Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 3, с. 181 – 188

Инварианты узлов в корнях из единицы

Л. Бишлер[1)]

Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия

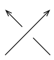
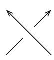
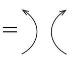
Поступила в редакцию 2 июня 2022 г.
После переработки 24 июня 2022 г.
Принята к публикации 26 июня 2022 г.

Мы обсуждаем различные инварианты узлов и зацеплений, зависящие от первообразного корня из единицы. Мы уточняем определения существующих инвариантов с помощью метода Решетихина–Тураева, представляем обобщение инвариантов АДО на квантовую алгебру $\mathcal{U}_q(sl_N)$ и подчеркиваем связи между различными инвариантами.

DOI: 10.31857/S1234567822150095, EDN: jgndjq

1. Введение. Знаменитый полином Джонса $J^{\mathcal{K}}(q)$, открытый в 1984 г. В. Джонсом [1], является полиномиальным инвариантом узлов и зацеплений, зависящим от одной переменной. Полином Джонса был определен с помощью скейн-соотношений, которые позволяют его вычислять. Скейн-соотношения (1) связывают полиномы Джонса трех узлов, которые отличаются друг от друга одним пересечением (2).

$$J^{\mathcal{K}}(q) - q^{-2} J^{\mathcal{K}'}(q) = (q - q^{-1}) J^{\mathcal{K}''}(q). \tag{1}$$

$\mathcal{K} =$  , $\mathcal{K}' =$  , $\mathcal{K}'' =$  . (2)

Вскоре после определения полинома Джонса Э. Виттен и Н. Решетихин и В. Тураев сделали два важных открытия. Э. Виттен [2] нашел квантовую теорию поля – теорию Черна–Саймонса (ЧС) с калибровочной группой SU_2 – наблюдаемые в которой (средние значения петель Вильсона) совпадают с полиномами Джонса. Таким образом Виттен предложил физическое определение для математического объекта. Н. Решетихин [3] и В. Тураев [4] в свою очередь открыли новый способ вычисления инвариантов узлов с помощью специального оператора – $\mathcal{R}$-матрицы. Они связали полином Джонса с универсальной $\mathcal{R}$-матрицей в фундаментальном представлении квантованной универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$. Метод Решетихина–Тураева (РТ) позволил определить цветные полиномы Джонса, которые вычисляются с помощью $\mathcal{R}$-матриц в других представлениях $\mathcal{U}_q(sl_2)$.

Эти результаты позже были обобщены на полиномы ХОМФЛИ-ПТ [5, 6], теорию ЧС с калибровочной группой SU_N и универсальную $\mathcal{R}$-матрицу в представлениях $\mathcal{U}_q(sl_N)$.

$\mathcal{U}_q(sl_N)$ является ассоциативной алгеброй с генераторами E_i, F_i, $K_i = q^{h_i}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &K_i E_j = q^{a_{ij}} E_j K_i, \quad [K_i, K_j] = 0, \\ &K_i F_j = q^{-a_{ij}} F_j K_i, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \tfrac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Универсальная $\mathcal{R}$-матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_u = P q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \overrightarrow{\prod_{\beta \in \Phi^+}} \exp_q\left((q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta\right), \tag{4}$$

где $P(x \otimes y) = y \otimes x$, Φ^+ – положительные корни, $\exp_q A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}$, $[m]_q = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$.

Теория ЧС – это трехмерная квантовая теория поля с действием

$$\mathcal{S}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}\right). \tag{5}$$

Ненулевыми корреляторами в теории ЧС являются корреляторы особого типа – средние значения петли Вильсона. Когда калибровочной группой теории является группа SU_N, они совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ $H_R^{\mathcal{K}}(q, A)$.

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, A) = \frac{1}{d_R(N)} \left\langle \mathrm{Tr}_R P \exp\left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A}\right) \right\rangle_{\mathrm{CS}(N,k)}. \tag{6}$$

Вильсоновские средние зависят от контура $\mathcal{K}$ (узла или зацепления), ранга $N-1$ калибровочной группы SU_N, ее представления (соответствующего диаграмме Юнга) R, от квантовой размерности $d_R(N)$ и

[1)]e-mail: bishlerlv@lebedev.ru

константы связи теории ЧС k. Это среднее представляет собой полином от переменных $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N+k}\right)$ и $A = q^N$. Было показано [7], что теория ЧС калибровочно-инвариантна, когда константа связи k является целым числом, что означает, что q является корнем из единицы. Поэтому инварианты в корнях из единицы заслуживают особого внимания.

