Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 2, с. 88 – 95

Формирование и классификация скачков и уединенных ударных волн в изэнтропических течениях политропных сплошных сред

К. В. Карельский[+], *А. С. Петросян*[+*1)]

[+]*Институт космических исследований РАН, 117997 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 11 апреля 2022 г.
После переработки 9 июня 2022 г.
Принята к публикации 9 июня 2022 г.

В работе исследованы условия возникновения произвольного скачка в изэнтропическом течении политропной среды. Показано, что скачок газодинамических параметров возникает в результате эволюции автомодельного течения. Введено понятие самофокусирующихся волн Римана. Показано, что произвольный скачок формируется только такими волнами и найдены условия его генерации. Показано, что существует критическое значение скорости, ниже которой скачок не может быть сформирован изэнтропически. Найдено второе критическое значение скорости, при превышении которого скачок формируется только при наличии зоны вакуума. Показано, что существует только два класса уединенных ударных волн: ударные волны, формирующиеся в среде, содержащей зону вакуума, и формирующиеся в непрерывной среде. Показано, что не всякое падение волны Римана приводит к появления ударной волны. Полученные результаты носят общефизический характер, поскольку основаны только на общих свойствах квазилинейных гиперболических систем уравнений.

DOI: 10.31857/S123456782214004X, EDN: iyekxb

1. Введение. Проблема возникновения скачков в газовой динамике является одной из ключевых, как для понимания естественных природных процессов, так и в их математическом моделировании. Понятие произвольного разрыва широко используется в газовой динамике и является ключевым, например, в постановке фундаментальной задачи Римана о распаде разрыва [1, 2]. Особый интерес представляют уединенные ударные фронты, как физические реализации устойчивых скачков в сплошной среде. Теория ударных волн в одномерной газовой динамике существенно опирается на понятие поршня, при движении которого возникает ударный фронт [3–8], на соотношения Ранкина–Гюгонио на ударном фронте и на известное выражение для скорости распространения разрыва. Основные известные результаты получены для распространения и взаимодействия уединенных ударных фронтов с другими возмущениями, оставляя открытым вопрос их возникновения. Такая качественная теория является определяющей в газовой динамике и успешно применяется при решении различных прикладных задач. Тем не менее физическое явление ударной волны широко применяется в многочисленных задачах астрофизики и гелиофизики, определяя свойства течений в таких природных явлениях. В таких случаях часто невозможно определить механизм возникновения ударных фронтов, что ограничивает возможности их изучения. В работе мы предлагаем новые формулировки проблемы возникновения ударных волн и получаем нетривиальную классификацию таких волн. Наше исследование основано на анализе частных автомодельных решений уравнений газовой динамики политропного газа и решении задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана). Для этого мы формулируем общую задачу возникновения произвольного разрыва в одномерной газовой динамике. Полученные результаты о скачках существенно модифицируют решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва, которое, помимо фундаментального интереса в газовой динамике, используется в численных конечно-объемных методах [9]. В работе [10] показано, что использование обобщения решений задачи о распаде произвольного разрыва в таких методах существенно улучшает результаты моделирования.

Под уединенным ударным фронтом мы понимаем частный случай устойчивого скачка физических характеристик течения сплошной среды. Будем рассматривать эволюционирующий уединенный ударный фронт совместно с контактным разрывом. Контактный разрыв и ударный фронт являются неотъемлемыми частями ударной волны, как физическо-

1)e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

го явления. Именно такое представление позволяет идентифицировать наблюдаемый физический процесс ударной волной. Важным следствием такого рассмотрения ударной волны является наличие единственной точки ее зарождения, принадлежащей одновременно ударному фронту и контактному разрыву, т.е. точки их пересечения. Наличие такой точки пересечения в совокупности с постоянством течения на бесконечности, как условия уединенности ударной волны, обеспечивает автомодельность характеристик течения вблизи нее. Таким образом, анализ автомодельных решений вблизи данной точки позволяет исследовать трансформацию изэнтропических течений в уединенную ударную волну и предложить классификацию ударных волн, основанную на их собственных физических свойствах.

В работе: 1) найдены все возможные виды возмущений в изэнтропических процессах, формирующих скачки; 2) найдены условия реализации каждого из полученных возмущений; 3) показано, что любая уединенная ударная волна может быть сформирована найденными возмущениями; 4) найден критерий разбиения ударных волн на два класса, обусловленный исключительно их собственными физическими свойствами, реологией среды и интенсивностью; 5) предъявлена падающая волна Римана, не нарушающая изентропичность течения.

