Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 12, с. 762 – 768 © 2022 г. 25 июня

Всегда ли существует форм-фактор в излучении Смита–Парселла?

Д. Ю. Сергеева[+*], *А. А. Тищенко*[+×∘1)]

[+]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[*]*Международная научно-образовательная лаборатория радиационной физики, Национальный исследовательский университет "БелГУ", 308034 Белгород, Россия*

[×]*Национальный исследовательский университет "ИТМО", 197101 С.-Петербург, Россия*

[∘]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 апреля 2022 г.
После переработки 30 апреля 2022 г.
Принята к публикации 4 мая 2022 г.

Общепринятый подход учета когерентности от сгустков заряженных частиц состоит в умножении интенсивности излучения от одной частицы на форм-фактор сгустка, учитывающий его размеры, форму и распределение частиц. В настоящей работе мы показываем, что в поляризационном излучении для широкого класса структур, таких как фотонные кристаллы и метаповерхности, этот подход, вообще говоря, некорректен. Построена теория когерентного излучения Смита–Парселла от таких структур. Показано, что общепринятый подход работает только при выполнении двух условий: 1) точка наблюдения лежит в плоскости, содержащей траекторию движения сгустка и нормаль к поверхности мишени; 2) радиус сгустка намного меньше эффективного радиуса действия собственного поля движущегося электрона.

DOI: 10.31857/S1234567822120035, EDN: imkkgv

1. Введение. Когерентность в излучении пучков заряженных частиц – это основное отличие синхротронов 3-го и особенно 4-го поколения от более ранних, и ключевое явление в физике самых ярких источников излучения, построенных на сегодня человечеством – лазеров на свободных электронах. Кроме того, именно когерентность излучения лежит в основе работы систем диагностики размеров электронных сгустков на современных ускорителях и коллайдерах. Действительно, при постановке любых экспериментов по регистрации переходного излучения [1], дифракционного излучения и более известного его частного случая – излучения Смита–Парселла (ИСП), излучения Вавилова–Черенкова [2–4] используются сгустки заряженных частиц, и на этапе сравнения измеренных кривых с расчетными при обработке данных необходимо учитывать, как размеры и форма сгустка влияют на распределение интенсивности по углам и частотам. Кроме того, в существующих источниках электромагнитного излучения задействующих механизм генерации ИСП (например, оротрон [5]) эффекты когерентности также важны.

Существует общепринятый подход в теории, как учесть эффекты когерентности. Он заключается в расчете распределения интенсивности по углам и частотам для одного электрона и последующем умножении одночастичной интенсивности на форм-фактор сгустка. Последний есть сумма двух слагаемых – когерентного и некогерентного [6] – и содержит всю информацию о форме и размерах сгустка. Обычно некогерентное слагаемое принимается равным числу электронов сгустка, а когерентный – квадрату числа электронов, умноженному на квадрат модуля фурье-образа функции распределения электронов в сгустке. В работе [6] было показано, что для краевых типов излучения, например, ИСП, дифракционного черенковского и дифракционного излучения когерентное и некогерентное слагаемые форм-фактора другие. В частности, показано, что некогерентный форм-фактор также содержит информацию о поперечных размерах сгустка, а когерентное отличается от просто фурье-образа функции распределения. Существенно, что, как мы указывали в работе [6], эти выводы верны для мишеней, однородных вдоль поверхности в направлении, поперечном движению электронного сгустка.

В этой статье мы покажем, что если мишень имеет неоднородность в направлении, перпендикулярном движению электронного сгустка, то в ИСП и дифракционном излучении идеология умножения одночастичной интенсивности на форм-фактор не всегда неверна и укажем пределы ее применимости. Для

1)e-mail: tishchenko@mephi.ru

этого проведем расчет поля ИСП от электронного сгустка от мишени, периодической в двух направлениях – вдоль и перпендикулярно движению сгустка. Мишени такого рода – метаповерхности, фотонные кристаллы – сегодня стали предметом активных исследований ввиду возможности конструировать оптические свойства поверхности, управляя спектром плазмонных резонансов, ИСП, конструируя микро- и наноантенны [7], разрабатывать новые типы оптических модуляторов [8] и фильтров [9], и т.д. В физике генерации излучения свободными электронами структуры такого типа также вызывают большое внимание [10–12], как в плане диагностики релятивистских электронных пучков, так и в плане конструирования новых источников излучения.

