

## ФЕРМИ-КОНДЕНСАТНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В РАЗРЕЖЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ

В.А.Ходель, В.Р.Шагинян<sup>1)</sup>

Институт атомной энергии им. И.В.Курчатова  
123182, Москва

<sup>1)</sup>Институт ядерной физики им. Б.П.Константинова РАН  
188350, Гатчина, Ленинградская обл.

Поступила в редакцию 17 декабря 1991 г.

Приведены аргументы в пользу того, что в электронном газе в районе  $r_s \approx 10 - 15$  происходит фазовый переход, связанный с образованием фермионного конденсата.

Со времени работ Ландау<sup>1,2</sup> в теории ферми-жидкости широко используется тот факт, что энергия  $E_0$  основного состояния ферми-системы является функционалом ее квазичастичного распределения  $n(p)$ . В однородных системах со слабым взаимодействием выбор распределения - фермиевской ступеньки  $n_F(p) = \theta(p - p_F)$  - диктуется принципом Паули. Она устойчива, пока для любой вариации  $\delta n(p)$  выполняется условие:

$$\delta E_0 = \Sigma(\epsilon(p; n_F(p)) - \mu)\delta n(p) > 0, \quad (1)$$

$\epsilon(p)$  - энергия квазичастицы,  $\mu = \epsilon(p_F)$ . Если же при изменении константы связи  $g$  или плотности системы функция  $s(p) = 2M \frac{\epsilon(p) - \epsilon(p_F)}{p^2 - p_F^2}$  меняет знак в какой-то точке  $p_c$ , то распределение  $n_F(p)$  перестраивается<sup>3,4</sup>. Отметим, что если  $s(p)$ , впервые обращается в нуль при  $p = p_F$ , то т.к.  $s(p_F) = M/p_F (\frac{\partial \epsilon}{\partial p})_{p_F} = M/M^*$ , в точке перехода:  $M^* = \infty$  и  $(\frac{\partial s}{\partial p})_{p_F} = 0$ . Традиционно считается, что новое квазичастичное распределение  $n(p)$  - тоже ферми-сфера, но в пространстве новых одночастичных энергий  $\tilde{\epsilon}$ :  $\tilde{n}_F(p) = \theta(\tilde{\epsilon}(p; \tilde{n}_F(p)) - \mu)$ . Но существует и иная возможность, рассматривавшаяся в<sup>3,4</sup>, а затем и в<sup>5</sup>. Суть ее в терминах современного обществоведения сводится к следующему: навязываемое принципом Паули тоталитарное решение  $\tilde{n}_F(p)$  не дает минимума  $E_0$  за точкой фазового перехода. Если  $E_0(n_F)$  понижается при появлении хотя бы одной пары частица-дырка, то новое квазичастичное распределение  $n(p)$  находится путем демократических выборов из условия минимума:

$$\mu = \delta E / \delta n(p), \quad p_i < p < p_f. \quad (2)$$

Вне интервала  $(p_i, p_f)$  решение остается старым:  $n(p) = n_F(p)$ . При этом границы области нового распределения сами определяются из (2). В<sup>3,4</sup> это было подтверждено на ряде модельных примеров. Этот фазовый переход назван авторами фермионной конденсацией, ибо реализация (2) означает появление плато в спектре одночастичных возбуждений и резкого пика в плотности состояний системы, что характерно для бозе-жидкости ниже точки конденсатного перехода.

В каких системах и при каких условиях возможен этот фазовый переход? Это можно установить, исследуя известное тождество теории<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \epsilon(p)}{\partial p} = \frac{p}{M} + \int \mathcal{F}(p, p_1, \vartheta) \frac{\partial n(p_1)}{\partial p_1} p_1^2 dp_1 \cos \vartheta d\Omega / 4\pi^3. \quad (3)$$

Отсюда, в частности, видно, что  $s(p = p_F)$  меняет знак там, где первая гармоника  $b_1^0 = \mathcal{F}_1 \frac{v_F M}{\pi^2}$  положительна и равна 3 (здесь стоит  $M$ , а не  $M^*$ ). Столь большое положительное значение  $b_1^0$  возможно лишь в системах с сильным эффективным отталкиванием: в плотных средах с отталкивательным кором или в кулоновском газе низкой плотности. Отметим, что в жидком  $^3\text{He}$ , одной из наиболее плотных ферми-систем,  $b_1^0 \cong 2$ .