2. Уединенная ударная волна как частный случай скачка. Качественное рассмотрение. В данном параграфе рассмотрим все элементарные автомодельные возмущения, сходящиеся в заданную точку, и изучим все возможные конфигурации их комбинаций в изентропических процессах. Мы перечислим все автомодельные решения, сходящиеся со временем в одну точку и тем самым формирующие заданный скачок.

Уединенная ударная волна будет частным случаем произвольного ненулевого скачка плотности гомоэнтропической сплошной среды $S = S_0$:

$$\left(\hat{u}_a, \hat{\rho}_a\right), \left(\hat{u}_b, \hat{\rho}_b\right), \quad (1)$$

где $\hat{u}_a, \hat{u}_b$ – скорости, а $\hat{\rho}_a, \hat{\rho}_b$ – плотности сплошной среды на скачке, причем $\hat{\rho}_a \neq \hat{\rho}_b$. Направим систему координат так, чтобы область пространства, содержащая среду меньшей плотности, находилась справа и выберем начало системы координат $O\,(0,0)$, чтобы среда в этой области покоилась (рис. 1). Введем новые обозначения с индексом 1 и 0, индекс 1 соответствует значению параметров слева от скачка, 0 – справа:

$$\left(\hat{u}_1, \hat{\rho}_1\right), \left(\hat{u}_0, \hat{\rho}_0\right), \quad (2)$$

где $\hat{\rho}_1 > \hat{\rho}_0$ и $\hat{u}_0 = 0$.

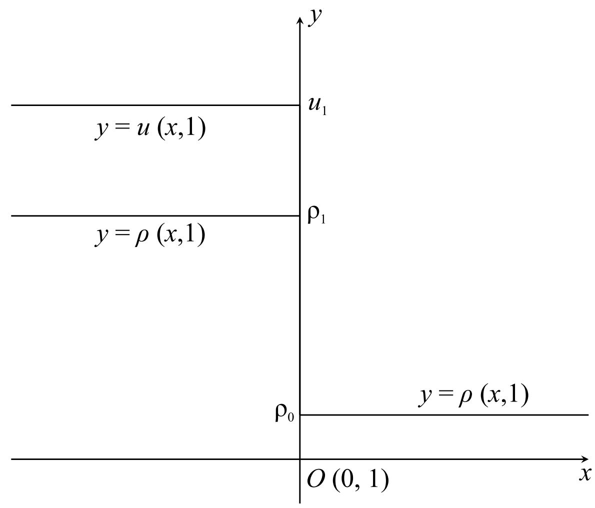

Рис. 1. Произвольный скачок в выбранной системе координат при $t = 1, \hat{u}(x,1) = \hat{u}_1, \hat{\rho}(x,1) = \hat{\rho}_1$ для $x < 0$ и $\hat{u}(x,1) = \hat{u}_0, \hat{\rho}(x,1) = \hat{\rho}_0$ для $x \geq 0$

Частным случаем такого скачка является уединенная ударная волна. Согласно второму началу термодинамики ударный фронт должен набегать на покоящуюся среду, поскольку ударных волн разряжения не может существовать, а плотность среды слева больше, чем справа. Поскольку зарождение ударной волны рассматривается в гомоэнтропической среде, а энтропия на фронте необходимо растет, область за ударным фронтом должна быть отделена от области постоянной энтропии. И, следовательно, за фронтом уединенной ударной волны следует ее неотъемлемая часть – контактный разрыв. Полученная таким образом конфигурация течения является уединенной ударной волной (рис. 2), где $D > 0$ – скорость распространения фронта ударной волны, u_1 – скорость контактного разрыва, а $\rho_1 = \hat{\rho}_1$, $\rho_0 = \hat{\rho}_0$ – плотности сплошной среды. Отметим, что по определению контактного разрыва его скорость совпадает как со скоростью внутри ударной волны, так и скоростью невозмущенного потока, находящегося слева. Таким образом, в выбранной системе координат произвольный скачок плотности становится ударной волной, когда $\hat{u}_1 = u_1$. Поскольку ударный фронт движется в положительном направлении по неподвижной среде, скорость контактного разрыва строго положительна. Определим значение u_1 из решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва [1, 11]. Решение этой задачи содержит пять различных конфигураций, причем для набегающего в положительном направлении более плотного потока только две конфигурации содержат ударные волны: 1) волна разряжения и правая ударная волна, 2) две ударные вол-