2. Общепринятый подход. ИСП возбуждается при пролете заряженных частиц вблизи мишени, которая имеет периодичность в направлении движения заряда. ИСП было экспериментально зарегистрировано в 1953 г. [13] и позже детально изучено теоретически и экспериментально для дифракционных решеток разных профилей и из разных материалов [14–16]. Дифракционным излучение называют, если неоднородность вдоль движения пучка произвольная или непериодическая.

Часто, для учета эффектов когерентности, обусловленных наличием электронного сгустка, пользуются следующим алгоритмом. Рассчитывается интенсивность излучения от одного электрона I_1, а затем она умножается на форм-фактор сгустка F. Форм-фактор берут в виде [1]:

$$F = N_e + N_e(N_e - 1)F_{\rm coh}, \tag{1}$$

где N_e – число электронов в сгустке, $F_{\rm coh}$ – квадрат модуля фурье-образа функции распределения электронов в сгустке $f(\mathbf{r}_e)$:

$$F_{\rm coh} = \left| \int d^3 r_e \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_e) f(\mathbf{r}_e) \right|^2, \tag{2}$$

$\mathbf{k}$ – волновой вектор излучения. Такой вид форм-фактора годится для синхротронного излучения, включая излучение на отдельных магнитах и в ондуляторах, или излучения от мишеней, размер которых можно считать бесконечными в направлении, поперечном движению сгустка (вдоль оси OY). Интегрирование ведется по радиус-векторам электрона относительно центра сгустка $\mathbf{r}_e$.

Для дифракционного излучения или ИСП форм-фактор имеет вид [6]:

$$F = N_e F_{\rm inc} + N_e(N_e - 1)F_{\rm coh}, \tag{3}$$

где

$$F_{\rm inc} = \int d^3 r_e |\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_e)|^2 f(\mathbf{r}_e), \tag{4}$$

$$F_{\rm coh} = \left| \int d^3 r_e \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_e) f(\mathbf{r}_e) \right|^2, \tag{5}$$

и $\mathbf{q} = (\beta^{-1}, n_y, -i\gamma^{-1}\beta^{-1}\sqrt{1+\gamma^2\beta^2 n_y^2})\omega/c$, где c – скорость света в вакууме, ω – частота излучения, $\beta = v/c$, v – скорость электронов сгустка, γ – Лоренц-фактор электронов, n_y – y-компонента единичного волнового вектора излучения.

В работе [6] было показано, что такое отличие формулы от формулы обусловлено разбросом расстояний от электронов до мишени, см. рис. 1. Собственное поле электронов убывает с расстоянием, поэтому электроны, находящиеся на разном расстоянии от мишени, по-разному поляризуют мишень. Коротко можно сказать, что разница обусловлена наличием разных импакт-параметров. Импакт-параметр – это кротчайшее расстояние между траекторией электрона и мишенью, см. h_1 и h_2 на рис. 1.

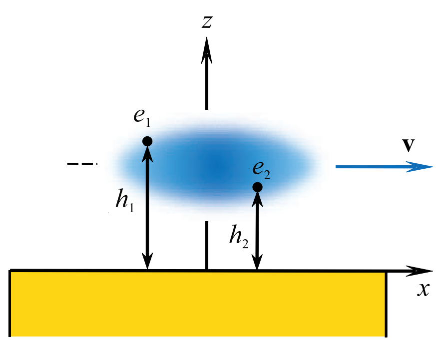

Рис. 1. (Цветной онлайн) Генерация дифракционного излучения или излучения Смита–Парселла. Сгусток движется вдоль оси OX с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Электроны сгустка e_1 и e_2 находятся на разных расстояниях от мишени h_1 и h_2, вносят разный вклад в поляризацию мишени собственным полем

В качестве примера рассмотрим дву-периодическую мишень – двумерный фотонный кристалл. Часто такого рода мишени также называют метаповерхностями. Строго говоря, приставка "мета" должна бы означать, что длина волны значительно превышает не только размеры отдельных элементов, но и расстояние между ними [17], однако сегодня, особенно в западной литературе, этим условием пренебрегают, имея в виду под метаповерхностями искуственно собираемые двумерные структуры с возможностью конструирования нужных оптических свойств. Мы, для некоторой строгости, здесь все же будем придерживаться термина двумерный фотонный кристалл

(2D photonic crystal, или photonic crystal slab). Кристалл будем рассматривать именно двумерным, чтобы не вдаваться в вопрос о влиянии запрещенных зон внутри кристалла на характеристики ИСП (этот вопрос был с помощью численного анализа рассмотрен в серии работ Ohtaka с соавторами, см. [18–22]).

