Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 2, стр. 81 — 84 25 января 1992 г.

ОБОБЩЕНИЕ ДИАД НЬЮМЕНА-ПЕНРОУЗА И ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СУПЕРМЕМБРАН В 11-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А.Бандос, А.А.Желтухин

Харьковский физико-технический институт АН Украины
310108, Харьков

Поступила в редакцию 10 декабря 1991 г.

Предложена твисторподобная формулировка для супермембран в 11-мерном пространстве ($D = 11$). Введены необходимые для ковариантного квантования спинорные гармоники, обобщающие на случай $D = 11$ диады Ньюмена–Пенроуза.

1. Ковариантное квантование $D = 10$ суперструн и $D = 11$ супермембран упирается в проблему ковариантного описания κ-симметрии [1]. Недавно эта проблема была решена для нуль суперструн и нуль супермембран в $D = 4$ [2]. Ключевым моментом подхода [2] является использование нового твисторподобного представления интеграла действия нуль супер-p-бран ($p = 0, 1, 2, 3$), включающего поля подвижного репера Картана, реализованные посредством коммутирующих спинорных переменных T_α, O_α - диад Ньюмена–Пенроуза [3] или, эквивалентно, лоренцевых гармоник v_α^-, v_α^+ [4]. В недавней работе [5] на основе обобщения диад на случай $D = 10$ [6] была предложена новая твисторподобная формулировка суперструны Грина–Шварца. Поскольку супермембрана в $D = 11$ является альтернативной основой для единой теории взаимодействий, проблема их ковариантного описания вызывает большой интерес [7]. В настоящей работе мы предлагаем твисторподобную формулировку для действия супермембран в $D = 11$, основанную на обобщении диад Ньюмена–Пенроуза (лоренцевых гармоник) на случай $D = 11$.

2. Предлагаемое обобщение твисторподобного функционала действия суперструн [5] на случай протяженных суперсимметричных объектов с $p > 1$ (супер-p-бран) в D-мерном пространстве имеет вид

$$S_{D,N,p} = -\int d\xi^{p+1}[J^\mu_m \omega^m_\mu - ce] + S^{WZ}_{D,N,p} =$$

$$= \int d\xi^{p+1} (\det e^{\mu}_{f})^{-1} [-(\alpha')^{-1/2} e^{\mu}_{f} \omega^{m}_{\mu} u^{[f]}_{m} + c] + S^{WZ}_{D,N,p}, \qquad (1)$$

где $J^{\mu}_{m} (m = 0, 1..., D-1;\ \mu = 0, ..., p)$ - компоненты ковариантной листовой векторной плотности тока супер-p-браны, определяемой соотношением

$$J^{\mu}_{m} = (\alpha')^{-1/2} e\, e^{\mu}_{f}(\xi)\, u^{[f]}_{m}(\xi), \quad e^{-1} \equiv (\det e^{\mu}_{f}), \ (f = 0, ..., p), \qquad (2)$$

e^{μ}_{f} - обратная листовая "тетрада", c - безразмерная ("космологическая") константа и $d\xi^{\mu}\omega^{m}_{\mu} \equiv d\xi^{\mu}(\partial_{\mu}x^{m} - i\partial_{\mu}\Theta^{I} C\Gamma^{m}\Theta^{I})$ - суперсимметричная форма Картана для N-расширенной глобальной суперсимметрии $(I = 1, ..., N)$. Посредством $S^{WZ}_{D,N,p}$ в (1) обозначен весс-зуминовский член для супер-p-браны в D-мерии. Он имеет хорошо известную форму [8] и его существование накладывает жесткие ограничения на допустимые значения "триады" (D, N, p).

В (1), (2) $u^{(f)}_{m}$ обозначают набор из $(p+1)$ касательных к гиперлисту векторов подвижного ортонормированного репера $u^{(n)}_{m} \equiv (u^{(0)}_{m}, u^{(1)}_{m}, ..., u^{(D-1)}_{m}) \equiv (u^{(f)}_{m}(\xi), u^{(i)}_{m}(\xi))$

$$u^{(n)}_{m} u^{m(k)} = \eta^{(n)(k)} = \mathrm{diag}(1, -1, ..., -1). \qquad (3)$$

Условия (3) означают, что среди D^2-компонент векторов $u^{(n)}_{m}$ только $D(D-1)/2$-компонент являются независимыми и, следовательно, в действии (1) векторы $u^{(f)}_{m}$ не могут рассматриваться как независимые динамические переменные. Основная идея твисторно-гармонического подхода [9,4,2] состоит во введении спинорных лоренц-гармонических переменных [2,4–6], параметризующих векторы $u^{(n)}_{m}$ согласно общему закону

$$u^{(n)}_{m} \equiv \frac{1}{2^{\nu}} U^{\hat{a}}_{\hat{\alpha}} (C\Gamma_{m})^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} U^{\hat{b}}_{\hat{\beta}} (\Gamma^{(n)} C^{-1})_{\hat{a}\hat{b}}. \qquad (4)$$

Условия (3) тогда автоматически выполняются, если $2^{\nu} \times 2^{\nu}$ матрица лоренц-гармонических переменных $U^{\hat{a}}_{\hat{\alpha}}$ удовлетворяет условиям гармоничности, форма которых меняется в зависимости от значения D; $\nu = [D/2]$, или, альтернативно $\nu = D/2 - 1$ для случая четных D и вейлевских спиноров. После подстановки представления (4) в функционал (1), мы получаем твистороподобное действие лоренц-гармонической формулировки супер-p-бран.