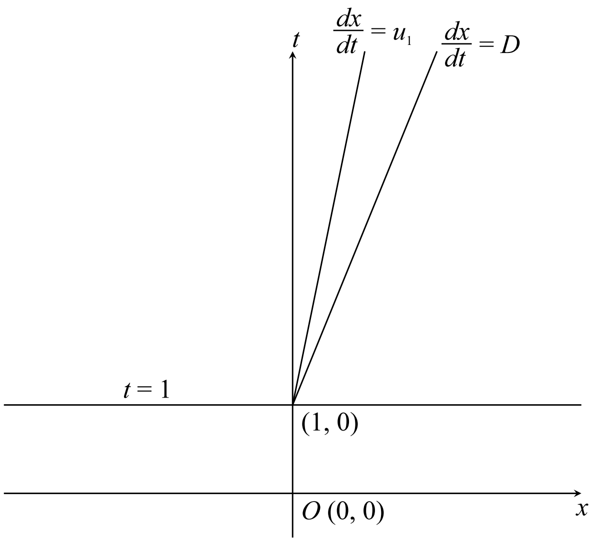

Рис. 2. Уединенная ударная волна, распространяющаяся вправо по покоящемуся газу. $u_1 > 0$ – скорость распространения контактного разрыва, $D > 0$ – скорость распространения фронта ударной волны

ны. При увеличении скорости набегающего потока интенсивность волны разряжения в первой конфигурации падает вплоть до полного вырождения волны разряжения. Полное вырождение волны разряжения можно формально трактовать как возникновение левой ударной волны нулевой интенсивности (дальнейшее увеличение скорости набегающего потока влечет рост интенсивности и переход решения в конфигурацию 2). Именно, граничное значение скорости набегающего потока, разделяющее указанные конфигурации, определяет правую уединенную волну [12]:

$$u_1 = (1 - \varkappa)\, c_0 \left(\sqrt{\frac{(\rho_1/\rho_0)^\gamma + \varkappa}{1 + \varkappa}} - \sqrt{\frac{1 + \varkappa}{(\rho_1/\rho_0)^\gamma + \varkappa}} \right), \tag{3}$$

где $\varkappa = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$, γ – показатель адиабаты, c_0 – скорость звука перед фронтом ударной волны.

Приведенные рассуждения сводят задачу о формировании уединенной ударной волны к нахождению возмущения изентропического течения, сходящего в точку и соединяющего две полубесконечные области постоянных гомоэнтропических течений. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо использовать течения с характеристиками, сходящимися в точку и примыкающие к постоянным потокам. Характеристики постоянных потоков являются параллельными прямыми линиями, следовательно, искомое возмущение должно обладать так же прямыми характеристиками. Всего три вида течений в политропных средах обладают прямыми характеристиками, а именно: ударные волны, контактные разрывы и волны Римана. Ударные волны и контактные разрывы не могут быть использованы в силу требования гомоэнтропичности и однородности.

3. Скачок газодинамических параметров в сплошной среде, как результат эволюции автомодельных течений. Таким образом, формирование произвольного скачка плотности и уединенной ударной волны в частности определяется возмущением, состоящим исключительно из волн Римана, сходящихся в одну точку. Требование сходимости характеристик ограничивает класс возможных возмущений волнами сжатия. Условие схождения Римановых волн сжатия в одну точку эквивалентно требованию их автомодельности. Назовем автомодельные волны сжатия псевдоцентрированными волнами Римана по аналогии с хорошо известными центрированными волнами Римана, исходящими из одной точки и, следовательно, являющимися волнами разряжения.

Псевдоцентрированные волны Римана могут быть получены из центрированных волн Римана формальной заменой времени t на противоположную величину $-t$. Очевидно, с точностью до этой замены псевдоцентрированные волны наследуют все свойства центрированных волн Римана. Будем различать два вида псевдоцентрированных волн: обращенных вперед, то есть распространяющихся вдоль характеристик $dx/dt = u + c$ и волн, распространяющихся назад, вдоль характеристик $dx/dt = u - c$. Волны, распространяющиеся вперед, сохраняют инвариант Римана $R = u - 2c/(\gamma - 1)$ в области распространения, волны, обращенные назад – инвариант Римана $S = u + 2c/(\gamma - 1)$. Скорость в псевдоцентрированных волнах линейно убывает независимо от направления распространения, а скорость звука, сохраняя линейную зависимость, растет в волне, обращенной назад, и падает в волне, обращенной вперед. Так же, как и в случае центрированных волн, в одну точку может приходить не более одной псевдоцентрированной волны одного класса. При этом в силу очевидного неравенства $u + c > u - c$ последовательность волн разного класса жестко регламентирована – волна, обращенная назад следует за волной, обращенной вперед.