Очевидным подходом к получению инвариантов в корнях из единицы является замена переменных в полиномах ХОМФЛИ-ПТ $H_R^{\mathcal{K}}(q, A)$ и Джонса $J_{[r]}^{\mathcal{K}}(q)$.

Существуют также инварианты $\langle K \rangle_{m,N}$, определенные Р. Кашаевым [8–10] с $\mathcal{R}$-матрицей, зависящей от переменной ω (которая является N-м корнем из единицы) и целочисленного параметра m. Инварианты Кашаева не связаны с квантовыми алгебрами, однако они совпадают с цветными полиномами Джонса.

Другая возможность построения инвариантов в корнях из единицы возникает, когда мы рассматриваем представления $\mathcal{U}_q(sl_N)$, при параметре квантования, равном корню из единицы. В этом случае у квантовой алгебры появляются новые типы представлений с параметрами λ, позволяющие строить $\mathcal{R}$-матрицы с параметрами и определять новые инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы. Таким образом получаются инварианты АДО [11] или цветные инварианты Александера [12] $\Phi_m^{\mathcal{L}}(q, \lambda)$ для алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$. В этом случае q – корень степени $2m$ из единицы, а λ – произвольный параметр. Инварианты АДО совпадают с полиномами Александера $\mathcal{A}(q) = H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = 1)$, когда q является корнем из единицы 4-й степени. Они также связаны с полиномами Джонса.

Новый результат, который мы хотим подчеркнуть в этом письме, – это обобщение инвариантов АДО на алгебру $\mathcal{U}_q(sl_N)$. Это инварианты $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(q, \lambda_i)$ (29) [13] узлов и зацеплений, которые определяются с помощью нильпотентных представлений с параметрами алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ в корнях из единицы ($q^{2m} = 1$). Они зависят от набора параметров $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}\}$ и связаны с полиномами Александера и ХОМФЛИ-ПТ. Инварианты АДО и инварианты $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(q, \lambda_i)$ определяются модифицированным методом Решетихина–Тураева, который требует введения специального нормировочного коэффициента (27), который мы представляем в этом письме.

Схематическое соответствие между описанными выше инвариантами представлено на рис. 1.

Цель этого письма – уточнить определение различных инвариантов в корнях из единицы и установить отношения между ними. Структура письма

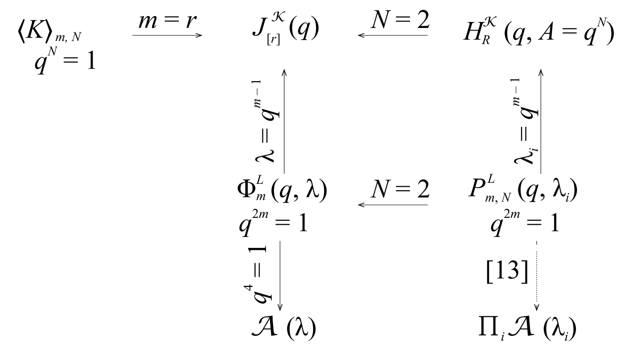
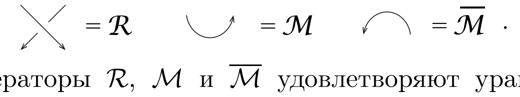


Рис. 1. Соответствие между инвариантами в корнях из единицы

следующая. Мы начнем с метода РТ (раздел 2), который используется для определения всех инвариантов, рассматриваемых в этом письме. Затем мы обсудим структуру представления $\mathcal{U}_q(sl_2)$ для различных значений q (раздел 3). Мы определим инварианты АДО (раздел 4) и их обобщение (раздел 5) и обсудим модификации метода РТ, необходимые для их определения. Наконец, мы рассмотрим понятие длинных узлов и определим инвариант Кашаева (раздел 6). Новые результаты, которые мы представляем в этом письме, находятся в разделе 5.

2. Метод Решетихина–Тураева. Метод РТ [9, 14, 15] позволяет определить цветные инварианты узлов и зацеплений [16, 17]. Существуют также модификации этого метода, которые существенно упрощают вычисления в некоторых случаях [18, 19]. В этом разделе мы обсуждаем наиболее общую версию метода РТ и придерживаемся описания из [15].

