисс и ординат соответственно).

Ключевым фактором поведения сетей на рис. 1a–c является наличие хабов, которые четко видны в виде нескольких точек, расположенных в правом углу рис. 1d. Самый большой узел описывается степенью $k_{\max}$. Сеть в аномальном режиме, как правило, демонстрирует максимальное количество хабов, см. рис. 1a. Напротив, в случайном режиме свойства СРСУ-сети близки по своим характеристикам к сети, которая описывается распределением Пуассона для $p(k)$; с ростом γ количество хабов уменьшается, см. синюю линию на рис. 1d.

На рисунке 2 представлены самосогласованные численные решения (6) для параметра порядка Λ

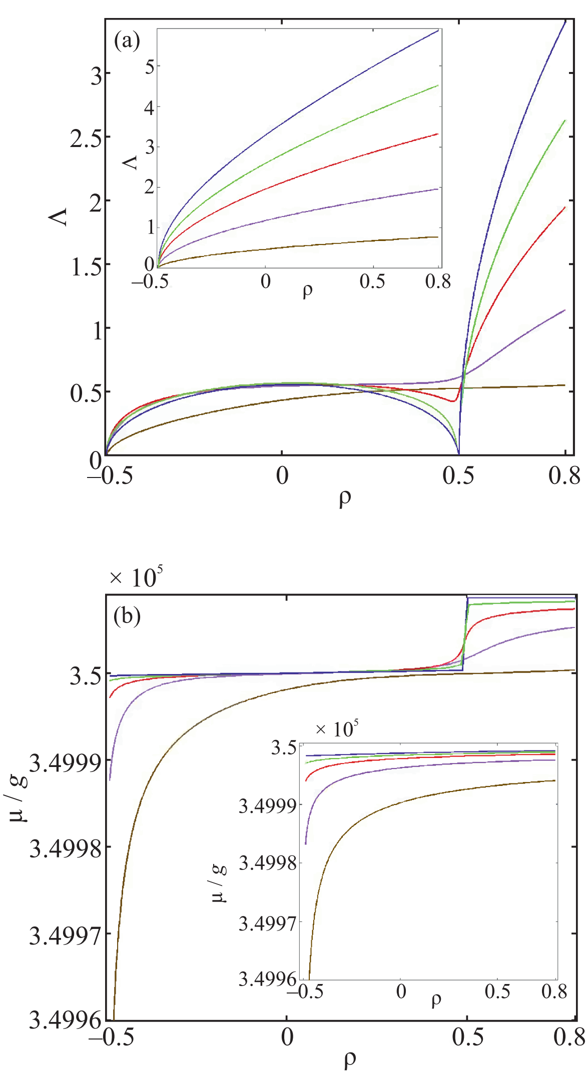

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость (a) – параметра порядка Λ, и (b) – нормированного химического потенциала μ/g от плотности возбуждений ρ при нормированной отстройке $\Delta/g = 9$ для $\gamma = 1.5$ (коричневый), $\gamma = 1.7$ (фиолетовый), $\gamma = 2$ (красный), $\gamma = 2.5$ (зеленый) и $\gamma = 4.5$ (синий). На вставках приведены зависимости для резонансного случая с $\Delta = 0$. Другие параметры: $\omega_0/g = 3.52 \cdot 10^5$, $N = 100$, $k_{\min} = 2$, $T = 0$

(рис. 2a) и нормированного на g химического потенциала μ (рис. 2b) как функции плотности возбуждений ρ для двух различных значений нормированной также на g отстройки $\Delta \equiv \omega_{ph} - \omega_0$ частоты поля в пределе нулевой температуры, $T \to 0$. Для численных оценок на рис. 2 в качестве ДУС взяты атомы цезия с переходом, соответствующем D_2 линии на частоте $\omega_0/2\pi \simeq 352$ ТГц [7, 20, 30]. В настоящее время удается экспериментально обеспечить сильную связь с квантованным излучением для таких атомов, локализованных на поверхности твердых сред, ср. с [29, 30]. Для расчетов нами использовалось значение $g/2\pi = 1$ ГГц, соответствующее микроструктуре на рис. 1, содержащей $N = 100$ атомов.

Как видно из рис. 2a, Λ-параметр растет с ρ в условиях резонанса $\Delta = 0$.