На рисунке 2 изображена схема возбуждения ИСП при пролете электронного сгустка (синяя стрелка) над поверхностью двумерного фотонного кристалла. Поверхность представляет собой упорядоченный набор субволновых частиц, т.е. частиц, характерный размер которых L много меньше длины волны излучения λ: $L \ll \lambda$. Частицы расположены в плоскости, параллельной траектории электронов. Выберем систему координат таким образом, чтобы эта плоскость совпадала с плоскостью XY, начало координат лежало в центре мишени, а сгусток двигался вдоль оси OX с постоянной скоростью. Частицы расположены периодично в двух направлениях: вдоль траектории движения сгустка с периодом d_x и перпендикулярно траектории с периодом d_y. Суммарное число частиц конечно и равно N.

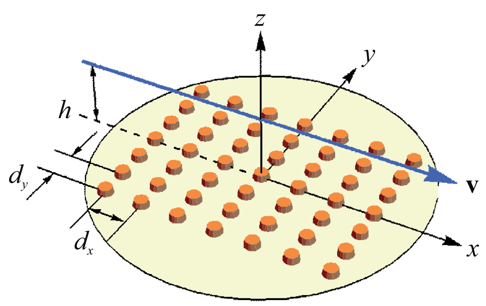

Рис. 2. (Цветной онлайн) Система координат и схема возбуждения излучения Смита–Парселла электронным пучком от метаповерхности

Радиус-векторы частиц мишени, изображенной на рис. 2, можно представить в виде:

$$\mathbf{R}_m = d_x m_x \mathbf{e}_x + d_y m_y \mathbf{e}_y \equiv X_m \mathbf{e}_x + Y_m \mathbf{e}_y, \tag{6}$$

где индексы m_x и m_y – целые числа, отсчитывающие частицы мишени вдоль осей OX и OY, соответственно. Например, можно задать частицы таки образом, чтобы m_x и m_y принимали значения от $-(N_{x,y}-1)/2$ до $(N_{x,y}-1)/2$. Тогда общее число элементов вдоль осей OX и OY равно N_x и N_y, а полное число элементов решетки есть $N = N_x N_y$.

В выбранной системе координат скорость задается величиной $\mathbf{v} = (v,\, 0,\, 0)$. Для сгустков ультрарелятивистских электронов в первом приближении можно не учитывать дисперсию по скоростям и энергиям. Это значит, все электроны будут описываться таким же вектором скорости. Центр сгустка при движении находится на постоянном расстоянии h от плоскости мишени.

Для рассматриваемой геометрии выражение для спектрально-углового распределения излучения от одного электрона I_1 было получено в работе [23]. Умножим это выражение на форм-фактор и для удобства выпишем полную формулу для спектрально-углового распределения излучения от сгустка:

$$I = I_{\text{inc}} + I_{\text{coh}}, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} I_{\text{inc}} = \frac{e^2\omega^2|\alpha(\omega)|^2}{\pi^2 c^3 \beta^4 \gamma^2} S k^4 N_e \iint dy_e dz_e \times \\ \times\, e^{-2\frac{\omega z_e}{\gamma v}\sqrt{1+\gamma^2\beta^2 n_y^2}} f_{tr} \times \\ \times \left\{ \left| \sum_{m_y} e^{-id_y m_y k_y} \mathbf{P}_m \right|^2 - \left| \sum_{m_y} e^{-id_y m_y k_y} \frac{\mathbf{k}\mathbf{P}_m}{k} \right|^2 \right\}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} I_{\text{coh}} = \frac{e^2\omega^2|\alpha(\omega)|^2}{\pi^2 c^3 \beta^4 \gamma^2} k^4 \times \\ \times \left| \iint dy_e dz_e^{-ik_y y_e - z_e \frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{1+\gamma^2\beta^2 n_y^2}} f_{tr} \right|^2 \times \\ \times\, N_e (N_e - 1) S F_l \times \\ \times \left\{ \left| \sum_{m_y} e^{-id_y m_y k_y} \mathbf{P}_m \right|^2 - \left| \sum_{m_y} e^{-id_y m_y k_y} \frac{\mathbf{k}\mathbf{P}_m}{k} \right|^2 \right\}, \end{gathered} \tag{9}$$

Для получения этих выражений мы пренебрегли корреляциями между электронами и разделили функцию распределения электронов в сгустке $f(\mathbf{r}_e)$ на две функции распределения в продольном направлении (вдоль оси OX) $f_l \equiv f(x_e)$ и в поперечном направлении $f_{tr} \equiv f(y_e, z_e)$:

$$f(\mathbf{r}_e) = f_l(x_e) f_{tr}(y_e, z_e). \tag{10}$$

Это позволило выделить продольный форм-фактор в виде отдельного множителя

$$F_l = \left| \int dx_e f_l \exp\left(-i\omega \frac{x_e}{v}\right) \right|^2. \tag{11}$$

Функции $f(\mathbf{r}_e)$, $f_l(x_e)$ и $f_{tr}(y_e, z_e)$ нормированы на единицу. Продольный форм-фактор (11) входит только в слагаемое, описывающее когерентное излучение.