Метод РТ основан на использовании двумерной ориентированной проекции узла или зацепления на плоскость с фиксированным направлением, представляющей собой диаграмму узла или зацепления. На диаграмме показано, какая нить находится над другой в каждом пересечении. Диаграмма разбивается на элементы, играющие роль в построении инварианта узла: пересечения и точки поворота (относительно выбранного направления). Существует восемь типов пересечений и четыре типа точек поворота (рис. 2). Все точки поворота и пересечения можно выразить с помощью операторов $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$:



(7)

Операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ удовлетворяют уравнениям, которые следуют из движений Рейдемейстера (рис. 3):

$$\mathrm{Tr}_2(I \otimes \mathcal{W})\,\mathcal{R} = q^{\Omega} I, \tag{8}$$

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2, \tag{9}$$

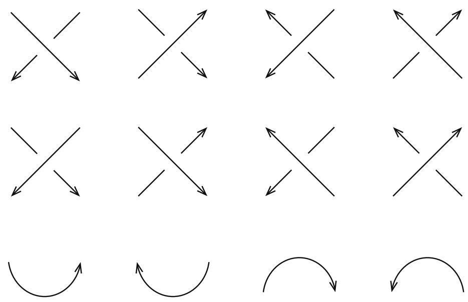


Рис. 2. Различные типы пересечений и точек поворота

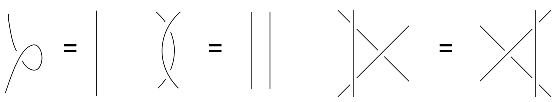


Рис. 3. Движения Рейдемейстера

где $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes I$, $\mathcal{R}_2 = I \otimes \mathcal{R}$, $\mathcal{W} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$, I – единичный оператор. Уравнения (8) и (9) фиксируют только операторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$, поэтому в определении операторов $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ есть неоднозначность. Разный выбор операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$ приводит к разным типам инвариантов. Цветные полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ связаны с универсальной $\mathcal{R}$-матрицей (4) в представлениях алгебр $\mathcal{U}_q(sl_2)$ и $\mathcal{U}_q(sl_N)$ соответственно, инварианты АДО и их обобщения связаны с универсальной $\mathcal{R}$-матрицей в нильпотентных представлениях с параметрами алгебр $\mathcal{U}_q(sl_2)$ и $\mathcal{U}_q(sl_N)$ в корнях из единицы. Инвариант Кашаева основан на $\mathcal{R}$-матрице (37), не связанной с квантовыми алгебрами.

Коэффициент q^{Ω} в уравнении (8) называется коэффициентом оснащения (фрейминга). Он возникает, когда мы рассматриваем узел, сделанный из ленты. В этом случае первое движение Рейдемейстера разрешается с коэффициентом. В топологическом оснащении, которое мы используем при определении инвариантов АДО, матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$ удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{Tr}_2(I \otimes \mathcal{W})\,\mathcal{R} = I. \tag{10}$$

Полиномиальный инвариант узла или зацепления определяется как свертка всех операторов, связанных с элементами на конкретной диаграмме.

Если мы выбираем универсальную $\mathcal{R}$-матрицу в представлении R алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$, с помощью метода РТ мы вычисляем ненормированный полином ХОМФЛИ-ПТ $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}$. Можно определить нормированный полином $H_R^{\mathcal{K}} = \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}/\mathcal{H}_R^{\circ}$, где $\mathcal{H}_R^{\circ}$ – ненормированный полином неузла (тривиального узла).

Удобно использовать диаграммы узлов и зацеплений в виде кос (рис. 4), которые существуют для любого узла и зацепления. В этом случае определение инвариантов можно переформулировать в терминах следа Маркова Tr_q (квантового следа) и оператора $\mathcal{W} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$, который называют весовой матрицей.

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \mathrm{Tr}_q \prod_i \mathcal{R}_i = \mathrm{Tr}\, \overbrace{\mathcal{W} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}}^{s} \prod_i \mathcal{R}_i, \tag{11}$$

где s – количество нитей в косе, в произведение входят все пересечения в косе.

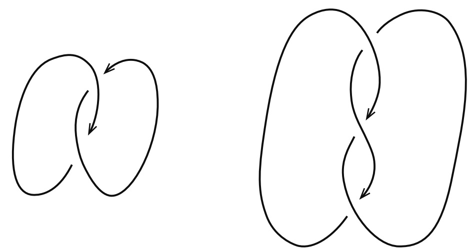


Рис. 4. Диаграммы зацепления Хопфа и трилистника в виде кос

3. Представления $\mathcal{U}_q(sl_2)$ в корнях из единицы. $\mathcal{U}_q(sl_2)$ порождается элементами e, f, $k = q^h$ и $k^{-1} = q^{-h}$, удовлетворяющими соотношениям

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1, \quad kek^{-1} = q^2 e, \tag{12}$$
$$kfk^{-1} = q^{-1}f, \quad [e,f] = ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Универсальная $\mathcal{R}$-матрица имеет следующий вид

$$\mathcal{R} = P\, q^{h\otimes h/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m(m+1)/2}(1-q^{-2})^m}{[m]_q!}\, e^m \otimes f^m, \tag{13}$$

и соответствующая весовая матрица совпадает с оператором k: $\mathcal{W} = k$.

