Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 12, с. 753 – 761 © 2022 г. 25 июня

Заметки о влиянии КХД и электрослабых поправок на соотношение между полюсными и бегущими массами топ-кварка

А. Л. Катаев[+1)], *В. С. Молокоедов*[+*×∘1)]

[+]*Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

[*]*Научно-исследовательский вычислительный центр, МГУ, 119991 Москва, Россия*

[×]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, 119992 Москва, Россия*

[∘]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 4 мая 2022 г.
После переработки 4 мая 2022 г.
Принята к публикации 11 мая 2022 г.

Приводится аналитическое представление однопетлевой электрослабой поправки к соотношению между полюсными и бегущими в $\overline{\rm MS}$-схеме массами топ-кварка в виде разложения по массам частиц Стандартной Модели в схеме Флейшера–Егерлейнера, где вакуумное среднее хиггсовского поля перенормируется. Подчеркивается важность учета и электрослабых, и КХД эффектов в рассматриваемое соотношение. Отмечается, что в данной схеме пренебрежение электрослабыми поправками приводит к сдвигу на 10 ГэВ в разнице между полюсной и бегущей массами t-кварка. Эта величина существенно превышает современные погрешности значения рассматриваемого соотношения, следующие из обработки данных Тэватрона и БАК.

DOI: 10.31857/S1234567822120023, EDN: imhisx

1. Введение. Масса топ-кварка является важным теоретическим параметром, который извлекается из экспериментальных данных Тэватрона и БАК (см., например, [1] и обзоры [2–4]). Среди различных определений перенормируемых масс топ-кварка наиболее часто используются полюсные и бегущие массы. Полюсная масса M_t определяется в схеме перенормировок на массовой поверхности (on-shell (OS)) из условия наличия полюса перенормированного пропагатора t-кварка в минковской времениподобной области при $p^2 = M_t^2$. Бегущая масса топ-кварка $\overline{m}_t(\mu^2)$, зависящая от масштаба перенормировки μ, определяется в модифицированной $\overline{\rm MS}$-схеме минимальных вычитаний, связанной с процедурой размерной регуляризации.

Полюсная масса – конечная величина, которая, однако, подвержена влиянию больших пертурбативных поправок КХД [5]. Этот эффект связан с проявлением инфракрасных (ИК) ренормалонов [5–7]. Они приводят к тому, что пертурбативные коэффициенты соотношения между полюсной M_t и бегущей массой $\overline{m}_t(\mu^2)$ факториально растут с увеличением порядка теории возмущений (ТВ) в КХД [5–12]. Данная особенность обуславливает асимптотическое поведение ряда ТВ для рассматриваемого соотношения в КХД. В связи с этим, в конкретных физических исследованиях важно знать, когда эта асимптотическая структура начнет проявляться. Оценки вкладов высших порядков ТВ к $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$-отношению в КХД, выполненные в [12] при помощи результатов работы [13], указывают на то, что первые проявления его асимптотической природы наблюдаются только с седьмого порядка ТВ. Однако, в Стандартной Модели (СМ) также необходимо учитывать электрослабые (ЭС) поправки. В OS-схеме они функционально зависят от полюсных масс частиц СМ, таких как топ-кварк, W и Z-бозоны и бозон Хиггса. Эта зависимость от масс особенно важна на масштабе $\mu^2 \sim M_t^2$, где массы M_W, M_Z, M_H несколько меньше M_t. Поэтому, изучение возможной асимптотической структуры $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$-соотношения в ЭС секторе представляется более сложной задачей, чем в случае чистой КХД. Далее мы увидим, что учет этих эффектов может превышать вклады КХД поправок.

В СМ отношение $M_t/\overline{m}_t(\mu^2)$ содержит три типа поправок:

$$\frac{M_t}{\overline{m}_t(\mu^2)} = 1+\delta^{\rm QCD}(\mu^2)+\delta^{\rm EW}(\mu^2)+\delta^{\rm QCD\times EW}(\mu^2), \quad (1)$$

где $\delta^{\rm QCD}$, $\delta^{\rm EW}$, $\delta^{\rm QCD\times EW}$ – КХД, ЭС и смешанные КХД-ЭС вклады ТВ соответственно. Они имеют следующий вид:

1)e-mail: kataev@ms2.inr.ac.ru; viktor_molokoedov@mail.ru

$$\delta^{\rm QCD}(\mu^2)=\sum_{n\geq 1}\delta_n^{\rm QCD}(\mu^2)\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}\right)^n,$$

$$\delta^{\rm EW}(\mu^2)=\sum_{n\geq 1}\delta_n^{\rm EW}(\mu^2)\left(\frac{\alpha(\mu^2)}{4\pi\sin^2\theta_W(\mu^2)}\right)^n, \qquad (2)$$

$$\delta^{\rm QCD\times EW}(\mu^2)=\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\delta_{k,n-k}^{\rm QCD\times EW}(\mu^2)\times$$
$$\times\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}\right)^k\left(\frac{\alpha(\mu^2)}{4\pi\sin^2\theta_W(\mu^2)}\right)^{n-k}. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha_s(\mu^2)=g_s^2(\mu^2)/4\pi$, $\alpha(\mu^2)=e^2(\mu^2)/4\pi$; g_s и e – константы связи калибровочных групп $SU(3)_c$ и $U(1)_{em}$ соответственно, $\sin\theta_W(\mu^2)$ – синус угла Вайнберга. Все эти параметры определены в $\overline{\rm MS}$-схеме. В этом случае зависящие от масштаба коэффициенты $\delta_n^{\rm EW}(\mu^2)$, $\delta_{k,n-k}^{\rm QCD\times EW}(\mu^2)$ являются функциями бегущих масс топ-кварка, заряженных W и нейтральных бозонов Z и H.

В настоящее время КХД поправки $\delta_1^{\rm QCD}$, $\delta_2^{\rm QCD}$, $\delta_3^{\rm QCD}$ и $\delta_4^{\rm QCD}$ известны благодаря вычислениям, выполненным в [14–19] соответственно. Чистые ЭС вклады $\delta_1^{\rm EW}$ [20] и $\delta_2^{\rm EW}$ [21, 22] были получены в аналитическом и полуаналитическом виде соответственно. Смешанная двухпетлевая КХД-ЭС поправка $\delta_{1,1}^{\rm QCD\times EW}$ известна благодаря аналитическим вычислениям, выполненным в [23, 24].