В выражениях (8)–(9) e – заряд электрона, $\alpha(\omega)$ – функция поляризуемости частиц, составляющих мишень, k – модуль волнового вектора излучения,

$$\mathbf{P}_m = \frac{\mathbf{v}}{v\gamma} K_0\left(\frac{\omega}{v\gamma}\rho_m\right) + i\frac{\boldsymbol{\rho}_m}{\rho_m} K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma}\rho_m\right), \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\rho}_m = Y_m \mathbf{e}_y - h\mathbf{e}_z. \quad (13)$$

Здесь $K_{0,1}$ – модифицированные функции Бесселя (функции Макдональда) нулевого и первого порядков. Отметим, что векторы $\mathbf{P}_m$ и $\boldsymbol{\rho}_m$ не зависят от переменной интегрирования $\mathbf{r}_e$, т.е. от положения электрона в сгустке. Суммирование по индексу m_x в результате математических преобразований привело к возникновению множителя S:

$$S = \frac{\sin^2(d_x N_x(k_x - \omega/v)/2)}{\sin^2(d_x(k_x - \omega/v)/2)}. \quad (14)$$

Фактор S – характерный множитель для ИСП, в основном определяющий вид спектрального и углового распределения излучения. Условие максимальности фактора S дает дисперсионное соотношение:

$$\lambda s = d_x(\beta^{-1} - n_x), \quad (15)$$

где s – целое число ($s > 0$). Выражение (15) совпадает с классическим дисперсионным соотношением ИСП от обычной дифракционной решетки [13].

3. Последовательный подход. Найдем спектрально-угловую плотность излучения последовательным подходом: рассчитаем поле излучения от каждого электрона и усредним по положениям всех электронов сгустка. Схема возбуждения излучения и мишень такие, как и выше, см. рис. 2.

Одночастичная теория ИСП от рассматриваемых структур была подробно описана нами в недавних работах [23, 24]. Для расчета характеристик излучения от сгустка необходимо аналогично вычислить поля излучения для каждого электрона, а затем усреднить их суперпозицию по положениям электронов. Несмотря на сходство выражений с одночастичной теорией, для целостности изложения кратко приведем здесь схему вычисления поля излучения для N_e электронов.

Плотность токов, соответствующая одному электрону, который в начальный момент времени находится в точке с координатами $\mathbf{r}_e + h\mathbf{e}_z = (x_e, y_e, z_e + h)$, может быть записана в виде:

$$\mathbf{j}_e^0(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_e - h\mathbf{e}_z), \quad (16)$$

где e – заряд электрона, δ – дельта-функция. Собственное поле движущегося электрона определяется плотностью тока (16) и его фурье-образ выражается формулой:

$$\mathbf{E}_e^0(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{ie\omega}{\pi v^2\gamma} \exp\left[i\omega\frac{x - x_e}{v}\right] \times$$
$$\times \left\{\frac{\mathbf{v}}{v\gamma} K_0\left(\frac{\omega\rho_e}{v\gamma}\right) + i\frac{\boldsymbol{\rho}_e}{\rho_e} K_1\left(\frac{\omega\rho_e}{v\gamma}\right)\right\}, \quad (17)$$

где ω – частота, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ – Лоренц-фактор электронов, $\beta = v/c$, c – скорость света в вакууме, K_0 и K_1 – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков, и введен вектор

$$\boldsymbol{\rho}_e = (y - y_e)\mathbf{e}_y + (z - z_e - h)\mathbf{e}_z. \quad (18)$$

Под действием внешнего поля типа (17) в частицах мишени наводится динамическая поляризация, и как следствие происходит излучение. В условиях малости размера частиц по сравнению с длиной волны излучения и пренебрежимо малого взаимодействия между частицами наведенную плотность тока в частицах мишени можно описывать выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{d}(\mathbf{R}_m, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m). \quad (19)$$

Здесь суммирование ведется по всем частицам мишени, $\mathbf{R}_m$ – координата m-й частицы мишени, а $\mathbf{d}(\mathbf{R}_m, t)$ – дипольный момент в точке $\mathbf{R}_m$, фурье-образ которого определяется выражением:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, \omega) = \alpha(\omega)\sum_e \mathbf{E}_e^0(\mathbf{r}, \omega), \quad (20)$$

где суммирование ведется по всем N_e электронам сгустка, а функция $\alpha(\omega)$ является поляризуемостью частиц и характеризует отклик частицы на внешнее воздействие (все частицы мишени для упрощения предполагаются идентичными, что не ограничивает общности рассмотрения).