Когда q не является корнем из единицы, неприводимые конечномерные представления L_r алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$ являются симметрическими представлениями, нумерованными диаграммами Юнга, состоящими из одной строки $[r]$. L_r – представления со старшим и младшим весами, действующие на векторном пространстве $\mathcal{V}_{r+1}$ размерности $r+1$ с базисными векторами v_i, $i = \{0,\dots,r\}$, где v_0 и v_r – векторы старшего и младшего весов соответственно.

$$\begin{aligned} &L_r(k)v_i = q^{r-2i}v_i, \\ &L_r(e)v_i = [i]_q[r-i+1]_q v_{i-1}, \qquad L_r(e)v_0 = 0, \\ &L_r(f)v_i = v_{i+1}, \qquad\qquad\qquad\quad L_r(f)v_r = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

В этом случае фиксирован старший вес $L_r(k)v_0 = \lambda v_0$, $\lambda = q^r$. Условие, фиксирующее вес, возникает при построении модуля Верма. Мы выбираем собственный вектор v_0 оператора k, удовлетворяющий условию $e\,v_0 = 0$. Остальные векторы модуля Верма получаем действием оператора f на v_0: $f\,v_0 = v_1$, $f^2\,v_0 = v_2$, …, $f^n\,v_0 = v_n$. Затем ищем инвариантное подпространство с условием $e\,v_{r+1} = 0$, которое является следующим:

$$[r+1]_q(\lambda q^{-r} - \lambda^{-1}q^r) = 0. \tag{15}$$

Это условие фиксирует вес λ только в том случае, если $[r+1] \neq 0$, а это означает, что когда q – корень из единицы, существуют представления, в которых вес произволен.

Пусть q – первообразный корень из единицы степени $2m$, т.е. не существует $p < 2m$, для которого $q^p = 1$. В этом случае операторы e^m, f^m и k^m являются центральными, что следует непосредственно из определяющих соотношений (12). Центральность k^m приводит к тому, что вес представлений размерности m не фиксирован и является параметром представлений. Тот факт, что e^m и f^m являются центральными, является причиной того, что появляются новые типы представлений: циклическое и полуциклическое.

Существует четыре типа неприводимых представлений (любое неприводимое представление $\mathcal{U}_q(sl_2)$ в корнях из единицы конечномерно):

1) L_r (14) при $r \leq m-2$;
2) циклические $U_m^{a,b,\lambda}$;
3) полуциклические $V_m^{a,\lambda} = U_m^{a,0,\lambda}$ или $V_m^{b,\lambda} = U_m^{0,b,\lambda}$;
4) нильпотентные представления $W_m^\lambda = U_m^{0,0,\lambda}$.

Последние три представления имеют одинаковую размерность m и могут быть описаны следующими операторами, действующими в m-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}_m$ с базисом v_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

$$\begin{aligned}
&U_m^{\lambda,a,b}(k)v_i = q^{-2i}\lambda v_i, \qquad (16)\\
&U_m^{\lambda,a,b}(e)v_i = \left(ab + [i]_q\frac{\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1}q^{i-1}}{q-q^{-1}}\right)v_{i-1}, \ \ i > 0,\\
&U_m^{\lambda,a,b}(e)v_0 = av_{m-1},\\
&U_m^{\lambda,a,b}(f)v_i = v_{i+1}, \ \ i < m-1,\\
&U_m^{\lambda,a,b}(f)v_{m-1} = bv_0,
\end{aligned}$$

где a, b, λ – произвольные комплексные числа, $\lambda \neq 0$. Можно проверить, что эти операторы удовлетворяют определяющим соотношениям (12) алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$.

Представления W_m^λ позволяют получить нетривиальные $\mathcal{R}$-матрицы и определять с их помощью инварианты узлов и зацеплений, известные как АДО или цветные инварианты Александера.

4. Инварианты АДО или цветные инварианты Александера. Инварианты АДО узлов и зацеплений [11] можно определить методом РТ, который применяется к $(1,1)$-сплетениям – узлам и зацеплениям, у которых одна нить разрезана (рис. 5). Рассмотрение сплетений вместо узлов и зацеплений возможно проводить благодаря существующему взаимно однозначному соответствию между ними [20]. Этот важный шаг позволяет вычислять ненулевые инварианты. Инварианты, которые вычисляются на основе узлов и зацеплений, равны нулю из-за свойств следа Маркова в представлениях W_m^λ.