В этой работе в рамках подхода, развитого в <sup>6-9</sup> будет вычислен квази-частичный спектр  $\epsilon(p; n_F)$  однородного электронного газа в модели желе и показано, что ферми-конденсатный фазовый переход в нем происходит в районе  $\alpha_c \sim 2$  ( $\alpha = v^2/v_F^2$ ). Энергия  $\epsilon(p; n_F) = \delta E_0 / \delta n^3(\vec{p})$  находится в результате вариации энергии  $E_0 = \tau + W$ , где  $\tau$  - кинетическая энергия ферми-газа,  $(\delta\tau/\delta n(\vec{p})) = \epsilon_p^0 = p^2/2M$ , а энергия взаимодействия  $W$  выражается через функцию линейного отклика системы  $\chi(q)$  формулой <sup>10</sup>:

$$W = \frac{1}{2} \rho^2 V(0) - \frac{1}{2} \int \int \int V(q) (\chi(q) + 2\pi\delta(q_0)) d\tau dq_0 dg_1 / 2\pi g_1, \quad (4)$$

Здесь  $d\tau = d^3p/(2\pi)^3$ ;  $q = (\vec{q}, q_0)$ .  $V(\vec{q})$  - потенциал взаимодействия частиц. Интеграл по  $q_0$  берется вдоль мнимой оси от  $-i\infty$  до  $+i\infty$ . Функции отклика: точная  $\chi(q)$  и  $\chi_0(q)$  невзаимодействующих частиц - связаны через эффективный потенциал взаимодействия частиц  $\mathcal{R}(q) = \delta^2 W / \delta \rho(q) \delta \rho(-q)$  формулой:

$$\chi(q) = \chi_0(q) \phi(q) = \chi_0(q) (1 - R(q) \chi_0(q))^{-1}. \quad (5)$$

В теории Ландау постулируется, что минимум  $E_0$  всегда достигается в угловой точке  $n_F$  функционального пространства  $[n]$  и тогда

$$\chi_0(q) = 2 \int \frac{n(\vec{p}) - n(\vec{p} + \vec{q}) d^4 p}{\epsilon_p^0 - \epsilon_{\vec{p}+\vec{q}}^0 + \omega(2\pi)^{4i}}, \quad (6)$$

где  $n(p) = \theta(p - p_F)$ . Из определения  $R$  вместе с (4) и (5) получается замкнутое функциональное уравнение для  $R$ :

$$R(k) = V(k) - \frac{16^2}{2\delta\rho(\vec{k})\delta\rho(-\vec{k})} \int \int \int V(q) \chi(q) d\tau dq_0 dg_1 / 2\pi g_1. \quad (7)$$

Его можно решать, используя в качестве нулевого локальное приближение <sup>6-9</sup>, в котором производная  $\delta F(k)/\delta\rho(q)$  оператора  $F$  заменяется частной  $\partial F(k - q)/\partial\rho$ . Точность этого приближения достаточно велика: монте-карловские результаты расчета энергий модельных систем воспроизводятся им в пределах в 3 - 5%.

Вернемся к расчету спектра  $\epsilon(p, n_F(p))$ . Варьируя (4), находим:

$$\epsilon(p) = \epsilon_p^0 - \frac{1}{2} \int \int \int V(\vec{q}) \left( \phi(q) \frac{\delta\chi_0(q)}{\delta n(\vec{p})} \phi(q) + \chi(q) \frac{\delta R(q)}{\delta n(\vec{p})} \chi(q) \right) d\tau dq_0 dg_1 / 2\pi g_1. \quad (8)$$

Для  $M(\vec{p}, k) = \delta R(k)/\delta n(\vec{p}) = \delta^3 W / \delta\rho(k) \delta\rho(-k) \delta n(\vec{p})$  из (7) получается функциональное уравнение <sup>8,9</sup>, которое тоже можно решать на основе локального приближения:  $M^0(\vec{p}, k) = \partial^2 \epsilon(\vec{p} - \vec{k}) / \partial\rho^2$ , совпадающего при  $k=0$  с точной формулой:  $M(\vec{p}, 0) = \partial^2 \epsilon(\vec{p}) / \partial\rho^2$ . Прямой расчет  $\delta\chi_0(q)/\delta n(\vec{p})$  дает <sup>11</sup>:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial\chi_0(q)}{\partial n(\vec{p})} = (1 - n_F(\vec{p} - \vec{q})) \theta(\omega_{pq}) + n_F(\vec{p} - \vec{q}) \theta(-\omega_{pq}) + \frac{\epsilon_p^0 - \epsilon_{\vec{p}-\vec{q}}^0}{(\epsilon_p^0 - \epsilon_{\vec{p}-\vec{q}}^0)^2 - q_0^2}. \quad (9)$$