Фурье-образ поля излучения является решением системы уравнений Максвелла и определяется фурье-образом плотности тока (19):

$$\mathbf{E}^{\rm rad}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega}\left(\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) + \frac{[\mathbf{q}, [\mathbf{q}, \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega)]]}{q^2 - k^2}\right), \quad (21)$$

где $k = \omega/c$. На далеких расстояниях, т.е. когда $kr \gg 1$, фурье-образ поля излучения примет вид:

$$\mathbf{E}^{\rm rad}(\mathbf{r}, \omega) = -i\frac{(2\pi)^3}{\omega}\frac{e^{ikr}}{r}[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)]]. \quad (22)$$

Собирая окончательно все приведенные выше формулы, получим явный вид выражения для поля излучения электронного сгустка от двупериодической мишени:

$$\mathbf{E}^{\rm rad}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ie\omega}{\pi v^2\gamma}\alpha(\omega)\frac{e^{ikr}}{r} \times$$

$$\times \sum_e e^{-i\omega\frac{x_e}{v}} \sum_m e^{i\left(\omega\frac{\mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{k}\right)\mathbf{R}_m}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{P}_{me}]], \quad (23)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{P}_{me} = \frac{\mathbf{v}}{v\gamma}K_0\left(\frac{\omega\rho_{me}}{v\gamma}\right) + i\frac{\boldsymbol{\rho}_{me}}{\rho_{me}}K_1\left(\frac{\omega\rho_{me}}{v\gamma}\right), \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{me} = (Y_m - y_e)\mathbf{e}_y - (h + z_e)\mathbf{e}_z. \quad (25)$$

Такие образом, поле излучения, генерируемое сгустком, зависит от всех возможных разностей координат электронов и частиц мишени $\boldsymbol{\rho}_{me}$. Эти векторы $\boldsymbol{\rho}_{me}$ имеют смысл эффективного импакт-параметра: кратчайшее расстояние от траектории e-го электрона до m-го элемента мишени, см. рис. 3.

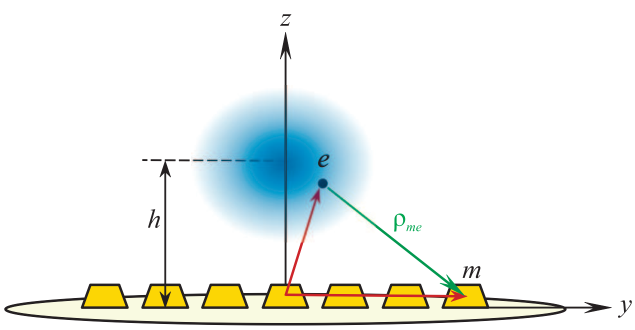

Рис. 3. (Цветной онлайн) Геометрический смысл вектора $\boldsymbol{\rho}_{me}$ как эффективного импакт-параметра

Спектрально-угловое распределение энергии излучения на далеких расстояниях определяется квадратом модуля поля излучения (23) и принимает вид:

$$\frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2 c}{\pi^2 v^4\gamma^2}|\alpha(\omega)|^2 \times$$

$$\times \left|\sum_e e^{-i\omega\frac{x_e}{v}} \sum_m e^{i\left(\omega\frac{\mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{k}\right)\mathbf{R}_m}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{P}_{me}]]\right|^2. \quad (26)$$

Пользуясь известным свойством сумм, разделим квадрат модуля суммы по всем электронам на два слагаемых: первое, содержащее все диагональные члены, и второе, содержащее все недиагональные члены. Тогда спектрально- угловое распределение энергии излучения также представится в виде суммы некогерентного и когерентного слагаемых, где некогерентное слагаемое принимает вид:

$$\frac{d^2W_{\text{inc}}(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2 c}{\pi^2 v^4\gamma^2}|\alpha(\omega)|^2 \times$$

$$\times \sum_e \left|\sum_m e^{i\left(\omega\frac{\mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{k}\right)\mathbf{R}_m}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{P}_{me}]]\right|^2, \quad (27)$$