Таким образом, существуют четыре вида возмущений, приходящих в одну точку и граничащих с постоянными течениями: 1) псевдоцентрированная волна Римана, обращенная вперед, 2) псевдоцентрированная волна Римана, обращенная назад, 3) конфигурация двух псевдоцентрированных волн Римана – обращенной вперед и обращенной назад, и

4) конфигурация двух псевдоцентрированных волн Римана, разделенных областью вакуума. Первые два вида возмущений не могут быть реализованы для формирования уединенной ударной волны. Первый – в силу хорошо известных соотношений между политропой и ударной адиабатой Гюгонио, второй – по причине роста скорости звука, а вместе с ней и, очевидно, плотности внутри волны.

Получим условия, при которых реализуется каждая из последних двух указанных конфигураций, формирующих уединенную ударную волну. В силу того, что уединенная ударная волна является частным случаем произвольного скачка для решения поставленной задачи, сначала определим условия формирования произвольного скачка. Действительно, полученные четыре вида возмущений единственно возможные в изэнтропических процессах, формирующих скачок в политропных средах. Отметим, что нарушение условия изэнтропичности процесса формирования скачка расширяет класс возмущений, приходящих в одну точку и граничащих с постоянными течениями до бесконечного множества, благодаря фронтам ударных волн, обращенных вперед и назад. Количество таких фронтов, сходящихся в одну точку, не ограничено, регламентирована лишь их последовательность: любой фронт левой ударной волны находится правее любого фронта правой ударной волны. Кроме того, наличие ударного фронта делает совместными конфигурации возмущений, содержащие две и более самофокусирующиеся волны одного класса. Таким образом, в общем случае неизэнтропического процесса возмущение состоит из набора ударных фронтов, контактного разрыва и самофокусирующихся волн обоих классов, сходящихся в одной точке.

Возвращаясь к изэнтропическим процессам, важно отметить, что произвольный скачок может быть сформирован также и первыми двумя видами возмущений, соответствующими единичным самофокусирующимся волнам. Однако первые два случая не нуждаются в отдельном рассмотрении, поскольку для формирования произвольного разрыва являются частным случаем третьего возмущения – слияния R и S самофокусирующихся волн. Кроме того, строгое неравенство в соотношении для плотностей на произвольном скачке является избыточным и используется лишь в структуре формирования уединенной ударной волны.

Будем считать точку $O\,(0,t_0)$ точкой возникновения скачка. Обозначим лучи, соответствующие крайним характеристикам самофокусирующихся волн, следующим образом: OA, OB, OC, OD. Данные лучи разбивают нижнюю полуплоскость на пять областей, которые пронумеруем римскими цифрами, слева направо.

Таким образом, получены все возможные конфигурации автомодельных возмущений, формирующих в результате изэнтропического процесса скачок в заданной точке $O\,(0,t_0)$.

4. Генерация скачка двумя самофокусирующимися волнами Римана, разделенными зоной вакуума. В настоящем разделе получим условия реализации конфигурации возмущения, состоящего из двух самофокусирующихся волн и зоны вакуума между ними.

Укажем значения физических величин в каждой полученной области (рис. 3). В области I имеем постоянный поток и следующие значения переменных: $u = u_1$, $p = p_1$, $c = c_1$. В области II имеем самофокусирующуюся R волну Римана и, следовательно, выполняются соотношения:

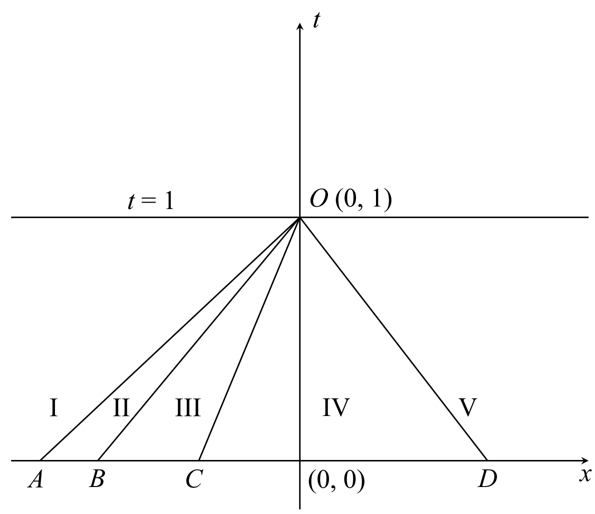

Рис. 3. Кумуляция двух самофокусирующихся волн Римана, разделенных зоной вакуума III, $\rho \equiv 0$

$$R \equiv u - \frac{2}{\gamma-1}\,c = \text{const}, \tag{4}$$

$$u_{\mathrm{II}} - \frac{2}{\gamma-1}c_{\mathrm{II}} = u_1 - \frac{2}{\gamma-1}\,c_1. \tag{5}$$

