

Спектр нейтральных возбуждений в Лафлиновской жидкости 1/3

О. А. Григорьев, Л. И. Мусина, А. А. Загитова[1]*, А. Б. Ваньков, Л. В. Кулик*

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 25 июля 2022 г.
После переработки 7 августа 2022 г.
Принята к публикации 8 августа 2022 г.

Развита вычислительная схема для определения энергий нейтральных возбуждений со спином 1 в Лафлиновской жидкости на факторе заполнения 1/3. Вычислены параметры ограничивающего потенциала электронной системы в квантовых ямах GaAs/AlGaAs, а также области магнитных полей, при которых возбуждения со спином 1 окажутся нижайшими по энергии.

DOI: 10.31857/S1234567822180057, EDN: kfzzip

В двумерных электронных системах (ДЭС) могут существовать экзотические частицы, называемые энионами, квантовая статистика которых не является ни бозонной, ни фермионной [1, 2]. Например, было предсказано, что элементарные возбуждения ДЭС в режиме дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) при факторе заполнения $\nu = 1/m$ (где m – нечетное целое число) подчиняются абелевой дробной статистике с фазой ϕ, связанной с обменом двумя частицами, равной π/m [3, 4]. На сегодняшний день единственной системой, в которой экспериментально наблюдалась энионная статистика частиц, является состояние ДКЭХ при факторе заполнения $\nu = 1/3$ [5, 6]. Следует отметить, что обнаружение дробной статистики произошло в транспортных экспериментах, в то время как квазичастицы в объеме ДЭС, для которых предсказаны нетривиальные статистические свойства, не вносят вклад в проводимость. Поэтому изучение связи между транспортными характеристиками дробных краевых состояний и квазичастиц в объеме ДЭС является отдельной нетривиальной задачей [7, 8]. Существующие представления о нейтральных возбуждениях непосредственно в объеме энионной системы, не активных в транспортных экспериментах, еще более ограничены. Пионерские работы по исследованию микроволнового поглощения в двумерных гетероструктурах с нарушенной трансляционной симметрией И. В. Кукушкина и соавторов [9, 10] качественно подтвердили выводы теоретических предсказаний, полученных в рамках одномодового приближения [11, 12], для ряда дробных состояний из Джейновской иерархии ДКЭХ [13, 14]. Однако сделать какие-либо выводы о статистических свойствах магниторотонов из этих экспериментов не представляется возможным ввиду того, что подобные возбуждения имеют короткие времена жизни [9], что не оставляет возможностей для экспериментальных манипуляций с макроскопическими ансамблями этих возбуждений.

Возможность создания и исследования долгоживущего неравновесного ансамбля нейтральных возбуждений оптическими методами была описана для двумерной электронной системы в режиме целочисленного квантово-холловского изолятора $\nu = 2$ [15]. Несмотря на значительное сходство с равновесным электрон-дырочным состоянием КЭХ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, которое было обнаружено в двухслойных электронных системах [16, 17], неравновесные ансамбли нейтральных возбуждений, обнаруженные на факторе заполнения 2, имеют ряд особенностей, отличающих их от других конденсированных состояний электронной материи [15, 18]. Оказывается, что для формирования макроскопического ансамбля нейтральных возбуждений необходимым условием является требование, чтобы нижайшими по энергии были возбуждения с изменением полного спина электронной системы, неактивные в процессах взаимодействия со светом (темные возбуждения со спином). Формирование таких возбуждений осуществляется релаксационными механизмами в нижайшее возбужденное состояние после закачки в электронную систему энергии посредством разрешенных высокоэнергетических оптических переходов. В таком случае, благодаря большому времени релаксации нижайших по энергии возбуждений, которое связано с необходимостью одновременного изменения спина электронной системы и испускания большого числа фононов с определенными энергиями, удается сформировать макроскопические неравновесные ансамбли этих возбуждений. На первый взгляд подобный вариант в случае ДЭС при