а когерентное слагаемое запишется в виде:

$$\frac{d^2W_{\text{coh}}(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2 c}{\pi^2 v^4\gamma^2}|\alpha(\omega)|^2 \times$$

$$\times \left(\sum_e e^{-i\omega\frac{x_e}{v}} \sum_m e^{i\left(\omega\frac{\mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{k}\right)\mathbf{R}_m}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{P}_{me}]]\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{e'\neq e} e^{i\omega\frac{x_e}{v}} \sum_m e^{-i\left(\omega\frac{\mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{k}\right)\mathbf{R}_m}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{P}^*_{me}]]\right), \quad (28)$$

где верхний индекс $*$ означает комплексное сопряжение.

Далее необходимо провести усреднение выражений (27)–(28) по координатам всех электронов сгустка с некоторой весовой функцией – функцией распределения электронов в сгустке $f(\mathbf{r}_e)$. Усреднение сведется к интегрированию выражений (27)–(28) по d^3r_e. Таким образом, спектрально-угловое распределение излучения от сгустка принимает вид:

$$\left\langle\frac{d^2W(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega}\right\rangle = \left\langle\frac{d^2W_{\text{inc}}(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega}\right\rangle + \left\langle\frac{d^2W_{\text{coh}}(\mathbf{n},\omega)}{d\omega d\Omega}\right\rangle, \quad (29)$$

где угловые скобки означают усреднение, или в более короткой форме:

$$I' = I'_{\text{inc}} + I'_{\text{coh}}. \quad (30)$$

Здесь некогерентное слагаемое определяется выражением:

$$I'_{\text{inc}} = \frac{e^2\omega^2 c}{\pi^2 v^4\gamma^2}k^4|\alpha(\omega)|^2 S N_e \iint dy_e dz_e f_{tr} \times \quad (31)$$

$$\times \left\{\left|\sum_{m_y} e^{-ik_y d_y m_y}\mathbf{P}_{me}\right|^2 - \left|\sum_{m_y} e^{-ik_y d_y m_y}\frac{\mathbf{kP}_{me}}{k}\right|^2\right\},$$

а когерентное имеет вид:

$$I'_{\text{coh}} = \frac{e^2\omega^2 c}{\pi^2 v^4\gamma^2}k^4|\alpha(\omega)|^2 S N_e(N_e-1)F_l \times$$

$$\times \left\{\left|\sum_{m_y} e^{-ik_y d_y m_y}\iint dy_e dz_e f_{tr}\mathbf{P}_{me}\right|^2 -\right.$$

$$\left. - \left|\sum_{m_y} e^{-ik_y d_y m_y}\iint dy_e dz_e f_{tr}\mathbf{P}_{me}\right|^2\right\}. \quad (32)$$

В формулах (31)–(32) N_e – число электронов в сгустке. Как и ожидалось, интенсивность когерентного излучения пропорциональна N_e^2, а некогерентного –

N_e. Из анализа общих выражений (31)–(32), без конкретизации формы сгустка и геометрии мишени, можно заключить, что, вопреки общепринятому мнению, некогерентное излучение содержит информацию о размерах сгустка, причем только о поперечных. В свою очередь когерентное излучение определяется как поперечными, так и продольными размерами сгустка. Отметим, что в отличие от рассмотренного выше подхода, здесь векторы $\mathbf{P}_{me}$ и $\boldsymbol{\rho}_{me}$ зависят от положения электронов в сгустке, т.е. от переменной интегрирования.

4. Сравнение двух подходов. Найдем условия, при которых совпадают интенсивности, полученные с помощью двух описанных выше подходов. Отбрасывая одинаковые множители, видим, что выражение (8) совпадает с (31), а (9) с (32), если

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_m)e^{-ik_y y_e}e^{-z_e\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{1+\gamma^2\beta^2 n_y^2}} \approx \mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_{e\perp}), \quad (33)$$

где $\mathbf{r}_{e\perp} = y_e\mathbf{e}_y + z_e\mathbf{e}_z$. Заметим, что левая часть зависит от углов наблюдения, а правая нет.