В области III – вакуум и, следовательно, $p_{\mathrm{III}} \equiv 0$, $c_{\mathrm{III}} \equiv 0$. В области IV имеем самофокусирующуюся S волну Римана и, следовательно, выполняются соотношения:

$$S \equiv u + \frac{2}{\gamma-1}\,c = \text{const}, \tag{6}$$

$$u_{\mathrm{IV}} + \frac{2}{\gamma-1}\,c_{\mathrm{IV}} = u_0 + \frac{2}{\gamma-1}\,c_0 = \frac{2}{\gamma-1}\,c_0. \tag{7}$$

В области V – постоянный поток: $u = u_0 = 0$, $p = p_0$, $c = c_0$. Уравнения, задающие лучи OA, OB, OC, OD имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + c_1, \quad \frac{dx}{dt} = u_1 - \frac{2}{\gamma-1}\, c_1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{\gamma-1}\, c_1, \quad \frac{dx}{dt} = c_0. \tag{8}$$

Запишем условия совместности данной конфигурации:

$$-(u_1 + c_1) < -\left(u_1 - \frac{2}{\gamma-1}\, c_1\right) < < -\frac{2}{\gamma-1}\, c_0 < 0 < c_0. \tag{9}$$

Учитывая, что $c_1 \geq c_0$ и $u_1 > 0$, единственным нетривиальным условием является

$$u_1 - \frac{2}{\gamma-1}\, c_1 > \frac{2}{\gamma-1}\, c_0. \tag{10}$$

Откуда $u_1 > \frac{2}{\gamma-1}(c_0 + c_1)$, и окончательно

$$u_1 > \frac{2}{\gamma-1}\, c_1 (1 + c'), \tag{11}$$

где $c' = c_0/c_1$ – отношение скоростей слабых возмущений на скачке.

Учитывая термодинамические соотношения, обеспеченные условием политропности сплошной среды

$$p' = c'^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad c' = p'^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \tag{12}$$

где $p' = p_1/p_0$ – отношение давлений на скачке, неравенство (11) принимает вид:

$$u_1 > \frac{2}{\gamma-1} c_1 \left(1 + p'^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right). \tag{13}$$

Таким образом, при скоростях, удовлетворяющих найденному неравенству (13) все скачки формируются течением, содержащим зону вакуума.

5. Генерация скачка двумя самофокусирующимися волнами Римана в односвязной области. В данном параграфе найдены условия реализации конфигурации возмущений, состоящих из двух самофокусирующихся волн, разделенных зоной постоянного течения.

Будем полагать, что неравенство (13) не выполняется и, следовательно, значение скорости ограничено сверху соответствующим выражением. Укажем значения физических величин в каждой из пяти полученных областей (рис. 4).

В области I имеем постоянный поток и следующие значения переменных: $u = u_1$, $p = p_1$, $c = c_1$. В области II имеем самофокусирующуюся R волну Римана и, следовательно, выполняются соотношения:

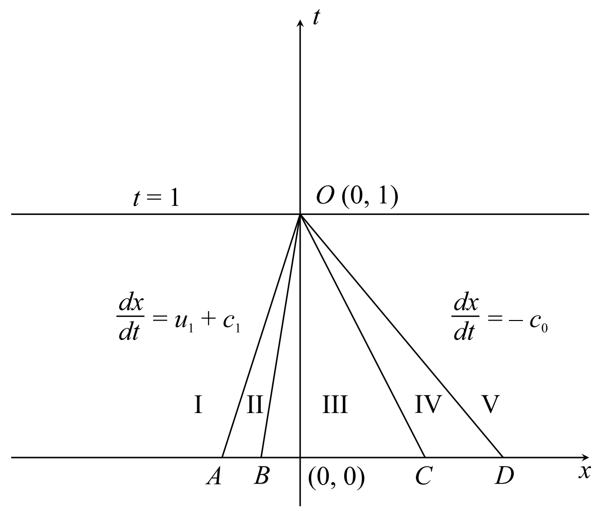

Рис. 4. Кумуляция двух самофокусирующихся волн Римана, разделенных постоянным течением в зоне III, $\rho_3 > 0$, $u_3 > 0$

$$R \equiv u - \frac{2}{\gamma-1} c = \text{const}, \tag{14}$$

$$u_{\text{II}} - \frac{2}{\gamma-1}\, c_{\text{II}} = u_1 - \frac{2}{\gamma-1}\, c_1. \tag{15}$$

В области III – постоянный поток и, следовательно, $p = p_{\text{III}} \equiv \text{const}$, $c = c_{\text{III}} \equiv \text{const}$, $u = u_{\text{III}} \equiv \text{const}$. В области IV имеем самофокусирующуюся S волну Римана и, следовательно, выполняются соотношения:

$$S \equiv u + \frac{2}{\gamma-1}\, c = \text{const}, \tag{16}$$

$$u_{\text{IV}} + \frac{2}{\gamma-1}\, c_{\text{IV}} = u_0 + \frac{2}{\gamma-1}\, c_0 = \frac{2}{\gamma-1} c_0. \tag{17}$$

В области V – постоянный поток: $u = u_0 = 0, p = p_0$, $c = c_0$.