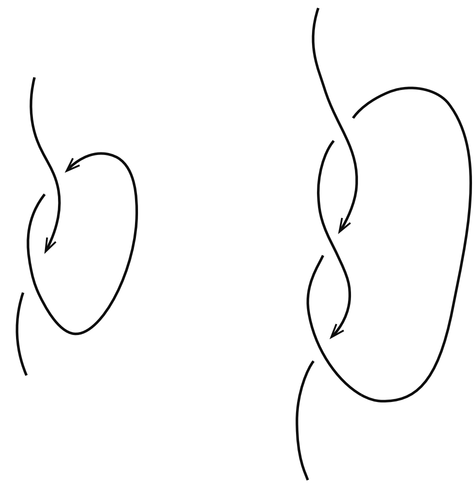


Рис. 5. $(1,1)$-сплетения зацепления Хопфа и трилистника

Давайте определим инварианты АДО. Необходимо сделать две важные модификации метода РТ. Прежде всего, мы должны переопределить след Маркова следующим образом:

$$\boxed{\mathrm{Tr}^*{}_q \cdots = \mathrm{Tr}\ I \otimes \overbrace{\mathcal{W} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}}^{s-1} \ldots,} \tag{17}$$

т.е. опустить одну весовую матрицу, связанную с разрезанной нитью. Тогда нормировочный коэффициент полиномов (ненормированный полином неузла) равен классической размерности представления.

Переход от узлов и зацеплений к сплетениям заставляет нас выбирать нить, которая будет разрезана и вносит асимметрию в определение инварианта. Поэтому также необходимо ввести нормировочный коэффициент. Коэффициент, вычисленный в [11] с точностью до коэффициента нормировки q^m, выглядит следующим образом:

$$\boxed{\Xi_m^{sl_2}(\lambda_1) = \prod_{i=0}^{m-2}\{\lambda_1 q^{-i}\},} \tag{18}$$

где $\{x\} = x - x^{-1}$, λ_1 – цвет разрезанной нити.

Теперь мы можем определить инвариант АДО $\Phi^{\mathcal{L}}_m(\lambda_1,\dots)$:

$$\boxed{\Phi^{\mathcal{L}}_m(\lambda_1,\dots)=\frac{\mathrm{Tr}\; I\otimes\overbrace{\mathcal{W}\otimes\dots\otimes\mathcal{W}}^{s-2}\prod_i\mathcal{R}_i}{\Xi^{sl_2}_m(\lambda_1)}.} \qquad (19)$$

В этом определении $\mathcal{R}$ – универсальная $\mathcal{R}$-матрица в представлении W^{λ}_m алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$ в корнях из единицы. В общем случае она зависит от двух цветов $\lambda_1=q^{\mu_1}$ и $\lambda_2=q^{\mu_2}$:

$$\mathcal{R}_m(v^{\mu_1}_i\otimes v^{\mu_2}_j)$$
$$=\sum_{n=0}^{m-1}q^{\mu_2(m-1-i+n)-\mu_1(j+n)+2(i-n)(j+n)+\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$\frac{(q-q^{-1})^n}{[n]!}[i-n+1;n][\mu_1-i+n;n]\,(v^{\mu_2}_{j+n}\otimes v^{\mu_1}_{i-n}) \qquad (20)$$

и

$$\mathcal{W}_m\,v^{\mu}_i=q^{-\mu(m-1)-2i}v_i=q^{-\mu\, m}kv^{\mu}_i. \qquad (21)$$

Инварианты АДО $\Phi^{\mathcal{L}}_m$ связаны с полиномами Александера и Джонса. Для простоты определим полиномы АДО узлов и одноцветных зацеплений:

$$\hat{\Phi}^{\mathcal{L}}_m(\lambda)=\Phi^{\mathcal{L}}_m(\lambda)\,\Xi^{sl_2}_m(\lambda), \qquad (22)$$

тогда

$$\hat{\Phi}^{\mathcal{K}}_2(\lambda)=\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(q=\lambda), \qquad (23)$$

т.е. полиномы АДО для 4-го корня из единицы совпадают с полиномами Александера узлов, а инварианты АДО для 4-го корня из единицы совпадают с полиномами Александера от многих переменных (полиномами Александера зацеплений)

$$\Phi^{\mathcal{L}}_2(\lambda_1,\dots)=\Delta^{\mathcal{L}}(\lambda_1,\dots), \qquad (24)$$

поэтому инварианты АДО также называют цветными инвариантами Александера.