Условия гармоничности уменьшают число $2^{\nu} \times 2^{\nu}$ независимых степеней свободы, содержащихся в $U^{\hat{a}}_{\hat{\alpha}}$ до размерности соответствующей группы Лоренца $SO(1, D-1)$ [2,4–6], совпадающей с числом $D(D-1)/2$ независимых компонент векторов $u^{(n)}_{m}$ (3). Вследствие инвариантности действия (1) относительно калибровочных преобразований из подгруппы $SO(1,p) \times SO(D-p-1)$ группы $SO(1, D-1)$, число независимых степеней свободы лоренцевых гармоник понижается до размерности фактор пространства $SO(1, D-1)/SO(1,p) \times SO(D-p-1)$, равной $(D-p-1)(p+1)$. Тогда полное число дополнительных к $x^{m}(\xi)$ независимых переменных из $U^{\hat{a}}_{\hat{\alpha}}$ и e^{μ}_{f}, содержащихся в действии (1) равно $D(p+1)$ и совпадает с числом компонент $(p+1)$ касательных к мировому гиперлисту векторов $\partial_{\mu}x^{m}(\xi)$ (или ω^{m}_{μ}). Это отражает тот факт, что векторы $\partial_{\mu}x^{m}(\xi)$ (или ω^{m}_{μ}) разлагаются по векторам $u^{(f)}_{m}$ с коэффициентами зависящими от e^{μ}_{f} и наоборот. Явный вид этих выражений можно найти из уравнений движения, получающихся при варьировании действия (1), аналогично случаю струн [10]. После решения этих уравнений переменные $u^{(f)}_{m}$ и e^{μ}_{f} могут быть исключены из функционала действия, который в результате примет обобщенную форму Дирака–Намбу–Гото (без учета $S^{WZ}_{D,N,p}$).

3. Наибольший интерес представляет твисторно-гармоническая формулировка супермембраны $(p = 2)$, движущейся в 11-мерном пространстве Минковского.

В этом случае спинорные лоренц-гармонические переменные параметризуют фактор-пространство $SO(1,10)/SO(1,2)\times SO(8)$ и образуют 32×32 матрицу $U_{\hat\alpha}^{\hat a}=(v_{\hat\alpha A}^{a}, v_{\hat\alpha \dot A a})$ $(a,b=1,2$ - спинорные индексы $SO(1,2)$; $A,B=1,...,8$; $\dot A,\dot B=1,...,8$ - s- и c-спинорные индексы $SO(8)$, см [10], $\hat a=\begin{pmatrix} a, & \\ a & \dot A a\end{pmatrix}$ - совокупный спинорный индекс $SO(1,2)\times SO(8))$ и ограничены следующими условиями гармоничности

$$U_{\hat\alpha}^{\hat a}C^{\hat\alpha\hat\beta}U_{\hat\beta}^{\hat b}=C^{\hat a\hat b},\quad U_{\hat\alpha}^{\hat a}(C\Gamma_{m_1m_2})^{\hat\alpha\hat\beta}U_{\hat\beta}^{\hat b}(\Gamma^{(n)}C^{-1})_{\hat a\hat b}=0$$

$$U_{\hat\alpha}^{\hat a}(C\Gamma_{m_1...m_5})^{\hat\alpha\hat\beta}U_{\hat\beta}^{\hat b}(\Gamma^{(n)}C^{-1})_{\hat a\hat b}=0. \tag{5}$$