Как уже упоминалось в работах [22–24], электрослабые эффекты не являются пренебрежимо малыми для соотношения между полюсными и бегущими массами топ-кварка в теоретически выделенной *схеме Флейшера–Егерлейнера* (ФЕ) [25]. В этой схеме вакуумное среднее $v(\mu^2)$ хиггсовского поля перенормируется и входит в определение бегущей $\overline{\rm MS}$ массы следующим образом: $\overline{m}_t(\mu^2)=y_t(\mu^2)v(\mu^2)/\sqrt{2}$ (здесь $y_t(\mu^2)$ – бегущая юкавская константа связи топ-кварка). При этом, в однопетлевом приближении ЭС поправка к $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$ превышает $\mathcal{O}(\alpha_s)$ КХД вклад, который имеет противоположный знак: $|\delta_1^{\rm EW}(M_t^2)|\gtrsim|\delta_1^{\rm QCD}(M_t^2)|$. Утверждение о важности учета электрослабых эффектов в различные физические величины ранее было сделано в ряде работ (см. [26–29] и ссылки в них). Похожая ситуация, когда ЭС вклад доминирует над первой ненулевой поправкой КХД, была обнаружена в [26] для ρ-параметра СМ (отношение амплитуд нейтральных и заряженных слабых токов при низких энергиях), а точнее для величины $\Delta\rho=1-1/\rho$, в широкой области значений неизвестной тогда массы бозона Хиггса от 60 ГэВ до 1 ТэВ.

Несмотря на важность ЭС эффектов, мы продемонстрируем, что по факту *они все еще либо недооцениваются, либо вообще не учитываются при переходе от полюсной к бегущей массе топ-кварка* в современной феноменологически ориентированной литературе. На это указывают приведенные ниже явные оценки и ссылки на работы по этой тематике, включая результаты различных коллабораций Тэватрона и БАК, суммируемые в регулярно переиздаваемом сборнике свойств элементарных частиц PDG. В случаях, когда рассматривается переход от M_t к $\overline{m}_t(\mu^2)$, учитываются только эффекты КХД (см., например, экспериментальные работы [30–32]), а ЭС вклады опускаются. Данная работа посвящена обсуждению и разъяснению этой проблемы.

2. Роль электрослабых эффектов.

2.1. Однопетлевой анализ. На однопетлевом уровне пертурбативное соотношение между полюсной и бегущей массами t-кварка в СМ выглядит следующим образом:

$$\frac{M_t}{\overline{m}_t(\mu^2)}=1+\delta_1^{\rm QCD}(M_t^2/\mu^2)\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}+$$
$$+\,\delta_1^{\rm EW}(M_t^2/\mu^2)\frac{\alpha(\mu^2)}{4\pi\sin^2\theta_W(\mu^2)}, \qquad (4)$$

где $\alpha_s(\mu^2)$, $\alpha(\mu^2)$, $\sin^2\theta_W(\mu^2)$ определены в $\overline{\rm MS}$-схеме. Отметим, что мы не будем различать полюсные и бегущие массы частиц в выражениях для $\delta_1^{\rm QCD}(M_t^2/\mu^2)$ и $\delta_1^{\rm EW}(M_t^2/\mu^2)$, поскольку это приводит к превышению рассматриваемой нами однопетлевой точности. То же самое касается и масштабов $\mu^2=M_t^2$ и $\mu^2=\overline{m}_t^2(\overline{m}_t^2)$. Данные утверждения можно наглядно проиллюстрировать на примере решения однопетлевого ренормгруппового (РГ) уравнения, определяющего эффект бега константы связи сильного взаимодействия в случае шести активных ароматов кварков $(n_f=6)$: $\alpha_s(M_t^2)\approx\dfrac{\alpha_s(\overline{m}_t^2)}{1-7\alpha_s(\overline{m}_t^2)/(4\pi)\ln(\overline{m}_t^2/M_t^2)}\approx$ $\approx\dfrac{\alpha_s(\overline{m}_t^2)}{1-7\cdot 0.1/(4\pi)\ln(162.5^2/172.4^2)}\approx\dfrac{\alpha_s(\overline{m}_t^2)}{1+0.0066}\approx$ $\approx\alpha_s(\overline{m}_t^2)$. Пренебрежимо малое число в знаменателе соответствует $\mathcal{O}(\alpha_s)$-поправке к константе связи в однопетлевом приближении.

В данной работе мы будем использовать следующие значения полюсных масс частиц СМ: $M_t\approx$ ≈ 172.4 ГэВ, $M_H\approx 125.10$ ГэВ, $M_W\approx 80.38$ ГэВ, $M_Z\approx 91.19$ ГэВ [1].

Однопетлевая $\mathcal{O}(\alpha_s)$ поправка КХД к отношению $M_t/\overline{m}_t(\mu^2)$ была вычислена много лет назад в [14] и равна:

$$\delta_1^{\rm QCD}=C_F\left(4-3\ln\frac{M_t^2}{\mu^2}\right). \qquad (5)$$

В фундаментальном представлении алгебры Ли калибровочной группы $SU(N_c)$ с количеством цветов

N_c квадратичный оператор Казимира равен $C_F = (N_c^2-1)/(2N_c)$. Для частного случая цветовой группы $SU(3)$, реализуемой в природе, $C_F = 4/3$.

Однопетлевая $\mathcal{O}(\alpha)$ ЭС поправка к отношению $M_t/\overline{m}_t(\mu^2)$ была посчитана в [20] почти три десятилетия назад. В этой работе она была представлена в общей форме, справедливой для произвольного тяжелого кварка. Поскольку в то время масса бозона Хиггса не была известна, эта поправка была вычислена для различных возможных соотношений между массами частиц, дающими вклад в $\delta_1^{\rm EW}$. Также она выражалась через синус и косинус угла слабого смешивания, электрические заряды кварков и третьи компоненты слабого изоспина. Мы используем это представление для случая t-кварка в реальной области масс, где $M_t > M_H/2$, $M_t > M_Z/2$, и выражаем $\delta_1^{\rm EW}$ через полюсные массы топ-кварка, калибровочных бозонов и бозона Хиггса. Это приводит нас к следующему результату[2]:

$$\delta_1^{\rm EW} = \delta_1^{\rm EW,\,(0)} + \delta_1^{\rm EW,\,(L)} \ln\frac{M_t^2}{\mu^2}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1^{\rm EW,\,(0)} = &-\frac{23}{72} - \frac{M_t^2}{M_W^2} + \frac{25}{36}\frac{M_W^2}{M_t^2} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{M_W^2}{M_H^2} + \frac{1}{2}\frac{M_H^2}{M_W^2} - \frac{5}{9}\frac{M_Z^2}{M_t^2} + \frac{4}{9}\frac{M_Z^2}{M_W^2} + \\
&+\frac{17}{72}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_t^2} + \frac{1}{4}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_H^2} - \boxed{N_c\frac{M_t^4}{M_W^2 M_H^2}} + \\
&+\frac{3}{2}\frac{M_W^2}{M_H^2}\ln\frac{M_t^2}{M_W^2} + \frac{1}{16}\frac{M_H^4}{M_W^2 M_t^2}\ln\frac{M_t^2}{M_H^2} - \\
&-\frac{1}{8}\frac{M_t^2}{M_W^2}\ln\frac{M_t^2}{M_t^2-M_W^2} - \frac{1}{4}\frac{M_W^2}{M_t^2}\left(\frac{M_W^2}{M_t^2}-\frac{3}{2}\right) \times \\
&\times \ln\frac{M_W^2}{M_t^2-M_W^2} + \left(\frac{3}{4}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_H^2} + \frac{2}{9}\frac{M_W^2 M_Z^2}{M_t^4} - \right. \\
&\left. -\frac{5}{18}\frac{M_Z^4}{M_t^4} - \frac{3}{16}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_t^2} + \frac{17}{144}\frac{M_Z^6}{M_W^2 M_t^4}\right) \times \\
&\times \ln\frac{M_t^2}{M_Z^2} + \frac{M_Z^2}{M_t^2}\left(\frac{10}{9} + \frac{5}{9}\frac{M_Z^2}{M_t^2} - \frac{8}{9}\frac{M_W^2}{M_Z^2} - \right. \\
&\left. -\frac{7}{72}\frac{M_Z^2}{M_W^2} - \frac{4}{9}\frac{M_W^2}{M_t^2} - \frac{17}{72}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_t^2}\right) \times \\
&\times \left(\frac{4M_t^2}{M_Z^2}-1\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{M_Z}{2M_t}\right) + \\
&+\frac{1}{8}\frac{M_H^4}{M_W^2 M_t^2}\left(\frac{4M_t^2}{M_H^2}-1\right)^{3/2} \arccos\left(\frac{M_H}{2M_t}\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1^{\rm EW,\,(L)} = &\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\frac{M_t^2}{M_W^2} - \frac{1}{3}\frac{M_Z^2}{M_W^2} - \frac{3}{8}\frac{M_H^2}{M_W^2} - \\
&-\frac{3}{2}\frac{M_W^2}{M_H^2} - \frac{3}{4}\frac{M_Z^4}{M_W^2 M_H^2} + \boxed{N_c\frac{M_t^4}{M_W^2 M_H^2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Выражения (7)–(8) приведены в приближении, когда действительно малыми вкладами, связанными с массовыми эффектами [20] лептонов (e,μ,τ) и других более легких кварков (u,d,s,c,b), пренебрегают.

Используя вышеприведенные значения полюсных масс M_t, M_W, M_Z, M_H, мы приходим к следующему численному виду поправки $\delta_1^{\rm EW}$[3]:

$$\delta_1^{\rm EW} = -24.26 + 25.80\ln\frac{M_t^2}{\mu^2}. \tag{9}$$

Обратим внимание на один интересный факт. Наибольшие вклады в выражениях (7)–(8) обусловлены диаграммами, имеющими вид "головастиков", а самые значительные из этих вкладов обведены в рамку. Последние возникают благодаря диаграмме, изображенной на рис. 1, и равны слагаемому

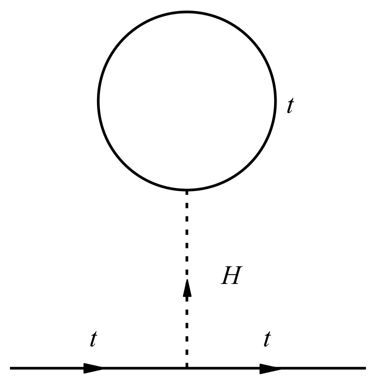

Рис. 1. Однопетлевая вакуумная диаграмма, вносящая наибольший вклад в коэффициент $\delta_1^{\rm EW}$

$N_c M_t^4/(M_W^2 M_H^2) \approx 26.21$, которое практически полностью определяет итоговые значения коэффициентов $\delta_1^{\rm EW,\,(0)}$ и $\delta_1^{\rm EW,\,(L)}$ (см. (9)). Оно содержит три усиливающих множителя: число цветов $N_c = 3$, дроби $M_t^2/M_W^2 \approx 4.6$ и $M_t^2/M_H^2 \approx 1.9$. Включение "головастиков" в схеме ФЕ в множество собственно-энергетических диаграмм Фейнмана в теории с нарушенной калибровочной симметрией необходимо для сохранения калибровочной инвариантности соотношения между M_t и $\overline{m}_t(\mu^2)$ [20, 22–26, 34]. Вариант $\overline{\rm MS}$-схемы перенормировки, в которой суммарный вклад всех "головастиков" равен нулю, был изучен

[2] В пределе $M_B^2/M_t^2 \ll 1$ (здесь $B = W, Z, H$) он согласуется с результатами [33].

[3] Данное выражение согласуется с численными результатами работ [23, 24].

в [27, 28]. Однако, как было показано в этих работах, применение данной схемы приводит к существенной зависимости от калибровки.

Рассмотрим теперь выражение (4) на масштабе $\mu^2 = M_t^2$. Для получения численных значений $\alpha_s(M_t^2)$, $\alpha(M_t^2)$, $\sin^2\theta_W(M_t^2)$, используем следующие начальные данные $\alpha_s(M_Z^2) \approx 0.1179$, $\alpha^{-1}(M_Z^2) \approx$ ≈ 127.952, $\sin^2\theta_W(M_Z^2) \approx 0.231$ [1], эволюционируемые на масштаб массы топ-кварка.

Соответствующие РГ уравнения, определяющие бег констант связи α_s и α в СМ в однопетлевом приближении (см., например, работы [35, 22, 34] и ссылки в них), выглядят следующим образом:

$$\mu^2\frac{\partial a_s}{\partial\mu^2} = -\left(11-\frac{2}{3}n_f\right)a_s^2,$$

$$\mu^2\frac{\partial a}{\partial\mu^2} = \left(-7+\frac{4}{3}n_G+\frac{20}{27}n_G N_c\right)a^2, \tag{10}$$

где $a_s = \alpha_s/4\pi$, $a = \alpha/4\pi$, n_f – число ароматов кварков, n_G – количество поколений фермионов, N_c – число цветов. В СМ зависимость $a = e^2/16\pi^2$ от масштаба может быть определена исходя из бега константы g группы $SU(2)_L$, константы g' группы $U(1)_Y$ и соотношения $1/e^2 = 1/g^2 + 1/g'^{\,2}$. Вклад $4n_G/3$ в (10) соответствует β-функции КЭД в однопетлевом приближении; член $20n_GN_c/27$ – вклад верхних и нижних типов кварков в поколениях с числом n_G; слагаемое -7 – эффект взаимодействия фотона с W-бозоном.