Связь с полиномами Джонса следующая:

$$\hat{\Phi}^{\Lambda}_m(\lambda=q^{m-1})=J^{\mathcal{L}}_{[m-1]}(q)\Big|_{q^{2m}=1}, \qquad (25)$$

где $J^{\mathcal{L}}_{[m-1]}(q)$ – нормированные полиномы Джонса в представлении L_{m-1}. Это следует из того, что представления W^{λ}_m совпадают с представлениями L_{m-1} при правильном выборе значения веса $\lambda=q^{m-1}$.

Недавнее исследование С. Уиллетса [21] показало, что инварианты АДО и цветные полиномы Джонса можно обобщить с помощью универсального инварианта узла, который содержит в себе оба инварианта: АДО и Джонса. И существует отображение, позволяющее получить инварианты АДО из цветных полиномов Джонса.

5. Обобщение инвариантов АДО на алгебру $\mathcal{U}_q(sl_N)$. Полиномы Джонса были обобщены на полиномы ХОМФЛИ-ПТ, и аналогичным образом инварианты АДО можно обобщить на инварианты $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)}_i)$, связанные с представлениями алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ (3) в корнях из единицы.

Пусть q – первообразный корень из единицы степени $2m$. В этом случае структура представления $\mathcal{U}_q(sl_N)$ [22] очень похожа на структуру представления $\mathcal{U}_q(sl_2)$, которую мы обсуждали ранее. Операторы K^m_i центральны и существуют представления размерности $m^{N(N-1)/2}$ с произвольными весами – нильпотентные представления $W^{\lambda_i}_{m,N}$ с $N-1$ параметрами λ_i. Среди представлений $\mathcal{U}_q(sl_N)$ появляются также циклические и полуциклические представления, так как E^m_i и F^m_i центральны, но эти представления не дают нетривиальных инвариантов узлов и зацеплений [13]. Представления $W^{\lambda_i}_{m,N}$ связаны с нетривиальными инвариантами, которые мы обозначаем $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)}_i)$.

Определение инвариантов $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)}_i)$ повторяет определение инвариантов АДО. Мы раскрашиваем зацепление, состоящее из l компонент, представлениями $W^{\lambda^{(j)}_i}_{m,N}$ $(j=1,\dots,l)$, зависящими от наборов параметров λ_i $(i=1,\dots,N-1)$, делаем его проекцию на плоскость и разрезаем одну нить на диаграмме. Затем мы применяем метод РТ к $(1,1)$-сплетениям и получаем полиномы $P^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)}_i)$. В качестве операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$ в методе РТ используются универсальная $\mathcal{R}$-матрица (4) и оператор $\mathcal{W}$ в представлениях $W^{\lambda_i}_{m,N}$. Оператор $\mathcal{W}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{W}=q^{2h_\rho},\quad h_\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}h_\alpha. \qquad (26)$$

Нам также необходимо нормировать полиномы $P^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)}_i)$, чтобы восстановить симметрию между компонентами зацепления. Если цвет открытой компоненты $\lambda^{(1)}$ (рис. 6), то нормировочный коэффициент $\Xi_{m,N}(\lambda^{(1)})$ равен

$$\boxed{\Xi_{m,N}(\lambda^{(1)})=\prod_{\alpha\in\Phi^+_N}\xi_m(\lambda^{(1)}_\alpha q^{|\alpha|}),} \qquad (27)$$

где α – положительные корни Φ^+_N алгебры sl_N, $\alpha=\sum_{k=i}^{j}\alpha_k$ $(i\le j<N)$, α_k – простые корни sl_N, $|\alpha|=j-i$. Определение $\xi_m(\lambda)$ повторяет опреде-

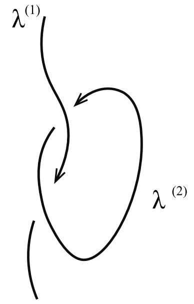


Рис. 6. Цветное $(1,1)$-сплетение, соответствующее зацеплению Хопфа

ление нормировочного коэффициента инвариантов АДО (18):

$$\xi_m(\lambda) = \prod_{i=0}^{m-2} \{\lambda q^{-i}\}. \tag{28}$$

Теперь мы можем определить инварианты $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)})$ в корнях из единицы с параметрами $\lambda_i^{(j)}$ ($i = 1,\ldots,N-1$, $j = 1,\ldots,l$, l – количество компонентов в зацеплении), $\lambda_i^{(1)}$ – цвет открытой компоненты:

$$\boxed{\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)}) = \frac{P^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)})}{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)})}.} \tag{29}$$