устраняющими $496+11+462=969$ $(=1024-55)$ независимых степеней свободы из гармонической матрицы. В результате гармоники $v_{\hat\alpha A}^{a}$, $v_{\hat\alpha\dot A a}$ несут $55=\dim SO(1,10)$ независимых степеней свободы[1)], из которых $31=3+28$ - чисто калибровочные в силу требования $SO(1,2)\times SO(8)$ калибровочной инвариантности. Первое из соотношений (5) позволяет построить обратную гармоническую матрицу в терминах тех же переменных $v_{\hat\alpha A}^{\hat a}$, $v_{\hat\alpha\dot A a}$: $(U^{-1})_{\hat b}^{\hat\beta}=(-C^{\hat\beta\hat\alpha}\epsilon_{ba}v_{\hat\alpha A}^{a}, C^{\hat\beta\hat\alpha}\epsilon^{ba}v_{\hat\alpha\dot A a})$. (Мы используем следующее представление для матрицы зарядового сопряжения и γ-матриц в $D=11$: $C^{\hat a\hat b}=-C^{\hat b\hat a}=\mathrm{diag}(\epsilon^{ab}\delta_{AB},-\epsilon_{ab}\delta_{\dot A\dot B})$, $\Gamma^{(m)}\equiv(\Gamma^{(f)},\Gamma^{(i)})$, $\Gamma^{(f)}\equiv(\Gamma^0,\Gamma^9,\Gamma^{10})=\mathrm{diag}(\gamma^{(f)}{}_a{}^b\delta_{AB},-\gamma^{(f)}{}_b{}^a\delta_{\dot A\dot B})$, $\Gamma^{(i)}\equiv(\Gamma^1,...,\Gamma^8)=\begin{bmatrix}0 & \epsilon_{ab}\gamma^{(i)}{}_{A\dot B}\\ -\epsilon^{ab}\tilde\gamma^{(i)}{}_{\dot AB} & 0\end{bmatrix}$, где $\gamma^{(f)}{}_b{}^a$ - трехмерные гамма-матрицы, $\gamma^{(i)}$ - гамма-матрицы для группы $SO(8)$ [11], $\tilde\gamma^{(i)}{}_{A\dot B}\equiv(\gamma^{(i)}{}_{A\dot B})^T$).

С учетом сказанного выше, действие (1) для случая супермембран $(p=2)$ в $D=11$ представляется в виде функционала

$$S_{11,1,2}=\int d\xi^3\,\varepsilon[c-\frac{1}{32}(\alpha')^{-1/2}e_f^{\mu}\omega_{\mu}^{m}\{v_{\hat\alpha A}^{a}v_{\hat\beta A}^{c}\epsilon_{bc}+\epsilon^{ac}v_{\hat\alpha\dot A c}v_{\hat\beta\dot A b}\}\times$$

$$\times\gamma^{(f)}{}_a{}^b(C\Gamma_m)^{\hat\alpha\hat\beta}]+S_{11,1,2}^{WZ}\ , \tag{6}$$

содержащего лоренцевы гармоники $v_{\hat\alpha A}^{a}$, $v_{\hat\alpha\dot A a}$, параметризующие фактор-пространство $SO(1,10)/SO(1,2)\times SO(8)$ и рассматриваемые как независимые динамические переменные, наравне с x^m, Θ и e_f^{μ}. Присутствие гармоник в (6) и его твистороподобная форма обеспечивает ковариантное разделение спинорных связей на неприводимые связи первого и второго рода и, следовательно, решение проблемы ковариантного описания κ-симметрии. С другой стороны, это может облегчить решение нелинейных уравнений движения супермембраны и ее ковариантное квантование по схеме, развитой в [2] для случая нуль супер-p-бран. В пользу этого свидетельствует опыт применения диад Ньюмена–Пенроуза при решении нелинейных уравнений в теории черных дыр [3] и известные результаты по описанию и классификации инстантонных и монопольных решений уравнений Янга–Миллса, полученные с помощью твисторных методов (см., например, [12]).

1. J.A.de Azcaraga and J.Lukiersky, Phys. Lett. B 113, 170 (1982); W.Siegel, Phys. Lett. B 128, 397 (1983).
2. И.А.Бандос, А.А.Желтухин, Письма в ЖЭТФ 51, 547 (1990); 53, 7 (1991); Phys. Lett. B 261, 245 (1991).

[1)]Отметим, что в окрестности $U=\hat I$, в силу (5), гармоническая матрица может быть представлена в виде $U=\exp(A^{mn}\Gamma_{mn})$

3. E.T.Newmann and R.Penrose, J.Math. Phys. 3, 566 (1962).
4. И.А.Бандос, ЯФ 51, 1429 (1990).
5. И.А.Бандос, А.А.Желтухин, Письма в ЖЭТФ 54, 8 (1991).
6. A.Galperin, P.Howe, K.Stelle, Imperial College Preprint IMPERIAL/to/90-91/16. London. 1991; F.Delduc, A.Galperin, E.Sokatchev, Imperial College Preprint IMPERIAL/to/90-91/26, PAR-LPTHE/91-40. London-Paris. 1991.
7. E.Bergshoeff, E.Sezgin, P.K.Townsend, Phys. Lett. B 189, 75 (1987).
8. M.Duff, Class. Quantum Grav. 6, 1577 (1989).
9. D.P.Sorokin et al., Mod. Phys. Lett. A4, 901 (1989); Phys. Lett. B, 216, 302 (1989).
10. Д.В.Волков, А.А.Желтухин, Украинский физич. журн. 30, 809 (1985); А.А.Желтухин, ТМФ 77, 377 (1988).
11. M.B.Green, J.H.Schwarz, E.Witten, Superstring Theory. V.1, Cambridge Univ. Press 1987.
12. R.S.Ward, Phys. Lett. A 61, 81 (1976); M.F.Atiyach et al., Phys. Lett. A 65, 185 (1977).