Убывающая экспонента в левой части выражения (33) максимальна при $n_y = 0$. Положив $n_y = 0$, получим, что условие (33) можно разбить на два:

$$K_0\left(\frac{\omega}{v\gamma}\rho_m\right)e^{-z_e\frac{\omega}{\gamma v}} \approx K_0\left(\frac{\omega}{v\gamma}|\boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_{e\perp}|\right), \quad (34)$$

$$\frac{\boldsymbol{\rho}_m}{\rho_m}K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma}\rho_m\right)e^{-z_e\frac{\omega}{\gamma v}} \approx \frac{\boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_{e\perp}}{|\boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_{e\perp}|}K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma}|\boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{r}_{e\perp}|\right). \quad (35)$$

Эти условия выполнены, если

$$z_e\frac{\omega}{\gamma v} \ll 1, \quad r_{e\perp} \ll \rho_m. \quad (36)$$

Данные неравенства должны быть выполнены для любого m_y. Можно заменить второе из неравенств (36) на более жесткое, содержащее максимальное значение ρ_m. Тогда для сгустка с радиусом вместо r_0 получим:

$$z_e \ll \frac{\gamma\beta\lambda}{2\pi}, \quad r_0 \ll \sqrt{\left(\frac{L_y}{2}\right)^2 + h^2}. \quad (37)$$

Здесь $L_y = d_y N_y$ – ширина мишени. Для эффективной генерации ИСП импакт-параметр должен быть меньше, чем эффективный радиус действия собственного поля электронов: $h < \gamma\beta\lambda/(2\pi)$. Тогда два условия (37) дают одно:

$$r_0 \ll \frac{\gamma\beta\lambda}{2\pi}. \quad (38)$$

Таким образом, общий подход справедлив только при регистрации излучения в плоскости, содержащей траекторию электрона и нормаль к мишени $n_y = 0$ и для пучков, поперечные размеры которых много меньше, чем эффективный радиус действия собственного поля электронов $\gamma\beta\lambda/(2\pi)$. Первое условие не существенно ограничивает общность, так как в плоскости $n_y = 0$ интенсивность излучения максимальна или сравнима с другими направлениями. Второе условие, довольно строгое, физически означает, что размеры сгустка должны быть настолько малы, что вклад в поляризацию мишени всех электронов одинаков. Это означает, что на эксперименте вклад поперечных размеров сгустка в распределение излучения по углам и частотам пренебрежимо мал. При выполнении условия (38) поперечные форм-факторы

$$F_{\mathrm{coh},\,tr} = \left|\iint dy_e dz_e \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_e) f_{tr}\right|^2, \quad (39)$$

$$F_{\mathrm{inc},\,tr} = \iint dy_e dz_e \left|\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_e)\right|^2 f_{tr}, \quad (40)$$

практически неотличимы от единицы: $F_{\mathrm{coh},\,tr} \approx \approx F_{\mathrm{inc},\,tr} \approx 1$ [6]. Заметим, что сравнение теории с экспериментом показало хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых [25] именно в этих условиях.

Если такая мишень используется для диагностики поперечных размеров сгустка или условия таковы, что поперечные размеры вносят вклад в полные распределения интенсивности, то подход с умножением одночастичного распределения на форм-фактор некорректен.

Заключение. Исследован вопрос об учете эффектов когерентности в излучении Смита–Парселла от электронных ультрарелятивистских сгустков. Проведен расчет поля излучения, возбуждаемого сгустком от двумерного фотонного кристалла. На этом примере показано, что общепринятый подход учета эффектов когерентности, основанный на умножении интенсивности излучения от одного электрона на форм-фактор сгустка, работает для неоднородных в поперечном направлении мишеней только при выполнении двух условий: 1) точка наблюдения лежит в плоскости, содержащей траекторию движения сгустка и нормаль к поверхности мишени; 2) радиус сгустка намного меньше эффективного радиуса действия собственного поля движущегося электрона $\gamma\beta\lambda/(2\pi)$.

Первое из этих условий не является критичным, поскольку в этой плоскости интенсивность излучения наибольшая, и оно выполняется в большинстве экспериментов. Второе условие сильно ограничивает область применимости общепринятого подхода: он остается верным только в том случае, когда размеры сгустка не влияют на распределение интенсивности по углам и частотам. Если эти два условия не выполнены, то необходимо последовательно рассчитывать поля излучения от каждого электрона, а потом усреднять его по положениям электронов в сгустке. Расчет изложен в части 3 данной статьи.

Такая разница в двух подходах объясняется возникновением целого набора импакт-параметров даже для одного электрона – каждый электрон сгустка находится на разных расстояниях от разных элементов мишени, по- разному их поляризует, что дает разный вклад в распределение интенсивности по углам и частотам.