Здесь  $\omega_{pq} = \epsilon_p^0 - \epsilon_{p-q}^0$ . Как показывают численные расчеты <sup>6</sup>, при  $r_s < 20$  амплитуда  $R(g, q = 2p_F t)$  оказывается линейной функцией  $g$ :

$$R(t, g) = \pi g \left( 1/t^2 - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + t^2 \ln(1-t^2) \right) \right), \quad (10)$$

что позволяет отынтегрировать часть членов (8) по  $g$  аналитически. Воспользовавшись результатами работы <sup>11</sup> перепишем теперь (8) так

$$\epsilon(p) = \epsilon_p^0 + \epsilon_{RPA}^{(1)}(p) + \epsilon_{RPA}^{(2)}(p) + \epsilon_{RPA}^{(3)}(p) + \delta \epsilon_{corr}(p), \quad (11)$$

где  $\delta \epsilon_{corr}(p)$  дается последним слагаемым (8), а

$$\epsilon_{RPA}^{(1)}(p) = - \int_{1 < p} V(\vec{p} - \vec{l}) d\tau_1$$

$$\epsilon_{RPA}^{(2)}(p) = - \int_{1 > p} V(\vec{p} - \vec{l}) \phi(\vec{p} - \vec{l}, \omega_{pl}) n_F(\vec{l}) d\tau_1 + \int_{1 < p} V(\vec{p} - \vec{l}) \phi(\vec{p} - \vec{l}, \omega_{pl}) (1 - n_F(\vec{l})) d\tau_1$$

$$\epsilon_{RPA}^{(3)}(p) = - \int \int \int V(\vec{q}) (\phi(q) - 1) \frac{\epsilon_p^0 - \epsilon_{p-q}^0}{(\epsilon_p^0 - \epsilon_{p-q}^0)^2 + \omega^2} d\tau d\omega / 2\pi \quad (12)$$

Здесь  $\omega = iq_0$ . Единственное отличие (12) от формул Гелл - Манна - Галицкого <sup>11,12</sup> в том, что эффективный потенциал  $R$ , входящий в  $\phi$ , помимо  $V$  содержит и обменный вклад (см. (10)).

Можно оценить  $\alpha_c$ , почти не прибегая к громоздким машинным расчетам, если записать  $\chi_0 = p_F M \tilde{\chi}_0 / \pi^2$ , а для  $\tilde{\chi}_0$  использовать интерполяционную формулу  $\tilde{\chi}_0(z, t) \simeq (1 + 3z^2 + 3t^2)^{-1}$ , где  $z = \omega M / qp_F$ . Ее отличие от точной  $\tilde{\chi}_0$  сосредоточено в районе  $z \simeq t \leq 1$  и составляет не более 25 - 30%. Мы увидим, что  $\alpha_c \simeq 2$ , а при таких  $\alpha$  вклад  $\delta \epsilon_{corr}$ , оцененный в рамках локального приближения, не превышает 10 - 15%. Расчет остальных слагаемых (12) показывает, что с ростом  $\alpha$  спектр  $\epsilon(p)$  деформируется таким образом, что  $s(p)$  впервые меняет знак у поверхности Ферми. Из (12) следует, что

$$s^{(3)}(p_F) = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t+1}{(t+1)^2 + z^2} + \frac{t+1}{(t-1)^2 + z^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2 + z^2}{(t-1)^2 + z^2} \right) (\phi - 1) dt dz.$$

После подстановки сюда  $\phi$  и  $\chi_0$  и аналитического интегрирования по  $z$  остается численно взять однократный интеграл. В итоге находим:

$$s^{(1)}(p_F, \alpha) = -\alpha$$

$$s^{(2)}(p_F, \alpha) = \alpha \int_0^1 \frac{(1-2t^2)}{t} \phi(t, 0) dt$$

$$s^{(3)}(p_F, \alpha) = -\frac{\alpha}{3} \int \left( \ln \left( \frac{(t+1) + (t^2 + 1/3 + f/3)^{1/2}}{|t-1| + (t^2 + 1/3 + f/3)^{1/2}} \right) - \frac{1}{t+1 + (t^2 + 1/3 + f/3)^{1/2}} + \frac{\text{sgn}(1-t)}{|t-1| + (t^2 + 1/3 + f/3)^{1/2}} \right) \frac{f(t) dt}{(t^2 + 1/3 + f/3)^{1/2}}. \quad (13)$$