Уравнения, задающие лучи OA, OB, OC, OD имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + c_1, \quad \frac{dx}{dt} = u_{\text{III}} + c_{\text{III}}, \quad \frac{dx}{dt} = u_{\text{III}} - c_{\text{III}}, \quad \frac{dx}{dt} = -c_0. \tag{18}$$

Запишем условия совместности данной конфигурации:

$$-(u_1 + c_1) < -(u_{\text{III}} + c_{\text{III}}) < 0 < u_{\text{III}} - c_{\text{III}} < c_0. \tag{19}$$

Условия совместности тривиальны в случае единственного набора констант $(u_{\rm III}, c_{\rm III})$, $u_{\rm III} > 0$, $c_{\rm III} < < c_0$, удовлетворяющего условиям постоянства соответствующих инвариантов Римана:

$$c_{\rm III} = \frac{1}{2}(c_1 + c_0) - \frac{\gamma - 1}{4} u_1, \tag{20}$$

$$u_{\rm III} = \frac{1}{\gamma - 1}(c_0 - c_1) + \frac{1}{2} u_1, \tag{21}$$

$$u_1 > \frac{2}{\gamma - 1} c_1 \left(1 - p'^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right). \tag{22}$$

Таким образом, при скоростях, удовлетворяющих условию (22) и не удовлетворяющих условию (13) все ступенчатые разрывы изентропически формируются в результате слияния двух самофокусирующихся волн Римана в односвязной политропной среде.

Приведенные выше выкладки позволяют сформулировать три важных утверждения:

Утверждение 1. Скачок скорости на произвольном разрыве, сформированный в политропной среде изэнтропическим процессом, ограничен снизу и необходимо превышает

$$\Delta u_{cr} \equiv \frac{2}{(\gamma - 1)} c_1 \left[1 - p'^{\frac{(1-\gamma)}{2\gamma}}\right]. \tag{23}$$

Следовательно, ограничено и число Маха $M_1 \equiv \equiv u_1/c_1$ набегающего потока:

$$M_1 \geq 2 \frac{1 - p'^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}}{\gamma - 1}. \tag{24}$$

Утверждение 2. Произвольный разрыв, сформированный изэнтропическим процессом и несущий на себе скачок скорости, превышающий

$$\Delta u_{cr} \equiv \frac{2}{\gamma - 1} c_1 \left[1 + p'^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right], \tag{25}$$

является следствием нарушения односвязности формирующей его политропной среды.

Утверждение 3. Скачок может быть сформирован неизэнтропическим процессом лишь в сжимающейся политропной среде: $M_1 > 0$.

Утверждение 3 является прямым следствием запрета ударных волн разряжения, что в свою очередь вытекает из требования второго начала термодинамики, постулирующего рост энтропии консервативной термодинамической системы.

Выше изучены условия возникновения скачков плотности ограниченной интенсивности. Поскольку в противном случае скачок, возникая и исчезая в один и тот же момент времени, является вырожденным. Действительно в рамках принятых условий неограниченность скачка плотности означает отсутствие среды в полубесконечной области справа, т.е. равенство нулю плотности справа от скачка. Такой скачок реализуется в рамках автомодельности единственным образом: правой самофокусирующейся волной Римана, распространяющейся в область вакуума. После фокусировки такой волны в точке формирования скачка, только что сформировавшийся скачок мгновенно эволюционирует в центрированную волну разряжения, обращенную влево и граничащую с зоной вакуума. Данный вырожденный скачок представляет самостоятельный интерес, поскольку его существование идет в разрез с общепринятой точкой зрения, что пересечение характеристик одного семейства необходимо ведет к производству энтропии и, следовательно, к нарушению непрерывности течения.

Сформулированные утверждения исчерпывают условия существования автомодельных возмущений, формирующих скачки в политропных средах.