[1])e-mail: zagitova@issp.ac.ru

$\nu = 1/3$ кажется нереализуемым, поскольку в рамках одномодового приближения, доказавшего свою эффективность при описании нейтральных возбуждений с нулевым спином, предсказывается, что единственным возбуждением со спином 1 является спиновый экситон, активный в испускании ЭПР фотона, дисперсия которого аналогична дисперсии спинового экситона в холловском ферромагнетике при $\nu = 1$ [19]. С другой стороны, точное решение уравнения Шредингера для многочастичной электронной системы указывает на то, что в дробном состоянии $\nu = 1/3$ появляются возбуждения со спином 1 и импульсом порядка обратной магнитной длины, которые могут иметь меньшую энергию, чем минимальная энергия магниторотонов [20]. Данный результат не учитывает вклад в энергию этих возбуждений одночастичной зеемановской энергии, линейно зависящей от магнитного поля. Поэтому вопрос о том, могут ли нейтральные возбуждения с единичным спином иметь меньшую энергию, чем магниторотоны, по крайней мере для высокоподвижных GaAs/AlGaAs квантовых ям, остается открытым. В данной работе представлены результаты решения уравнения Шредингера для двумерной электронной системы при $\nu = 1/3$ с конечным числом частиц, из которых следует, что, действительно, при определенных параметрах ограничивающего потенциала квантовой ямы AlGaAs/GaAs, нижайшими по энергии оказываются возбуждения с изменением спина электронной системы на 1.

Рассмотрим ДЭС с кулоновским взаимодействием и периодическими граничными условиями в виде прямоугольной ячейки $\Lambda \ni z = \alpha\tau_1 + \beta\tau_2$, $0 \le \alpha, \beta \le$ ≤ 1, где z – комплексная координата, а $\tau_{1,2}$ — вектора ячейки. Пусть магнитное поле B перпендикулярно плоскости ДЭС, и ячейку пронизывает целое число N_s квантов магнитного потока. В такой системе одноэлектронный спектр представляет собой дискретные уровни Ландау $\hbar\omega_C\left(n + \frac{1}{2}\right)$, где $\omega_C = \frac{eB}{m}$, n – целое число. Кратность вырождения уровня Ландау равна N_s. Для системы из N_e электронов базисные состояния можно определить в результате диагонализации кинетической части гамильтониана $\prod_{j=1}^{N_e} a^{\dagger}_{i_j,n_j}|0\rangle$. Парное взаимодействие задается выражением

$$\hat{H}_C = \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4} V^{n_1n_2n_3n_4}_{i_1i_2i_3i_4} a^{\dagger}_{\alpha,i_1,n_1} a^{\dagger}_{\beta,i_2,n_2} a_{\beta,i_3,n_3} a_{\alpha,i_4,n_4}, \tag{1}$$

где $a^{\dagger}_{\alpha,i_k,n_k}$ и a_{α,i_k,n_k} – соответственно операторы рождения и уничтожения k-го электрона со спином α в состоянии ψ^n_i. Здесь n обозначает номер уровня Ландау ($0 \le n < \infty$), а i — число состояний в пределах уровня Ландау ($1 \le i \le N_s$).

Для нахождения энергетического спектра данной системы необходимо вычислить матричные элементы кулоновского потенциала и провести диагонализацию (1). Будем считать, что циклотронная энергия $\hbar\omega_C$ и энергия зеемановского расщепления намного превышают энергию кулоновского взаимодействия электронов $\frac{e^2}{\epsilon l_B}$.Тогда можно пренебречь вкладом верхних уровней Ландау и считать, что все электроны поляризованы по спину. В этом случае для точной диагонализации достаточно учесть конечное число матричных элементов. Для многоэлектронной системы с N_e электронами, занимающими N_s возможных состояний, фоковский базис состоит из $C^{N_e}_{N_s}$ векторов, что делает процесс точной диагонализации даже для простых дробей весьма непростой задачей. Однако используя наблюдение [21] о существовании некоторого оператора, подобного оператору импульса, с квантовыми числами $\gcd(N_e, N_s)$, становится возможным построить более простую схему.