Вычисления показывают, что член  $s^{(3)}$ , как и  $s^{(1)}$ , растет с  $\alpha$  почти линейно, а  $s^{(2)}$  уже при  $\alpha \simeq 1$  выбывает из игры. Мы получаем  $s(p_F, 1) = 0,4$ ,  $s(p_F, 2) = -0,001$ ,  $s(p_F, 3) = -0,2$ , т.е.  $s(p_F, \alpha)$  меняет знак при  $\alpha_c = 2$  - в районе  $r_s \simeq 12$ .

С учетом погрешностей расчета это значение может измениться процентов на 30. Следует также иметь ввиду, что и величина  $s(0, \alpha)$  тоже быстро падает с ростом  $\alpha$ . Поэтому нельзя исключить того, что за точкой перехода может подвергнуться перестройке и длинноволновая часть распределения  $n_F(r)$ .

Как описывать систему за точкой фазового перехода? Почти все написанные выше формулы нуждаются теперь в уточнении из-за многократного вырождения одночастичных уровней конденсата. Фактически, как и в теории бозе-жидкости<sup>15</sup>, мы имеем дело с двумя подсистемами: одна из которых конденсат - вырождена. Когда в канале частица-частица доминирует эффективное притяжение, волновая функция конденсата имеет простую структуру, и задача решается известными методами теории сверхпроводимости<sup>3</sup>. Но если когерентности в парных корреляциях нет, ситуация оказывается намного сложнее. Тогда обобщая теорему Хоенберга - Кона можно показать, что за точкой перехода  $E_0$  становится функционалом двух плотностей: обычной  $\rho$  и конденсатной  $k = \sum n_\lambda \varphi_\lambda(r) \cdot \varphi_\lambda^*(r)$ , причем числа заполнения  $n_\lambda$  находятся из условия минимума (2).

Формула (4) применима теперь только для вклада надконденсатных частиц, для учета вклада конденсатных нужно использовать методы теории вырожденных систем, разработанные в ядерной физике. Вырождение снимается за счет корреляционных эффектов, что ведет к уширению  $\delta$ -образного пика в плотности состояний системы. Эти корреляционные вклады, вообще говоря, различны для конденсатных и надконденсатных частиц, и поэтому в спектре одночастичных возбуждений появляется щель. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в отдельной работе. Здесь мы только отметим, что полигоном для изучения рассматриваемых явлений могли бы стать электроны на поверхности жидкого гелия, плотность которых можно менять в довольно широких пределах.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Б.И.Барцу, В.Г.Ваксу, А.М.Дюгаеву, Н.Е.Зейну, Н.В.Прокофьеву и С.В.Толоконникову за плодотворное обсуждение работы. Авторы благодарны также проф. Ф.Нозьеру за присылку препринта своей работы до ее опубликования.

1. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
2. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ 32, 97 (1958).
3. В.А.Ходель, В.Р.Шагинян, Письма в ЖЭТФ, 51, 488 (1989).
4. V.A.Khodel and V.R.Shaginyan, Preprint IAE-5261/9, 1990.
5. P.Nozières, Preprint.
6. V.R.Shaginyan, Sol. St. Comm. 55, 9 (1985).
7. V.A.Khodel and V.R.Shaginyan, Nucl. Phys. A, 500, 242. (1989).
8. В.А.Ходель, В.Р.Шагинян, ЯФ 49, 52 (1989)
9. В.А.Ходель, В.Р.Шагинян, ЭЧАЯ 22, 436 (1991).
10. Д.Пайнс, Ф.Нозьер, Теория квантовых жидкостей, М.: Мир, 1967.
11. В.М.Галицкий, Избранные труды, М.: Наука, 1983, с.134.
12. M.Gell-Mann, Phys. Rev. 106, 369 (1957).
13. D.Seperley, G.V.Chester and M.H.Kalos, Phys. Rev. B, 16, 3081. (1981).
14. С.А.Артамонов, С.Г.Оглоблин, В.Р.Шагинян, ЯФ 46, 1651. (1987).
15. С.Т.Беляев, ЖЭТФ 34, 417 (1958).