При переходе с масштаба $\mu^2 = M_Z^2$ на $\mu^2 = M_t^2$ фиксируем $n_f = 5$, $n_G = 3$, $N_c = 3$. В таком случае, решения уравнений (10) принимают вид:

$$\alpha_s(\mu^2) \approx \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{1-\dfrac{23}{3}\dfrac{\alpha_s(M_Z^2)}{4\pi}\ln\dfrac{M_Z^2}{\mu^2}},$$

$$\alpha(\mu^2) \approx \frac{\alpha(M_Z^2)}{1+\dfrac{11}{3}\dfrac{\alpha(M_Z^2)}{4\pi}\ln\dfrac{M_Z^2}{\mu^2}}. \tag{11}$$

Используя вышеприведенные значения для $\alpha_s(M_Z^2)$, $\alpha^{-1}(M_Z^2)$ и подставляя их в (11), получаем $\alpha_s(M_t^2) \approx 0.108$, $\alpha^{-1}(M_t^2) \approx 127.58$.

Сдвижка значения синуса угла слабого смешивания, определенного в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме, с начальной точки нормировки $\mu^2 = M_Z^2$ в конечную $\mu^2 = M_t^2$ осуществляется нами при помощи следующей формулы, полученной в [36]:

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta_W(M_t^2) \approx \\ &\approx \frac{\alpha(M_t^2)}{\alpha(M_Z^2)}\sin^2\theta_W(M_Z^2) + \frac{21}{44}\left(1-\frac{\alpha(M_t^2)}{\alpha(M_Z^2)}\right) + \\ &+ \frac{\alpha(M_t^2)}{4\pi}\left(\frac{625}{132}\ln\frac{M_t^2}{M_Z^2} + \frac{18}{11}\ln\frac{\alpha(M_t^2)}{\alpha(M_Z^2)}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Применение формулы (12) дает приближенное значение $\sin^2\theta_W(M_t^2) \approx 0.234$ (по сравнению с начальным значением $\sin^2\theta_W(M_Z^2) \approx 0.231$ на масштабе массы Z-бозона).

Используя теперь выражения (5), (9) совместно с найденными выше значениями $\alpha_s(M_t^2)$, $\alpha^{-1}(M_t^2)$, $\sin^2\theta_W(M_t^2)$, приходим к численной форме записи соотношения между полюсными и бегущими массами топ-кварка, полученного в рамках ФЕ-схемы в первом порядке ТВ:

$$\frac{M_t}{\overline{m}_t(M_t^2)} \approx 1 + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s)}{0.046} - \overset{\mathcal{O}(\alpha)}{0.065} = 0.981 < 1\ (!?). \tag{13}$$

Видно, что однопетлевая ЭС поправка превышает КХД поправку, и ее учет изменяет знак суммарного вклада в отношение (13), вычисленного в первом порядке ТВ. Данный эффект также следует из результатов [24] и [22] при $M_H = 125$ ГэВ.

Похожая ситуация выявляется и для ширины распада бозона Хиггса в два фотона из результатов работы [37], где впервые была вычислена четырехпетлевая поправка КХД и приведено численное значение двухпетлевого ЭС вклада (см. также оригинальные статьи [38, 39], где этот ЭС вклад был явно вычислен). Из этих работ следует, что эта ЭС поправка по величине очень близка к двухпетлевому вкладу КХД (а также значительно больше четырехпетлевых эффектов КХД) и имеет противоположный по отношению к нему знак.

Вернемся к обсуждению отношения $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$ (13). Его численный вид находится в полном согласии с результатами [24, 22]. Отметим, что в разности между массами M_t и $\overline{m}_t(M_t^2)$ (или между M_t и $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$[4)]) величина $\mathcal{O}(\alpha)$ ЭС вклада составляет порядка 10 ГэВ. Ясно, что эта большая поправка значительно превышает все существующие погрешности в определении параметров, входящих в (4) и (7)–(8), таких как константы связи, $\sin^2\theta_W$, массы частиц.

В свою очередь, из результатов различных коллабораций, например, D0 (см. [30]), CMS (см. [31]) и ATLAS (см. [32]) следует, что представленные в данных работах соотношения между M_t и $\overline{m}_t$ включают

[4)] Как уже было упомянуто ранее, в первом порядке ТВ $\overline{m}_t(M_t^2) \approx \overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$ в ур. (4).

в себя *лишь* КХД поправки без учета электрослабых эффектов[5)]. Этот факт вызывает некоторую настороженность и поднимает вопросы о величине бегущих масс топ-кварка, полученных из экспериментальных данных БАК и Тэватрона, об их представлении в текущем выпуске PDG, а также об учете ЭС эффектов в отношении $M_t/\overline{m}_t(\mu^2)$.

Рассмотрим теперь зависимость КХД и ЭС поправок в ур. (4) от масштаба в области выше порога рождения топ-кварка, а точнее в промежутке $M_t \leq \mu \leq 2M_t$. Чтобы избежать превышения точности рассматриваемого в данном разделе однопетлевого приближения, следует учитывать зависимость от масштаба только в коэффициентах $\delta_1^{\rm QCD}$ (5) и $\delta_1^{\rm EW}$ (9), пренебрегая при этом бегом других параметров, входящих в ур. (4). Для наиболее правдоподобной оценки в дальнейшем мы будем фиксировать значения α_s, α и $\sin^2\theta_W$ на масштабе массы топ-кварка, полагая $\alpha_s(\mu^2) \approx \alpha_s(M_t^2)$, $\alpha(\mu^2) \approx \alpha(M_t^2)$, $\sin^2\theta_W(\mu^2) \approx \sin^2\theta_W(M_t^2)$ на всем интервале $M_t \leq \mu \leq 2M_t$ при $n_f = 5$.

Пренебрегая пороговыми эффектами, не учитываемыми на однопетлевом уровне, и используя вышеприведенные значения $\alpha_s(M_t^2), \alpha^{-1}(M_t^2)$, $\sin^2\theta_W(M_t^2)$ и выражения (5), (9), получаем рис. 2, демонстрирующий зависимость $M_t/\overline{m}_t^2(\mu^2)$ от масштаба в первом порядке ТВ в СМ.