Выражение для химического потенциала достаточно просто получить аналитически в пределе высоких температур $\beta \to 0$. В этом случае из (6) имеем

$$\mu_{1,2} = \frac{\omega_{ph} + \omega_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 - 8g^2\zeta\left(\rho - \frac{\langle k\rangle}{N}\Lambda^2\right)}. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет один из основных результатов данной работы. Оно устанавливает верхнюю (μ_1) и нижнюю (μ_2) ветви возбуждений системы связанных состояний квантованного поля и вещества, ср. с [39]. Выражение (9) позволяет также определить условие сильной связи.

В пределе малой плотности возбуждений можно положить $\Lambda \to 0$, $S_z \simeq -1$, что подразумевает $\rho \simeq -0.5$, т.е. ансамбль ДУС безинверсионный. При этом (9) описывает две поляритонные ветви, которые могут быть получены, например, с экситон-поляритонами в полупроводниковых микрорезонаторах, ср. с [13].

При $\rho = 0$ ДУС достигает насыщения, когда число частиц на нижнем и верхнем уровнях равно друг другу, $S_z \simeq 0$.

В пределе $\rho > 0$ имеем инверсию населенностей в ДУС, которая максимальна при $\rho = 0.5$ ($S_z = 1$). Примечательно, что при наличии большой отстройки Δ ансамбль ДУС претерпевает структурный переход к другому (параметрическому) типу возбуждений, которые присущи сильному усилению излучения, происходящему при $\rho > 0.5$, см. рис. 2 и [38].

Условие достижения такого перехода может быть найдено из (9) и представлено в виде $|\Delta| > 2g\sqrt{\zeta}$. На рис. 2 это неравенство не выполняется для коричневой кривой, что соответствует возрастающему значению ζ при $\gamma = 1.5$.

Из (9) следует, что частота расщепления Раби (последний член в (9)) существенно возрастает в зависимости от ζ в аномальном режиме изменения показателя степени γ, см. вставку на рис. 1d. Таким образом, можно усилить коллективное взаимодействие ДУС с квантованным полем, выбрав соответствующую γ, которая определяет топологию системы, представленную на рис. 1.

Фазовый переход в состояние СИ может быть определен из (6), полагая $\Lambda = 0$. Критическая температура фазового перехода T_c относительно просто выглядит для поляритонов нижней дисперсионной ветви при $\Delta = 0$ и имеет вид

$$T_c = \frac{\sqrt{-8g^2\zeta\rho}}{4\tanh^{-1}(2\rho)}. \qquad (10)$$

Выражение (10) демонстрирует другой важный результат работы. Из (10) видно, что критическая температура СИ фазового перехода T_c пропорциональна $\sqrt{\zeta}$, т.е. определяется топологией структуры на рис. 1. Примечательно, что в модели Изинга со спин-спиновым взаимодействием, характеризуемым функцией распределения (7), температура фазового перехода конечна и пропорциональна ζ-параметру, см. [14].

Как видно из (10), при $\rho \simeq 0$ критическая температура $T_c \to \infty$. Этот предел соответствует насыщению ДУС. Из (10) следует, что температура СИ фазового перехода T_c может быть очень высокой даже в пределе малой плотности возбуждений из-за статистических свойств самой сети, которые учитываются в (10) с помощью параметра ζ, и который, в свою очередь, может быть весьма большим в аномальном режиме – см. вставку на рис. 1d.

Для заданной температуры T в диапазоне изменения плотности возбуждений $-0.5 < \rho < 0$, т.е. для безинверсной ДУС соотношение (10) определяет критическое значение параметра ζ_c

$$\zeta_c = \frac{2T^2[\tanh^{-1}(2\rho)]^2}{|\rho|g^2}, \qquad (11)$$

устанавливающего статистические свойства сети, когда происходит СИ фазовый переход. В частности, сверхизлучательная фаза существует при $\zeta \geq \zeta_c$. Поведение параметра порядка в области достаточно больших ζ и высоких температур может быть получено из (6b) в виде

$$\Lambda \simeq \sqrt{\frac{N_c x_c}{\langle k_c\rangle}\left(\frac{x}{x_c}-1\right)}, \qquad (12)$$

где $x \equiv \frac{\beta g}{4}\sqrt{2\zeta|\rho|}$ представляет собой комбинацию ключевых параметров связанной системы поля и ДУС; x_c характеризует эту же комбинацию в точке фазового перехода при $\zeta = \zeta_c$. Выражение (12) демонстрирует характерную для фазовых переходов второго рода зависимость исчезновения числа фотонов СИ вблизи точки фазового перехода.