6. Формирование уединенной ударной волны двумя самофокусирующимися волнами Римана в односвязной области. Уединенная ударная волна рассматривается как результат эволюции произвольного скачка и находятся условия, при которых реализуется уединенная ударная волна. Мы используем решение задачи о распаде произвольного разрыва. Решение этой задачи содержит следующие конфигурации: две волны разрежения; две ударные волны, разделенные контактным разрывом; волна разрежения и ударная волна; ударная волна и волна разрежения; а также условия реализации каждой конфигурации. Уединенная ударная волна является границей двух конфигураций: двух ударных волн, разделенных контактным разрывом, и волны разрежения – ударной волны, разделенных контактным разрывом. Пересечение условий реализации этих двух конфигураций дает условие возникновения уединенной ударной волны. Поскольку ударную волну можно отнести к обеим конфигурациям при условии, что левая ударная волна вырождается в постоянный поток в конфигурации двух ударных волн, а волна разрежения вырождается в постоянный поток в конфигурации волны разрежения и ударной волны.

Перейдем далее к изучению конкретного частного случая произвольного скачка – ударной волны. В настоящем разделе получим условия существования автомодельных возмущений, формирующих уединенную ударную волну в результате изэнтропического процесса, как в односвязной области, так и в области, содержащей зону вакуума. Полученные условия позволят ввести естественную классификацию уединенных ударных волн по происхождению.

Ограничения на скорость набегающего потока, полученные в леммах 1 и 2, выполняются для любых скачков физических величин. Следовательно, при учете соотношения 3, выделяющего из общего класса скачков непосредственно уединенные ударные волны, эти ограничения обеспечат реализацию заданной конфигурации возмущения.

Перепишем выражение для скорости, определяемое соотношением (3), в виде:

$$u_1 = (1-\varkappa)c_0\left[\sqrt{\frac{p'+\varkappa}{1+\varkappa}} - \sqrt{\frac{1+\varkappa}{p'+\varkappa}}\right]. \tag{26}$$

И наложим условия (13) и (22):

$$\frac{2}{\gamma-1}c_1\left[1-p'^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}\right] \le u_1 \le \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(c_1+c_0\right). \tag{27}$$

Тогда, производя цепочку преобразований, получим

$$\sqrt{\frac{k+2}{(k+1)^3}}k^2\left[p'^{\frac{1}{k+2}}-1\right] \le \frac{p'-1}{\sqrt{p'+\varkappa}} \le$$
$$\le \sqrt{\frac{1}{(k+3)^3(k+2)}}k\left(p'^{\frac{1}{k+2}}+1\right). \tag{28}$$

Первая часть соотношения (28) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4. Любая уединенная ударная волна появляется в изентропическом потоке политропной среды в результате кумуляции двух псевдоцентрированных (самофокусирующихся) волн Римана PCR, PCS.

Доказательство следует из выполнения первой части неравенства (28):

$$\sqrt{\frac{k+2}{(k+1)^3}}k^2\left[p'^{\frac{1}{k+2}}-1\right] \le \frac{p'-1}{\sqrt{p'+\varkappa}} \tag{29}$$

для любых $p' \ge 1$. Действительно, $p' = 1$ – очевидный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{k+2}{(k+1)^3}}k^2 = \frac{p'-1}{\left[p'^{\frac{1}{k+2}}-1\right]\sqrt{p'+\varkappa}}, \tag{30}$$

а функция

$$F(p') \equiv \frac{p'-1}{\left[p'^{\frac{1}{k+2}}-1\right]\sqrt{(p'+\varkappa)}} \tag{31}$$

монотонно возрастает.

Из второй части соотношения (28) следует, что в случае его нарушения односвязность области формирования уединенной ударной волны теряется и имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5. Любая уединенная ударная волна, обладающая достаточной интенсивностью $p' \ge \ge p'_{cr}$ появляется в изэнтропическом потоке политропной среды в результате кумуляции двух псевдоцентрированных волн Римана PCR, PCS, разделенных зоной вакуума.

Неравенство

$$\frac{p'-1}{\sqrt{\rho'+\varkappa}} \ge \sqrt{\frac{1}{(k+1)^3(k+2)}}k\left(p'^{\frac{1}{k+2}}+1\right) \tag{32}$$

выполнено $\forall p' \ge p'_{cr} > 1$, где p'_{cr} – единственный корень уравнения

$$f(p') \equiv \frac{p'-1}{\left(p'^{\frac{1}{k+2}}+1\right)\sqrt{p'+\varkappa}} = \sqrt{\frac{1}{(k+1)^3(k+2)}}k \tag{33}$$

с монотонно возрастающей функцией $f(p')$, $p' > 1$ в левой части. Показано, что любая уединенная ударная волна может быть сформирована изэнтропическим течением, причем, в рамках автомодельности единственным образом. Полученные выше конфигурации возмущений, реализующие данные течения, и условия их реализации позволяют выделить два класса ударных волн, как физических явлений. Назовем ударные волны, сформированные возмущениями, содержащими зону вакуума, – высокоэнтропийными ударными волнами, поскольку скачок энтропии в них ограничен только снизу. Ударные волны, возникающие вследствие эволюции возмущения, занимающего односвязную область пространства – односвязными ударными волнами. Скачок энтропии в этом классе варьируется, начиная от бесконечно малого, и ограничен сверху. Данная классификация является результатом рассмотрения механизма их возникновения.