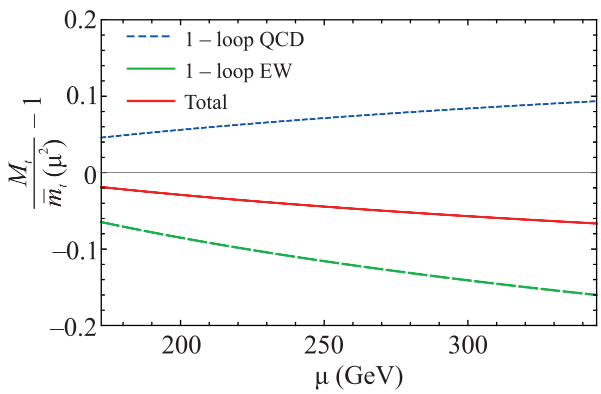

Рис. 2. (Цветной онлайн) Однопетлевые КХД и ЭС поправки к $M_t/\overline{m}_t(\mu^2) - 1$ в интервале $M_t \leq \mu \leq 2M_t$

Из этого рисунка видно, что изучаемая однопетлевая ЭС поправка доминирует над поправкой КХД во всей области $M_t \leq \mu \leq 2M_t$. Более того, она противоположна ему по знаку. Таким образом, суммарная поправка первого порядка ТВ оказывается отрицательной.

Следует также отметить, что однопетлевой ЭС вклад $\delta_1^{\rm EW}$ (9) может быть *формально* обращен в нуль на масштабе $\mu_0^2 = M_t^2 \exp(-0.94) \approx (108\ \text{ГэВ})^2$. В этом случае можно рассматривать только КХД поправку, которая на данном масштабе станет равной $\delta_1^{\rm QCD} \approx 1.6$. Интересно, что если оставить в (7)–(8) лишь лидирующий по величине вклад "головастика", изображенного на рис. 1, то μ_0^2 перейдет в очень близкий масштаб $\tilde{\mu}_0^2 = M_t^2 \exp(-1)$. Однако, и μ_0, и $\tilde{\mu}_0$ лежат ниже масштаба массы топ-кварка, где, как правило, не используется бегущая масса $\overline{m}_t(\mu^2)$, обычно рассматриваемая в области малых расстояний.

В настоящее время среди низкомасштабных обобщений бегущей $\overline{\rm MS}$ массы тяжелого кварка понятие MSR-схемной массы $m_q^{\rm MSR}(R^2)$ [41, 10] является одним из наиболее популярных. MSR-масса может быть продолжена до масштаба R, лежащего ниже массы рассматриваемого тяжелого кварка (в нашем случае – топ-кварка). На практике эта возможность осуществляется в КХД благодаря линейной зависимости разности полюсной и MSR-массы $M_q - m_q^{\rm MSR}(R^2) = R\sum\limits_{n\geq 1}\delta_n^{\rm MSR}a_s^n(R^2)$ от масштаба R.

В первом порядке ТВ мы предлагаем рассмотреть следующее OS-MSR соотношение для топ-кварка, имеющее ту же линейную зависимость от R и расширяющее его КХД версию [10] на случай СМ:

$$M_t - m_t^{\rm MSR}(R^2) = = R\left(\frac{16}{3}\frac{\alpha_s(R^2)}{4\pi} - 24.26\frac{\alpha(R^2)}{4\pi\sin^2\theta_W(R^2)}\right). \quad (14)$$

Здесь коэффициенты $16/3$ и -24.26 есть независящие от РГ логарифмов члены в выражениях (5) и (9) соответственно. Заметим, что вклады "головастиков" не исчезают. В уравнении (14) они все еще содержатся в константном коэффициенте -24.26 первой ЭС поправки.

Используя теперь выражение (14), формулы (11) на масштабе $\mu^2 = R^2 = \mu_0^2$, определенном выше, и соотношение (12) с $R^2 = \mu_0^2$ вместо M_t^2, получаем:

$$\frac{M_t}{m_t^{\rm MSR}(\mu_0^2)} \approx 1 + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s)}{0.03} - \overset{\mathcal{O}(\alpha)}{0.04}\,. \quad (15)$$

Таким образом, в рассматриваемом здесь подходе даже при $\mu_0 \approx 108$ ГэВ однопетлевая ЭС поправка, входящая в OS-MSR отношение (15), сравнима с поправкой КХД первого порядка ТВ. Упомянем также, что оба эти вклада немного меньше, чем те, которые приведены в (13) для соотношения $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$.

[5)] В самом деле, лишь трехпетлевые эффекты КХД рассматриваются в соотношении между полюсными и бегущими массами топ-кварка в работе [30] (см. формулу (3)) и в [31] (см. с. 23), где используется программа RunDec [40]. В работе [32] принимаются во внимание лишь однопетлевые вклады КХД (см. заключение этой статьи и сноску #9).

2.2. Оценки высших порядков теории возмущений. Напомним, что к настоящему моменту времени в уравнении (1) вычислены не только однопетлевые поправки, но также и двух- [15, 16], трех- [17, 18], четырехпетлевые [19] КХД, смешанные двухпетлевые $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ КХД-ЭС [23, 24] и двухпетлевые $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ЭС [21, 22] поправки. Учитывая эти результаты, можно получить следующее *приближенное выражение* для $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$ в схеме ФЕ, нормированное на масштабе полюсной массы t-кварка[6)]:

$$\frac{M_t}{\overline{m}_t(M_t^2)} \approx 1 + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s)}{0.046} + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s^2)}{0.013} + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s^3)}{0.004} + \overset{\mathcal{O}(\alpha_s^4)}{0.002} - \overset{\mathcal{O}(\alpha)}{0.065} + \overset{\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)}{0.002} + \overset{\mathcal{O}(\alpha^2)}{0.005} = 1.007\ (!?) \tag{16}$$

Приближенные значения $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ и $\mathcal{O}(\alpha^2)$ вкладов непосредственно следуют из [23, 22]. Однако, поскольку используемое в этой работе значение полюсной массы топ-кварка слегка отличается от тех, которые применялись в [23, 22], то и обсуждаемые двухпетлевые поправки также немного отличаются от их аналогов, представленных в указанных работах.

Выражение (16) демонстрирует, что сумма одно- и двухпетлевых ЭС и смешанных КХД-ЭС поправок почти полностью компенсируется первыми четырьмя вкладами КХД. Отметим, что в отличие от $\mathcal{O}(\alpha)$ слагаемого, члены $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ и $\mathcal{O}(\alpha^2)$ положительны и сопоставимы с величиной $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ вклада. Таким образом, включение электрослабых эффектов в схеме ФЕ сильно влияет на величину суммарной поправки к соотношению между полюсной и бегущей массами топ-кварка также и в более высоких порядках ТВ.