Гамильтониан электрона в постоянном магнитном поле имеет вид $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right)^2$. Одноэлектронное состояние на нижнем уровне Ландау можно представить [22] как

$$\psi(x,y) = f(z)\exp\left(-\frac{y^2}{2l_B^2}\right), \quad z = x + iy. \tag{2}$$

Оператор трансляций в магнитном поле $\hat{t}_m(\tau) =$ $= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right)\tau\right)$ удовлетворяет периодическим граничным условиям $\hat{t}_m(\tau_{1,2})\psi = \psi$. В калибровке Ландау $\hat{A} = \binom{0}{Bx}$, следовательно, по формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\hat{t}_m(\tau) = \exp\left(\frac{i\tau_x\tau_y}{2l_B^2}\right)\exp\left(\frac{i\tau_y x}{l_B^2}\right)\hat{t}(\tau), \tag{3}$$

$$\hat{t}_m(\tau_1)\hat{t}_m(\tau_2) = \exp\left(\frac{i\left(\tau_{1x}\tau_{2y} - \tau_{1y}\tau_{2x}\right)}{l_B^2}\right)\hat{t}_m(\tau_2)\hat{t}_m(\tau_1), \tag{4}$$

где $\hat{t}(\tau)$ соответствует переносу на $\tau = \tau_x + i\tau_y$. Чтобы состояние сохранялось при трансляции, $\hat{t}(\tau_1)$ и $\hat{t}(\tau_2)$ должны коммутировать:

$$\tau_{1x}\tau_{2y} - \tau_{1y}\tau_{2x} = 2\pi N_s l_B^2,\ \ N_s \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Применяя (3) к (2) и учитывая, что $\hat{t}_m(\tau_{1,2})\psi = \psi$, получаем следующее условие на f:

$$\frac{f(z+\tau_i)}{f(z)} = \exp\left(-\frac{i(\tau_i + 2z)\tau_{iy}}{2l_B^2}\right). \tag{6}$$

Задавая $\tau_1 \in \mathbb{R},\ \tau_2 = |\tau_2|e^{i\theta}$ (заметим, что (5) дает $\tau_1|\tau_2|\sin\theta = 2\pi N_s l_B^2$), получаем $\frac{f(z+\tau_1)}{f(z)} = 1$, и, следовательно, представляем f в виде ряда Фурье: $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp\left(i\frac{2\pi k z}{\tau_1}\right)$. Чтобы найти его коэффициенты, подставляем его в (6), что дает

$$c_{k+N_s} = \exp\left(\frac{i\tau_2\pi N_s}{\tau_1}\right)\exp\left(i\frac{2\pi k\tau_2}{\tau_1}\right)c_k. \tag{7}$$

Функция $f(z)$, соответствующая состояниям нижнего уровня Ландау и периодичному граничному условию, образует линейное пространство размерности N_s, так что

$$f_r(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(i\frac{m(m|\tau_2|\sin\theta + 2X_r)|\tau_2|e^{i\theta}}{2l_B^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\frac{(X_r + m|\tau_2|\sin\theta)\,z}{l_B^2}\right),\ X_r = \frac{2\pi l_B^2 r}{\tau_1}. \tag{8}$$

Волновые функции нижнего уровня Ландау имеют вид

$$\psi_r(x,y) = \left(\frac{1}{\tau_1\sqrt{\pi}l_B}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp\left(i\frac{(m^2|\tau_2|^2\sin\theta + 2X_r m|\tau_2|)\cos\theta}{2l_B^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\frac{(X_r + m|\tau_2|\sin\theta)\,x}{l_B^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(y + X_r + m|\tau_2|\sin\theta)^2}{2l_B^2}\right).$$

Аналогично, на n-м уровне Ландау

$$\psi_r^n = \left(\frac{1}{L_1\sqrt{\pi}2^n n! l_B}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\left(2\pi j\frac{L_2\cos\theta}{L_1}\right)} e^{i\frac{m^2L_2^2\sin 2\theta}{4l_B^2}}\exp\left(i\frac{(X_r + mL_2\sin\theta)\,x}{l_B^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(y + X_r + mL_2\sin\theta)^2}{2l_B^2}\right)H_n\left(\frac{y + X_r + mL_2\sin\theta}{l_B}\right). \tag{9}$$