Таким образом, в рамках предположения автомодельности течения, существует единственный механизм возникновения уединенной ударной волны, реализуемый процессом кумуляции самофокусирующихся волн Римана. Следовательно, уединенная ударная волна не может возникнуть в результате падения только одной волны Римана. Более того, не всякое падение волны Римана приводит к появлению течения, содержащего ударный фронт. На рисунке 5 приведен пример правой самофокусирующейся волны Римана, эволюционирующей в изэнтропическое течение, содержащее только левую волну разряжения.

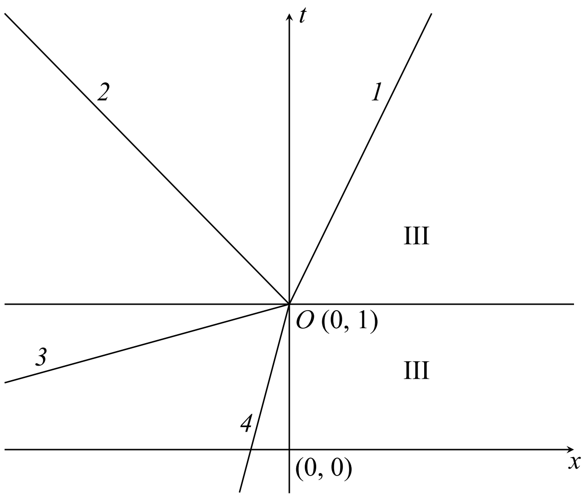

Рис. 5. Эволюция правой самфокусирующейся волны Римана в левую центрированную волну Римана без образования ударного фронта: *1* – $\frac{dx}{dt} = u_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_1$; *2* – $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_1$; *3* – $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_1$; *4* – $\frac{dx}{dt} = u_1 - \frac{2}{\gamma-1} c_1$. Зона III – зона вакуума: $\rho_3 = c_3 \equiv 0$, $u_+ = \frac{\gamma-1}{2} u_1 + c_1$, $u_- = \frac{\gamma-1}{2} u_1 - c_1$

7. Заключение. В работе изучены механизмы изэнтропических процессов формирования скачков в политропных средах. Изучены свойства финитных непрерывных автомодельных решений – самофокусирующихся волн Римана. Сформулирована и решена задача о формировании газодинамического скачка в политропной среде. Найдены волновые картины возмущений, формирующих скачки и получены условия их реализации. Предьявлены критические значения скоростей набегающего потока, разделяющие область параметров на интервалы, соответствующие каждой волновой картине. Показано, что существует критическое значение скорости, ниже которой скачок не может быть сформирован изэнтропически. Найдено второе критическое значение скорости, при превышении которого скачок формируется только при наличии зоны вакуума. Показано, что любая уединенная ударная волна возникает в изэнтропическом потоке в результате падения двух самофокусирующихся волн Римана. Найдены условия, при которых область формирования уединенной ударной волны содержит зону вакуума. Предложено разделение ударных волн на два класса, высокоэнтропийный и односвязный, исходя из механизма их возникновения. Все обсуждаемые в работе результаты получены для случая нестационарной одномерной газовой динамики. Однако, следует отметить, что эти результаты обобщаются естественным образом на случай произвольной квазилинейной системы гиперболических уравнений в частных производных, например, для описания двумерных стационарных течений сжимаемого газа и течений, описываемых уравнениями "мелкой воды" [13].

1. B. Riemann, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **8**, 43 (1859).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, М. (2015).
3. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Физматлит, М. (2008).
4. С. П. Дьяков, ЖЭТФ **27**, 288 (1954).
5. В. М. Конторович, ЖЭТФ **33**, 1525 (1957).
6. Н. М. Кузнецов, УФН **159**, 493 (1989).
7. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, В. Е. Фортов, С. И. Анисимов, А. М. Опарин, Письма в ЖЭТФ **90**, 28 (2009).
8. Г. Г. Черный, *Газовая динамика*, Наука, М. (1988).
9. R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
10. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, Rus. J. Num. Anal. Math. Model **29**, 179 (2014).
11. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М. (1978).
12. Р. Курант, К. Фридрихс, *Сверхзвуковое течение и ударные волны*, Издательство иностранной литературы, М. (1950).
13. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, ЖЭТФ **143**, 779 (2013).