Инварианты $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)})$ совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлениях $R_{m,N}$, соответствующих диаграммам Юнга $[(N-1)(m-1),(N-2)(m-1),\ldots,(m-1)]$, когда параметры $\lambda_i^{(j)}$ совпадают со старшими весами представления $R_{m,N}$:

$$P^{\mathcal{L}}_{m,N}\,(\lambda_i^{(j)} = q^{m-1})\Big|_{q^{2m}=1} = H^{\mathcal{L}}_{R_{m,N}}(A = q^N, q)\Big|_{q^{2m}=1}. \tag{30}$$

Инварианты $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)})$ также связаны с полиномами Александера, однако соотношения не так просты, как в случае инвариантов АДО. Они перечислены в [13]. Например, для $N = 3$:

$$P^{\mathcal{K}}_{2,3}\,(\lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^2), \tag{31}$$

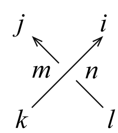
$$P^{\mathcal{K}}_{3,3}\,(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1)\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^3). \tag{32}$$

Инварианты $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda^{(j)})$ совпадают с инвариантами АДО $\Phi^{\mathcal{L}}_m(\lambda^{(1)},\ldots)$ при $N = 2$.

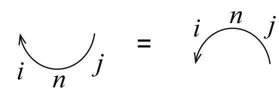
6. Инвариант Кашаева. Существует другой тип инварианта узла, определенный для переменной, равной корню из единицы, определение которого не опирается на представления квантовых алгебр. В этом разделе мы обсуждаем инвариант Кашаева $\langle K\rangle_{m,N}$.

Инвариант Кашаева был определен Ринатом Кашаевым в его работе [10] для так называемых длинных узлов. Он основан на $\mathcal{R}$-матрице, полученной из решений соотношения пентагона, которая зависит от переменной ω, равной корню из единицы, и двух целочисленных спектральных параметров (m и n), связанных с двумя цветами на двух нитях в пересечении. Для определения инварианта Кашаев использует метод РТ, примененный к $(1,1)$-сплетениям – двумерным проекциям длинных узлов. Длинные узлы – это трехмерные аналоги $(1,1)$-сплетений. По определению длинный узел – это вложение $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и существуют a, $b \in \mathbb{R}$ такие, что $f(t) = (0,0,t)$ для любых $t < a$ или $t > b$. Вычисление инвариантов длинных узлов позволяет избежать проблемы с нормировочным коэффициентом.

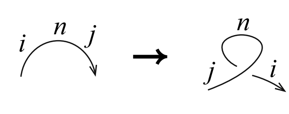
Для определения инварианта Кашаева нужно сделать следующие шаги. Прежде всего фиксируем первообразный корень из единицы ω порядка N, раскрашиваем нити узла или зацепления целыми числами n_i: $0 \le n_i < N$, делаем двумерную проекцию на плоскость, расставляем $\mathcal{R}$-матрицы и операторы точек поворота в соответствии с приведенными ниже правилами и суммируем по всем индексам. Инвариантность полученной суммы показана в [9].



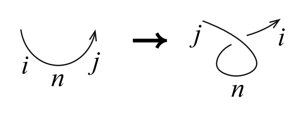
$$= \langle i,j\,|\,r\,(m,n)\,|\,k,l\rangle \tag{33}$$



$$= \delta_{i,j} \tag{34}$$



$$= \omega^{-n}\,\delta_{i,[j+1]_N} \tag{35}$$



$$= \omega^{n}\,\delta_{i,[j+1]_N} \tag{36}$$

$$\langle i,j|r(m,n)|k,l\rangle = V_{i,j-m,k-n,l}(\omega)\omega^{k-l-n+(k-i-n)m}, \tag{37}$$

где

$$V_{i,j,k,l}(\omega) := \frac{N\theta_N([j-i-1]_N + [l-k]_N)\theta_N[(i-l]_N + [k-j]_N)}{(\bar{\omega})_{[j-i-1]_N}(\omega)_{[i-l]_N}(\bar{\omega})_{[l-k]_N}(\omega)_{[k-j]_N}} \tag{38}$$

и $[k]_n = k \bmod n$, $\theta_n(k) = \delta_{k,[k]_n}$, $(x)_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x^k)$.