Наконец, нужно оценить матричные элементы в (1). Пользуясь трансляционной инвариантностью волновых функций, их можно переписать как $A^{n_1n_2n_3n_4}_{j_1j_2j_3j_4} = \int_\Lambda dr_1\int_\Lambda dr_2 \psi^{n_1*}_{j_1}(r_1)\psi^{n_2*}_{j_2}(r_2)\tilde{V}(r_1 - r_2)\psi^{n_3}_{j_3}(r_2)\psi^{n_4}_{j_4}(r_1)$, где $\tilde{V}(r) = \sum_{k_1,k_2}\frac{e^2}{|r + k_1\tau_1 + k_2\tau_2|}$. Будучи двоякопериодической функцией, она также может быть представлена рядом Фурье $\tilde{V}(z) = \frac{2\pi l_B^2}{\sigma}\sum_{q\in L^{-1}}\frac{e^2}{q}\exp(i(q,r))$, где σ обозначает площадь примитивной ячейки, и $L = \{k_1\tau_1 + k_2\tau_2,\ k_1,k_2 \in \mathbb{Z}\}$. Суммирование ряда происходит по обратной решетке L^{-1}, $\forall q \in L^{-1}$, $r \in L$ $(q,r) = 2\pi N$, $N \in \mathbb{Z}$.

Для учета геометрического ослабления кулоновского взаимодействия в фурье-компоненту кулоновского потенциала был введен геометрический формфактор $F(q)$, вычисляемый по профилю огибающей волновой функции электронов в нижайшей подзоне зоны проводимости в квантовой яме GaAs/AlGaAs:

$$\tilde{V}(z) = \frac{2\pi l_B^2}{\sigma}\sum_{q\in L^{-1}}\frac{e^2F(q)}{q}\exp(i(q,r)). \tag{10}$$

Подставляя выражения из (9) и (10), получаем

$$A^{n_1n_2n_3n_4}_{j_1j_2j_3j_4} = \frac{2e^2}{\sigma}\sum_{q\in L^{-1}}\frac{F(q)}{q}\mathcal{G}^{n_1,n_4}(q)\mathcal{G}^{n_2n_3}(-q), \tag{11}$$

где (L_n^k – обобщенный многочлен Лагерра)

$$\mathcal{G}^{n_sn_t}(q) = \sqrt{\pi}\exp\left(i\frac{2\pi^2\cot\theta l_B^2}{\tau_1^2}\left(j_s - j_t - \frac{q_x\tau_1}{2\pi}\right)\left(j_s + j_t - \frac{q_x\tau_1}{2\pi}\right)\right)\exp\left(iq_y\left(X_{j_s} + \frac{q_xl_B^2}{2}\right)\right)e^{-\left(\frac{1}{2}lq\right)^2}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\min(n_s,n_t)!}{\max(n_s,n_t)!}}\left(\frac{l(\mathrm{sign}(n_t - n_s)q_x + iq_y)}{\sqrt{2}}\right)^{|n_s-n_t|}L^{|n_s-n_t|}_{\min(n_s,n_t)}\left(\frac{q^2l^2}{2}\right)\delta'_{\frac{q_x\tau_1}{2\pi}+j_t-j_s}. \tag{12}$$

Функция $F(q)$ вычислялась для реальных параметров экспериментального образца и затем аппроксимировалась выражением $F(q) = \frac{1.5060801}{q+1} - \frac{0.48825941}{(q+1)^2} - 0.02609079$. Моделирование проводилось для ДЭС в GaAs с $\varepsilon = 12.5$, $m^* = 0.067m_0$ и $n_e = 8 \times 10^{10}$ см$^{-2}$.

Чтобы убедиться в точности нашей вычислительной схемы, в первую очередь мы сравнили аналитический расчет дисперсии спиновых экситонов для холловского ферромагнетика $\nu = 1$ [19] с численным решением уравнения Шредингера для системы из 28, 29 и 30 электронов. На рисунке 1 видно, что оба