Следует также упомянуть, что упрощенный случай, когда величины M_H, M_t предполагаются значительно бо́льшими, чем M_W, M_Z, рассматривался в [21, 22]. В этом приближении величина двухпетлевой ЭС поправки оказывается в 2 раза меньше истинного значения и сравнима с величиной $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ вклада. Кроме того, явный независимый расчет [33] позволяет сделать вывод, что не только однопетлевой ЭС член, представленный в уравнениях (7)–(8), полностью согласуется с его формой записи в виде разложения по малому параметру $M_B^2/M_t^2 \ll 1$ (здесь $B = W, Z, H$), но также и двухпетлевой КХД-ЭС вклад, полученный в [23, 24]. Этот факт является дополнительным подтверждением надежности результатов сложных двухпетлевых вычислений, выполненных в [23, 24].

Перейдем к сравнению значения отношения $M_t/\overline{m}_t(M_t^2)$, приведенного в (16), с аналогичным $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$-отношением, следующим из результатов обработки экспериментальных данных Тэватрона [30] и БАК [31, 32], где одновременно определялась и полюсная, и бегущая в $\overline{\text{MS}}$-схеме масса t-кварка (как уже было отмечено в сноске # 6, различные нормировки $\mu^2 = M_t^2$ и $\mu^2 = \overline{m}_t^2(\overline{m}_t^2)$ не будут *существенно* изменять результат). Для этой цели опишем вкратце как фиксируются значения этих масс и насколько они точны.

Как известно, полюсная масса t-кварка чаще всего отождествляется с ее Монте-Карло (МС) аналогом (см., например, работы [30–32] и ссылки в них). Эта МС масса M_t^{MC} извлекается из экспериментальных данных по рождению топ-кварков в $p\bar{p}$-столкновениях на Тэватроне (коллаборации CDF и D0) (см., например, [42, 43]) и в pp-столкновениях на БАК (коллаборации ATLAS и CMS) (см., например, [32, 31]). Она используется при сравнении измеренных сечений с предсказываемыми при помощи генераторов событий МС, включающих симуляции партонных ливней для моделирования эффектов адронизации (см. обзоры [2–4]). Масса МС определяется таким образом, чтобы быть наиболее согласованной с экспериментальными данными об инвариантной массе продуктов распада. Возникает концептуальный вопрос, как связать параметр M_t^{MC} с полюсной массой топ-кварка в рамках СМ. В настоящее время этот вопрос чрезвычайно актуален, поскольку текущая погрешность определения массы M_t^{MC} оказывается меньше, чем неопределенность ее теоретической интерпретации, которая по порядку величины составляет около $0.5 \div 1$ ГэВ [2–4, 44][7)].

Например, анализ, выполненный коллаборацией ATLAS БАК в [32] на основе сопоставления МС массы топ-кварка с ее полюсным аналогом в процессе $t\bar{t}$ + 1-струя, приводит к следующему значению M_t с погрешностями различных типов: $M_t = 171.1 \pm 0.4(\text{stat}) \pm 0.9(\text{syst})^{+0.7}_{-0.3}(\text{theor})$ ГэВ (по сравнению со средним значением PDG(20) $M_t = 172.4 \pm 0.7$ ГэВ,

[6)] На масштабе $\mu^2 = \overline{m}_t^2(\overline{m}_t^2)$ КХД часть соотношения между M_t и $\overline{m}_t$ имеет вид: $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) \approx 1 + 0.046 + 0.010 + 0.003 + 0.001$, где значение бегущей $\overline{\text{MS}}$ массы взято из PDG(20) и равно $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 162.5$ ГэВ. Соответствующее значение $\alpha_s(\overline{m}_t^2) = 0.1084$ константы связи сильного взаимодействия определяется при помощи представления в виде четырехпетлевого разложения по обратным степеням логарифмов с учетом условий сшивки (см. [12]). КХД часть выражения (16) с $\mu^2 = M_t^2$ *незначительно* отличается от аналогичного с $\mu^2 = \overline{m}_t^2(\overline{m}_t^2)$.

[7)] Отметим также другой интересный вопрос о возможной связи между широко используемыми в настоящее время МС и полюсной массами топ-кварка с их аналогом, который может быть определен из инвариантных масс W^+b, $W^-\bar{b}$ процесса $pp \to W^+W^-b\bar{b}$ и ширины распада t-кварка (см. работу [45] и ссылки в ней).

которое мы использовали в нашей работе). Данная теоретическая погрешность включает в себя вышеупомянутые неопределенности в интерпретации МС массы.

Наряду с полюсной, определяются также значения бегущей массы топ-кварка [30–32] путем переопределения M_t его аналогом в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме. Например, современное значение бегущей массы топ-кварка, полученное коллаборацией ATLAS [32], равно $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 162.9 \pm 0.5(\mathrm{stat}) \pm 1.0(\mathrm{syst})^{+2.1}_{-1.2}(\mathrm{theor})$ ГэВ (по сравнению со средним значением $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 162.5^{+2.1}_{-1.5}$ ГэВ, взятым из PDG(20)).

Изучение поведения сечения $\sigma(t\bar{t})$ в pp-столкновения позволяет напрямую определить значение $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$ [46–49]. В этих работах данные сечения с учтенными поправками СМ, первоначально параметризованные через полюсные массы частиц, выражаются через массы в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме без учета ЭС эффектов.

Найдем теперь значение отношения $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$, которое следует из результатов, например, коллаборации ATLAS [32] по одновременному определению полюсной и бегущей массы топ-кварка. Используя вышеприведенные значения этих масс, получаем, что $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 1.050^{+0.017}_{-0.012}$ (по сравнению с $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 1.061^{+0.014}_{-0.011}$, которое вытекает из усредненных данных PDG(20)). Отсюда явно видно, что в пределах полосы ошибок оба эти значения противоречат тому, что представлено в (16). Эта проблема также наблюдается для отношения $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$, значение которого следует из аналогичного анализа коллабораций D0 и CMS (см., например, [30] и [31]). Причина этого несоответствия связана с большой величиной ЭС поправок, включенных в (16) в рамках схемы ФЕ, но не учитываемых в процессе определения бегущей массы топ-кварка, рассмотренном выше. Перейдем к более подробному обсуждению этого вопроса и выясним, где именно теряются эти ЭС эффекты.

3. Обсуждения. Из уравнения (16) следует, что однопетлевой ЭС вклад в схеме ФЕ в среднем в 4–6 раз превышает среднеквадратичные погрешности, указанные выше для отношения $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$, значение которого определяется из результатов обработки данных БАК (а также Тэватрона и PDG(20)). Тем не менее, как уже было отмечено ранее, этот ЭС эффект игнорируется членами различных коллабораций, когда в исследованиях осуществляется переход от полюсной к бегущей в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме массе топ-кварка [1, 30–32].