Сделанные выводы справедливы для дифракционного излучения или излучения Смита–Парселла от мишеней, которые имеют неоднородности в перпендикулярном направлении к траектории сгустка; именно такого рода мишенями являются широко исследуемые сегодня метаповерхности и фотонные кристаллы.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант # 21-72-00113 (Д. Сергеева, части 2, 3) и грант # 17-72-20013 (А. Тищенко, части 1, 4).

---

1. А. П. Потылицын, Письма в ЖЭТФ **103**, 762 (2016).
2. А. П. Потылицын, Б. А. Алексеев, А. В. Вуколов, М. В. Шевелев, А. А. Балдин, В. В. Блеко, П. В. Каратаев, А. С. Кубанкин, Письма в ЖЭТФ **115**, 474 (2022).
3. R. Kieffer, L. Bartnik, M. Bergamaschi, V. V. Bleko, M. Billing, L. Bobb, J. Conway, M. Forster, P. Karataev, A. S. Konkov, R. O. Jones, T. Lefevre, J. S. Markova, S. Mazzoni, Y. Padilla Fuentes, A. P. Potylitsyn, J. Shanks, and S. Wang, Phys. Rev. Lett. **121**, 054802 (2018).
4. P. Karataev, G. Naumenko, A. Potylitsyn, M. Shevelev, and K. Artyomov, Results in Physics **33**, 105079 (2022).
5. В. П. Шестопалов, *Дифракционная электроника*, Вища школа, Харьков (1976).
6. А. А. Тищенко, Д. Ю. Сергеева, Письма в ЖЭТФ **110**, 636 (2019).
7. П. Тонкаев, Ю. Кившарь, Письма в ЖЭТФ **112**, 658 (2020).
8. Z. Miao, Q. Wu, X. Li, Q. He, K. Ding, Z. An, Y. Zhang, and L. Zhou, Phys. Rev. X **5**, 041027 (2015).
9. A. C. Overvig, S. C. Malek, and N. Yu, Phys. Rev. Lett. **125**, 017402 (2020).
10. Y. Kurman and I. Kaminer, Nature Phys. **16**, 868 (2020).
11. A. Pizzi, G. Rosolen, L. J. Wong, R. Ischebeck, M. Soljačić, T. Feurer, and I. Kaminer, Adv. Sci. **7**, 1901609 (2020).
12. Y. Kurman, R. Dahan, H. H. Sheinfux, K. Wang, M. Yannai, Y. Adiv, O. Reinhardt, L. H. Tizei, S. Y. Woo, and J. Li, Science **372**, 1181 (2021).
13. S. J. Smith and E. M. Purcell, Phys. Rev. **92**, 1069 (1953).
14. V. P. Shestopalov, *The Smith-Purcell effect*, Nova Science Publishers, N.Y. (1998).
15. P. Rullhusen, X. Artru, and P. Dhez, *Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons*, World Scientific, Singapore (1998).
16. A. P. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, *Diffraction Radiation from Relativistic Particles*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer-Verlag, Berlin (2010), v. 239.
17. В. Г. Веселаго, УФН **181**, 1201 (2011).
18. N. Horiuchi, T. Ochiai, J. Inoue, Y. Segawa, Y. Shibata, K. Ishi, Y. Kondo, M. Kanbe, H. Miyazaki, F. Hinode, S. Yamaguti, and K. Ohtaka, Phys. Rev. E **74**, 056601 (2006).
19. S. Yamaguti, J. Inoue, O. Haeberlé, and K. Ohtaka, Phys. Rev. B **66**, 195202 (2002).
20. T. Ochiai and K. Ohtaka, Phys. Rev. B **69**, 125106 (2004).
21. K. Yamamoto, R. Sakakibara, S. Yano, Y. Segawa, Y. Shibata, K. Ishi, T. Ohsaka, T. Hara, Y. Kondo, H. Miyazaki, F. Hinode, T. Matsuyama, S. Yamaguti, and K. Ohtaka, Phys. Rev. E **69**, 045601(R) (2004).
22. T. Ochiai and K. Ohtaka, Opt. Express **13**, 7683 (2005).
23. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, Nucl. Instrum. and Methods B **402**, 206 (2017).
24. D. I. Garaev, D. Yu. Sergeeva, and A. A. Tishchenko, Phys. Rev. B **103**, 075403 (2021).
25. D. Yu. Sergeeva, A. S. Aryshev, A. A. Tishchenko, K. E. Popov, N. Terunuma, and J. Urakawa, Opt. Lett. **46**, 544 (2021).