Проведем оценки достижимости условий как сильной, так и сверхсильной связи ДУС с квантованным полем для микроструктур с сетевой архитектурой на рис. 1. В пределе возбуждений малой плотности (при выполнении неравенства $\langle k\rangle\Lambda^2/N \ll 1$) с помощью (9) такое условие можно представить в виде:

$$\Gamma, \kappa \ll g\sqrt{\zeta} \lesssim \omega_{ph}, \qquad (13)$$

где κ и Γ характеризуют возможные потери фотонов и скорость деполяризации соответственно, ср. с [1]. В (13) левая часть неравенства характеризует условие сильной связи, а правая – сверхсильной.

Выполнение условий (13) для микроструктур с сетевой архитектурой на рис. 1 не представляется сложным, учитывая свойства распределения узлов (7), а также поведение параметра ζ, см. вкладку на рис. 1d. В частности, из (13) следует, что для достижения сверхсильной связи достаточно иметь параметры сети, удовлетворяющие, например, оценочному критерию $\zeta \simeq 0.01\omega_{ph}^2/g^2$, ср. с [10]. В аномальном режиме СРСУ-сети обладают большим числом различных каналов взаимодействия ДУС и поля, а также хабов, что может и обеспечить выполнение этого критерия. В этом случае для оценки достижимости сверхсильной связи можно использовать выражение $\zeta = k_{\min}\frac{2-\gamma}{3-\gamma}\frac{N^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}-1}{N^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}-1}$, получаемое из (7), (8). Для атомных структур, анализируемых на рис. 2, показатель степени равен $\gamma = 1.219$ при $k_{\min} = 2$ и $N = 100$. Если же взять за основу микроструктуру с экситон-поляритонами, полученными на основе полупроводниковых квантовых ям GaAs, то величина параметра связи с квантованным полем резонатора будет составлять $g/2\pi = 1$ ТГц на резонансной длине волны $\lambda = 767.3$ нм, что приводит к значению $\gamma = 1.588$ для тех же величин $k_{\min}$, N.

В Заключении предложена новая концепция микроструктур с топологией сети (графа) со степенным распределением степени узлов, который основан на кооперативном когерентном взаимодействии ДУС, занимающих узлы данной сети с квантованным оптическим полем. Показано, что сверхсильный режим взаимодействия может быть реализован благодаря особенностям сетевой архитектуры, обеспечивающей связь ДУС по средством многочисленных волноводных каналов (ребер графа) структуры квантованным полем. Предсказана возможность гигантского усиления коллективного взаимодействия материи и поля в $\sqrt{\zeta}$ раз, который обеспечивается преимущественно в аномальной области распределения степени узлов сетевой структуры. Рассмотрена проблема сверхизлучательного фазового перехода, происходящего в рассматриваемых структурах. Предсказано, что температура фазового перехода существенно зависит от параметра ζ, который определяет статистические свойства (первый и второй моменты распределения степени связанности) сетевой структуры, и может быть очень высокой в пределе малой плотности возбуждений для аномальной области сети. Полученные результаты открывают качественно новые перспективы для обработки квантовой информации сетевыми или сетеподобными системами, а также наблюдение и изучение фазовых переходов с участием поляритонов в микроструктурах с сетевой топологией взаимодействия при достаточно высоких температурах, ср. с [36, 37].

Работа выполнена при поддержке гос. задания # 2019-1339 Министерства науки и высшего образования РФ.