Как было сказано ранее, для определения инварианта Кашаева мы основываем наши вычисления на $(1,1)$-сплетениях и получаем матричный инвариант. Это инвариант равен единичной матрице $N \times N$, умноженной на цветной полином Джонса в $(m+1)$-мерном представлении L_m (14) (соответствующем диаграмме Юнга $[m]$), вычисленный в точке $q=\omega$:

$$\langle K\rangle_{N,m} = J_{[m]}(\omega) I_N. \tag{39}$$

Этот результат является гипотезой, основанной на рассмотрении различных примеров. Несмотря на то, что Кашаев построил $\mathcal{R}$-матрицу, не основанную на представлениях $\mathcal{U}_q(sl_2)$, полученный инвариант совпадает с полиномом Джонса.

7. Заключение. В этом письме мы рассмотрели разные инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы. Среди них цветные полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ (11), вычисленные в корнях из единицы, инварианты АДО или цветные инварианты Александера и их обобщение, а также инвариант Кашаева.

Все эти инварианты можно определить и вычислить методом РТ, однако для определения инвариантов в корнях из единицы необходимо модифицировать метод: вместо узлов и зацеплений рассматривать $(1,1)$-сплетения и вводить нормировочный коэффициент (18), (27).

Мы определили инварианты АДО (19). Они зависят от переменной, равной корню из единицы и произвольного параметра и соответствуют нильпотентным представлениям с параметрами алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$ в корнях из единицы. Инварианты АДО связаны с полиномами Джонса (25) и Александера (22) и, согласно последним исследованиям, эквивалентны полиномам Джонса [21].

Мы также обсудили инварианты Кашаева, которые определяются с помощью $\mathcal{R}$-матрицы с целочисленными параметрами, которая зависит от переменной, равной корню из единицы, и не определяется с помощью представлений $\mathcal{U}_q(sl_N)$. Полученный полином, предположительно, совпадает с цветным полиномом Джонса (39).

Это письмо также содержит краткое изложение определения инвариантов $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}_{m,N}(\lambda_i^{(j)})$ (30), являющихся обобщением инвариантов АДО. Это новый тип инвариантов, определенных для нильпотентных представлений с параметрами $W^{\lambda_i}_{m,N}$ алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ в корнях из единицы. Они связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ (30) и Александера (31), (32) [13]. Остается вопрос, являются ли эти инварианты независимыми или они эквивалентны цветным полиномам ХОМФЛИ-ПТ.

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 21-52-52004.

Автор чрезвычайно благодарен своим научным руководителям А. Миронову и Ан. Морозову за руководство, терпение и понимание, а также благодарит В. Алексеева, Т. Григорьева, С. Миронова, А. Морозова, А. Слепцова, Н. Целоусова за плодотворные обсуждения.

1. V. F. R. Jones, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 103 (1985).
2. E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
3. N. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II*, LOMI preprints. Technical report, E-4-87, E-17-87 (1988).
4. V. Turaev, Inventiones Mathematicae **92**(3), 527 (1988).
5. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, Am. Math. Soc. **12**, 239 (1985).
6. J. H. Przytycki and P. Traczyk, J. Knot Theor. **4**, 115 (1987); arXiv:1610.06679.
7. M. Marino, Commun. Math. Phys. **253**, 25 (2004); arXiv:hep-th/0207096.
8. S. Garoufalidis and R. Kashaev, arXiv:2108.07553.
9. R. Kashaev, *Invariants of long knots*, Preprint (2019); arXiv:1908.00118.
10. R. Kashaev, *The algebraic nature of quantum dilogarithm, Geometry and integrable models (Dubna, 1994)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ (1996), p. 32.
11. Y. Akutsu, T. Deguchi, and T. Ohtsuki, J. Knot Theory Ramif. **01**(02), 161 (1992).
12. J. Murakami, Osaka J. Math. **45**(2), 541 (2008).
13. L. Bishler, A. Mironov, and A. Morozov, arXiv:2205.05650.
14. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Comm. Math. Phys. **127**, 1 (1990).
15. A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010).
16. L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. Kumar Singh, and A. Sleptsov, JETP Lett. **111**(9), 494 (2020); arXiv:2004.06598.
17. L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. Kumar Singh, and A. Sleptsov, J. Geom. Phys. **159**, 103928 (2021); arXiv:2007.12532.
18. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, in *Strings, Gauge Fields,*

and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer, World Scietific Publishing, Hackensack (2013); arXiv:1112.5754.

19. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
20. L. Kauffman, *Knots, abstract tensors and Yang-Baxter equation*, in *Knots, Topology and Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing, Singapore (1991).
21. S. Willetts, arXiv:2003.09854.
22. B. Abdesselam, D. Arnaudon, and A. Chakrabarti, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 5495 (1995); arXiv:q-alg/9504006v2.