В различных феноменологически ориентированных работах этот эффект не учитывается, когда сечение $\sigma(t\bar{t})$, изначально параметризованное через полюсные массы частиц и содержащее поправки СМ, переписывается в терминах массы в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме. В процессе этого преобразования в соотношении между M_t и $\overline{m}_t$ учитываются *только* эффекты КХД[8)]. С нашей точки зрения, анализ, проведенный в разделе 2, указывает на то, что исследования, выполненные в этих работах, также должны быть дополнены включением ЭС поправок к рассматриваемому соотношению масс топ-кварка. Как следует из (16), они могут привести к существенному сдвигу значений получаемых там бегущих масс топ-кварка.

В заключение следует подчеркнуть, что, вообще говоря, в ЭС секторе понятие бегущей массы кварка в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме может быть определено несколькими способами. Обсудим вкратце основные подходы, рассматриваемые в литературе для его определения. В этой работе мы использовали $\overline{\mathrm{MS}}$ массу топ-кварка в схеме ФЕ [25] согласно соотношению $\overline{m}_t(\mu^2) = y_t(\mu^2)v(\mu^2)/\sqrt{2}$, которое возникает в спонтанно нарушенной фазе. Как уже упоминалось выше, эта схема позволяет сохранить явную калибровочную инвариантность в соотношении между полюсной и бегущей массой топ-кварка. При этом необходимо учитывать вклады “головастиков”, обеспечивающих выполнение данного свойства (см. [20–24]).

Другой подход, где используется соотношение $\overline{m}_t(\mu^2) = y_t(\mu^2)v_{\mathrm{eff}}(\mu^2)/\sqrt{2}$, приводит к бегущей массе, зависящей от калибровки [27, 28]. Здесь эффективное вакуумное среднее $v_{\mathrm{eff}}(\mu^2)$ определяется из условия минимизации эффективного потенциала поля Хиггса. В случае применения данной схемы перенормировок соотношение между полюсной и бегущей массой не содержит больших вкладов диаграмм-головастиков, но существенно зависит от калибровки [27, 28].

Еще одна возможность состоит в рассмотрении соотношения $\overline{m}_t(\mu^2) = y_t(\mu^2)v_0/\sqrt{2}$ с фиксированным значением $v_0 = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$ ГэВ, где постоянная Ферми G_F является константой связи эффективной низкоэнергетической теории с четырехфермионным взаимодействием. Ее значение обычно находится из экспериментальных данных по распаду $\mu \to \nu_\mu \bar{\nu}_e e$ [1]. В таком калибровочно-инвариантном подходе масса t-кварка бежит как юкавская константа связи $y_t(\mu^2)$, умноженная на μ-независимый фактор $v_0/\sqrt{2}$, и также не зависит от вкладов “головастиков” [20–22, 24]. Это приводит к значительно мень-

8) См. ур. (42)–(44) в [46]; обсуждения ниже ур. (5) в [47], где был выполнен обновленный анализ работы [46]; ур. (9)–(11) в [48]; ур. (8)–(12) в [49].

шим ЭС поправкам, чем в схеме ФЕ [21]. Однако, отсутствие бега вакуумного среднего постулируется "руками", и фиксированное значение v_0 не изменяется при переходе из низкоэнергетической области в высокоэнергетическую, где определяется масса топ-кварка.

Таким образом, в настоящее время в ЭС секторе нет однозначного определения бегущей массы топ-кварка. В данной работе мы использовали ее первое определение, которое, однако, приводит к большим ЭС поправкам к соотношению между M_t и $\overline{m}_t(M_t^2)$, не учитываемым при анализе данных Тэватрона и БАК. Изучение ЭС эффектов в других схемах продолжается.

4. Заключение. Включение известных двухпетлевых электрослабых поправок в анализ соотношения между полюсной и бегущей в $\overline{\mathrm{MS}}$-схеме массой t-кварка существенно влияет на величину суммарной поправки СМ между этими параметрами в рамках схемы Флейшера–Егерлейнера, которая, с теоретической точки зрения, является наиболее естественной среди прочих в пертурбативных исследованиях СМ. Оказывается, что суммарные четырехпетлевые КХД и двухпетлевые ЭС поправки практически полностью компенсируют друг друга, приводя к соотношению $M_t \approx \overline{m}_t(M_t^2)$. Этот факт находится в серьезном несоответствии с результатами одновременного определения полюсных и бегущих масс топ-кварка, следующими как из анализа данных БАК, так и Тэватрона, где учитываются только эффекты КХД в соотношении между M_t и $\overline{m}_t$. Если принять во внимание все современные погрешности, входящие в определение этих массовых параметров, то этот вывод не изменится. Более того, ЭС эффекты для рассматриваемого соотношения игнорируются в феноменологически ориентированных работах, в которых сечение $\sigma(t\bar{t})$, первоначально параметризованное через полюсную массу t-кварка, затем переписывается в терминах $\overline{\mathrm{MS}}$-массы, которая впоследствии определяется численно. Это вызывает некоторую настороженность и поднимает определенные вопросы о значениях зависящих от масштаба масс топ-кварка, полученных из данных БАК и Тэватрона, и об их представлении в текущем выпуске группы PDG. Фактически, эти результаты должны быть дополнены учетом ЭС поправок (в любой из схем, в которой рассматривается перенормировка бегущей массы), а извлеченная при этом масса должна быть надлежащим образом определена в зависимости от применения конкретной схемы в СМ.

Мы благодарны Ф. Егерлейнеру и М. Ю. Калмыкову за полезные комментарии и разъяснения, которые были приняты во внимание в процессе написания этой работы. Также мы признательны А. Б. Арбузову и в особенности Н. В. Красникову за воодушевляющие и плодотворные обсуждения.

Работа В. С. Молокоедова поддержана грантом Российского научного фонда # 21-71-30003 (исследование представления однопетлевой ЭС поправки) и грантом Московского центра фундаментальной и прикладной математики # 075-15-2019-1621 (численный анализ).