1. A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta, and F. Nori, Nat. Rev. Phys. **1**, 19 (2019).
2. D. Meiser and P. Meystre, Phys. Rev. A **74**, 065801 (2006).
3. A. Boca, R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **93**, 233603 (2004).
4. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa, Phys. Rev. Lett. **69**, 3314 (1992).
5. I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, Rep. Prog. Phys. **74**, 104401 (2011).
6. E. Pelucchi, G. Fagas, I. Aharonovich, D. Englund, E. Figueroa, O. Gong, H. Hannes, J. Liu, C. Lu, N. Matsuda, J. Pan, F. Schreck, F. Sciarrino, C. Siberhorn, J. Wang, and K. Jons, Nat. Rev. Phys. **4**, 194 (2022).
7. E. Vetsch, D. Reitz, G. Sague, R. Schmidt, S. T. Dawkins, and A. Rauschenbeutel, Phys. Rev. Lett. **104**, 203603 (2010).
8. B. M. Garraway, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **369**, 1137 (2011).
9. A. Johnson, M. Blaha, A. E. Ulanov, A. Rauschenbeutel, P. Schneeweiss, and J. Volz, Phys. Rev. Lett. **123**, 243602 (2019).
10. T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, Nature Phys. **6**, 772 (2010).
11. M. N. Sundaresan, Y. Liu, D. Sadri, L. J. Szöcs, D. L. Underwood, M. Malekakhlagh, H. E. Türeci, and A. A. Houck, Phys. Rev. X **5**, 021035 (2015).
12. D. J. Egger and F. K. Wilhelm, Phys. Rev. Lett. **111**, 163601 (2013).
13. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, Rev. Mod. Phys. **82**, 1489 (2010).
14. A. Yu. Bazhenov, D. V. Tsarev, and A. P. Alodjants, Phys. Rev. E **103**, 062309 (2021).
15. M. Newman, *Networks*, Oxford University Press, Oxford (2018), p. 789.
16. A.-L. Barabási, *Network Science*, Cambridge University Press, Cambridge (2016).
17. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, УФН **131** 653 (1980).
18. В. В. Кочаровский, В. В. Железняков, Е. Р. Кочаровская, В. В. Кочаровский, УФН **187**, 367 (2017).
19. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **155** 654 (2019).
20. A. Goban, C. Hung, J. D. Hood, S. P. Yu, J. A. Muniz, O. Painter, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **115**, 063601 (2015).
21. K. Hepp and E. H. Lieb, Ann. Phys. (N.Y.) **76**, 360 (1973).
22. Y. K. Wang and F. T. Hioe, Phys. Rev. A **7**, 831 (1973).
23. I. Yu. Chestnov, A. P. Alodjants, S. M. Arakelian, J. Nipper, U. Vogl, F. Vewinger, and M. Weitz, Phys. Rev. A **81**, 053843 (2010).
24. J. Klaers, J. Schmitt, T. Damm, F. Vewinger, and M. Weitz, Phys. Rev. Lett. **108**, 160403 (2012).
25. M. H. Szymanska, P. B. Littlewood, and B. D. Simons, Phys. Rev. A **68**, 013818 (2003).
26. I. Yu. Chestnov, A. P. Alodjants, and S. M. Arakelian, Phys. Rev. A **88**, 063834 (2013).
27. D. Snoke, Polariton Condensation and Lasing. Springer Series in Solid-State Sciences **172**, 307, Springer, Berlin (2012).
28. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН **73**, 381 (1961).
29. Su-Peng Yu, J. A. Muniz, Chen-Lung Hung, and H. J. Kimble, PNAS **116**, 12743 (2019).
30. C.-L. Hung, S. M. Meenehan, D. E. Chang, O. Painter, and H. J. Kimble, New J. Phys. **15**, 083026 (2013).
31. N. Skryabin, A. Kalinkin, I. Dyakonov, and S. Kulik, Micromachines **1**, 11 (2020).
32. S. Kuhr, National Science Review **3**, 170 (2016).
33. D. Barredo, V. Lienhard, S. de Léséleuc, T. Lahaye, and A. Browaeys, Nature **561**, 79 (2018).
34. D. de Mello, D. Schäffner, J. Werkmann, T. Preuschoff, L. Kohfahl, M. Schlosser, and G. Birkl, Phys. Rev. Lett. **122**, 203601 (2019).
35. C. Schneider, K. Winkler, M. D. Fraser, M. Kamp, Y. Yamamoto, E. A. Ostrovskaya, and S. Höfling, Rep. Prog. Phys. **80**, 016503 (2016).
36. S. Brito, A. Canabarro, R. Chaves, and D. Cavalcanti, Phys. Rev. Lett. **124**, 210501 (2020).
37. S. Lepri, C. Trono, and G. Giacomelli, Phys. Rev. Lett. **118**, 123901 (2017).
38. A. Y. Bazhenov, D. V. Tsarev, and A. P. Alodjants, Physica B: Condensed Matter **579**, 411879 (2020).
39. A. P. Alodjants, I. O. Barinov, and S. M. Arakelian, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 095502 (2010).