1. P. A. Zyla, R. M. Barnett, J. Beringer et al. (Particle data Collaboration), PTEP **2020**(8), 083C01 (2020).
2. P. Nason, in *From My Vast Repertoire...: Guido Altarelli's Legacy*, ed. by S. Forte, A. Levy, and G. Ridolfi, World Scientific, Singapore (2019), p. 123; arXiv:1712.02796 [hep-ph].
3. G. Corcella, Front. Phys. **7**, 54 (2019); arXiv:1903.06574 [hep-ph].
4. A. H. Hoang, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **70**, 225 (2020); arXiv:2004.12915 [hep-ph].
5. M. Beneke and V. M. Braun, Nucl. Phys. B **426**, 301 (1994); arXiv:hep-ph/9402364 [hep-ph].
6. I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, Phys. Rev. D **50**, 2234 (1994); arXiv:hep-ph/9402360 [hep-ph].
7. M. Beneke, Phys. Rep. **317**, 1 (1999); arXiv:hep-ph/9807443 [hep-ph].
8. A. Pineda, JHEP **0106**, 022 (2001); hep-ph/0105008.
9. M. Beneke, P. Marquard, P. Nason, and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **775**, 63 (2017); arXiv:1605.03609 [hep-ph].
10. A. H. Hoang, A. Jain, C. Lepenik, V. Mateu, M. Preisser, I. Scimemi, and I. W. Stewart, JHEP **1804**, 003 (2018); arXiv:1704.01580 [hep-ph].
11. A. L. Kataev and V. S. Molokoedov, JETP Lett. **108**(12), 777 (2018); arXiv:1811.02867 [hep-ph].
12. A. L. Kataev and V. S. Molokoedov, Eur. Phys. J. C **80**(12), 1160 (2020); arXiv:1807.05406 [hep-ph].
13. P. Ball, M. Beneke, and V. M. Braun, Nucl. Phys. B **452**, 563 (1995); arXiv:hep-ph/9502300 [hep-ph].
14. R. Tarrach, Nucl. Phys. B **183**, 384 (1981).
15. N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe, and K. Schilcher, Z. Phys. C **48**, 673 (1990).
16. L. V. Avdeev and M. Y. Kalmykov, Nucl. Phys. B **502**, 419 (1997); hep-ph/9701308.
17. K. Melnikov and T. van Ritbergen, Phys. Lett. B **482**, 99 (2000); hep-ph/9912391.
18. K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **573**, 617 (2000); hep-ph/9911434.
19. P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov, M. Steinhauser, and D. Wellmann, Phys. Rev. D **94**(7), 074025 (2016); arXiv:1606.06754 [hep-ph].

20. R. Hempfling and B. A. Kniehl, Phys. Rev. D **51**, 1386 (1995); arXiv:hep-ph/9408313 [hep-ph].
21. B. A. Kniehl and O. L. Veretin, Nucl. Phys. B **885**, 459 (2014); Erratum: Nucl. Phys. B **894**, 56 (2015); arXiv:1401.1844 [hep-ph].
22. B. A. Kniehl, A. F. Pikelner, and O. L. Veretin, Nucl. Phys. B **896**, 19 (2015); arXiv:1503.02138 [hep-ph].
23. F. Jegerlehner and M. Y. Kalmykov, Nucl. Phys. B **676**, 365 (2004); arXiv:hep-ph/0308216 [hep-ph].
24. F. Jegerlehner, M. Y. Kalmykov, and B. A. Kniehl, Phys. Lett. B **722**, 123 (2013); arXiv:1212.4319 [hep-ph].
25. J. Fleischer and F. Jegerlehner, Phys. Rev. D **23**, 2001 (1981).
26. A. I. Bochkarev and R. S. Willey, Phys. Rev. D **51**, 2049 (1995); arXiv:hep-ph/9407261 [hep-ph].
27. S. P. Martin, Phys. Rev. D **93**(9), 094017 (2016); arXiv:1604.01134 [hep-ph].
28. S. P. Martin and D. G. Robertson, Phys. Rev. D **100**(7), 073004 (2019); arXiv:1907.02500 [hep-ph].
29. G. Passarino, Acta Phys. Polon. B **52**, 533 (2021); arXiv:2104.13569 [hep-ph].
30. V. M. Abazov, B. Abbott, B. S. Acahrya et al. (D0 Collaboration), Phys. Lett. B **703**, 422 (2011); arXiv:1104.2887 [hep-ex].
31. A. M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. (CMS Collaboration), Eur. Phys. J. C **79**(5), 368 (2019); arXiv:1812.10505 [hep-ex].
32. G. Aad, B. Abbott, D. C. Abbott et al. (ATLAS Collaboration), JHEP **11**, 150 (2019); arXiv:1905.02302 [hep-ex].
33. D. Eiras and M. Steinhauser, JHEP **02**, 010 (2006); arXiv:hep-ph/0512099 [hep-ph].
34. F. Bezrukov, M. Y. Kalmykov, B. A. Kniehl, and M. Shaposhnikov, JHEP **10**, 140 (2012); arXiv:1205.2893 [hep-ph].
35. F. Jegerlehner, M. Y. Kalmykov, and O. Veretin, Nucl. Phys. B **658**, 49 (2003); arXiv:hep-ph/0212319 [hep-ph].
36. J. Erler and M. J. Ramsey-Musolf, Phys. Rev. D **72**, 073003 (2005); arXiv:hep-ph/0409169 [hep-ph].
37. J. Davies and F. Herren, Phys. Rev. D **104**(5), 053010 (2021); arXiv:2104.12780 [hep-ph].
38. G. Degrassi and F. Maltoni, Nucl. Phys. B **724**, 183 (2005); arXiv:hep-ph/0504137 [hep-ph].
39. S. Actis, G. Passarino, C. Sturm, and S. Uccirati, Nucl. Phys. B **811**, 182 (2009); arXiv:0809.3667 [hep-ph].
40. K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, and M. Steinhauser, Comput. Phys. Commun. **133**, 43 (2000); arXiv:hep-ph/0004189 [hep-ph].
41. A. H. Hoang, A. Jain, I. Scimemi, and I. W. Stewart, Phys. Rev. Lett. **101**, 151602 (2008); arXiv:0803.4214 [hep-ph].
42. CDF and D0, arXiv:1608.01881 [hep-ex].
43. V. M. Abazov, B. Abbott, B. S. Acahrya et al. (D0 Collaboration), Phys. Rev. D **95**(11), 112004 (2017); arXiv:1703.06994 [hep-ex].
44. B. Bachu, A. H. Hoang, V. Mateu, A. Pathak, and I. W. Stewart, Phys. Rev. D **104**(1), 014026 (2021); arXiv:2012.12304 [hep-ph].
45. A. Baskakov, E. Boos, and L. Dudko, Phys. Rev. D **98**(11), 116011 (2018); arXiv:1807.11193 [hep-ph].
46. U. Langenfeld, S. Moch, and P. Uwer, Phys. Rev. D **80**, 054009 (2009); arXiv:0906.5273 [hep-ph].
47. S. Alekhin, A. Djouadi, and S. Moch, Phys. Lett. B **716**, 214 (2012); arXiv:1207.0980 [hep-ph].
48. J. Fuster, A. Irles, D. Melini, P. Uwer, and M. Vos, Eur. Phys. J. C **77**(11), 794 (2017); arXiv:1704.00540 [hep-ph].
49. S. Catani, S. Devoto, M. Grazzini, S. Kallweit, and J. Mazzitelli, JHEP **08**(08), 027 (2020); arXiv:2005.00557 [hep-ph].