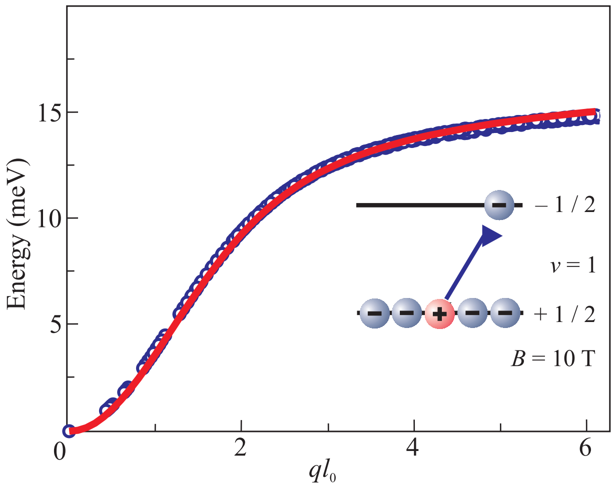

Рис. 1. (Цветной онлайн) Кружками обозначены данные, полученные при решении уравнения Шредингера для идеальной ДЭС из 28, 29 и 30 электронов во внешнем магнитном поле 10 Тл (одночастичная зеемановская энергия считается равной нулю, а геометрический форм-фактор равен единице). Сплошной линией показан аналитический расчет по формуле $E_0(q) = \frac{e^2}{\epsilon l_0}\left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}\left[1 - e^{-q^2 l_0^2/4} I_0\left(\frac{q^2 l_0^2}{4}\right)\right]$ из [19], где I_0 – модифицированная функция Бесселя, l_0 – магнитная длина. На вставке схематично изображен спиновый экситон

результата хорошо согласуются между собой. Следующим шагом в проверке нашей вычислительной схемы является сравнение решения уравнения Шредингера для конечного числа частиц (7, 8 и 9) в дробном состоянии $\nu = 1/3$ с дисперсионной зависимостью магниторотонов, полученной в одномодовом приближении [11, 12]. Видно, что при значениях импульса меньше обратной магнитной длины численные расчеты для магниторотонной ветви совпадают с результатом в одномодовом приближении (рис. 2). Также в области импульсов около полутора обратных магнитных длин воспроизводится минимум на дисперсионной зависимости магниторотонов, хотя он

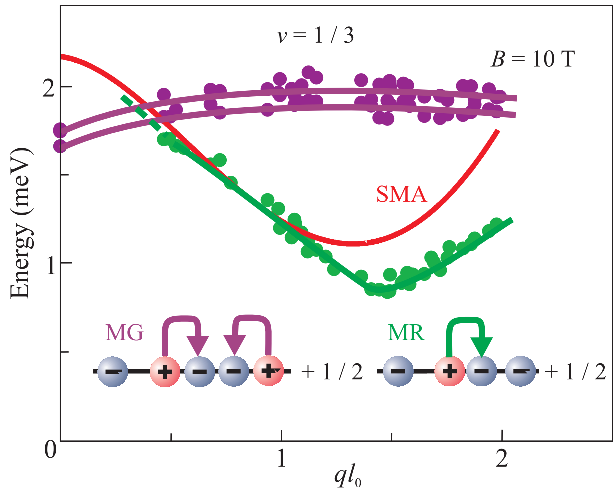

Рис. 2. (Цветной онлайн) Энергии нейтральных возбуждений в дробном состоянии $\nu = 1/3$, вычисленные путем решения уравнения Шредингера для ДЭС с δ-функциональной квантовой ямой GaAs/AlGaAs, состоящей из 7, 8 или 9 электронов, во внешнем магнитном поле 10 Тл. Зеленые точки соответствуют ветви магниторотонов, фиолетовые – двум нижайшим ветвям континуума биротонов. Сплошные и пунктирные линии добавлены для удобства. Сплошная красная кривая – аналитический расчет магниторотонной дисперсии на основе одномодового приближения. На вставках схематически изображены магниторотон (MR) и биротон (MG) с нулевым спином

и оказывается глубже, чем предсказывает одномодовое приближение. Помимо магниторотонной ветви, в дисперсионной зависимости появляется континуум колебаний электронной плотности с полным угловым моментом 2, что согласуется с предположениями, сделанными в работе [23]. Далее будем называть этот тип нейтральных возбуждений магнитогравитонами в соответствии с теоретической номенклатурой, сложившейся в научной литературе по таким возбуждениям [23–25], или биротонами, что больше соответствует интуитивным представлениям о природе этих возбуждений. Биротоны с нулевым спином вблизи $q = 0$ представляют собой комплексы из двух магниторотонов с противоположно направленными импульсами равной величины [26]. При нулевом импульсе энергия биротона минимальна и равна удвоенной энергии ротонного минимума (без учета взаимодействия между магниторотонами). Остальные двойные комбинации магниторотонов имеют большую энергию, что приводит к положительной дисперсии биротонов.

Центральным результатом наших расчетов является появление ветви возбуждений с меньшей энергией, чем у магниторотонов. Чтобы исследовать при-

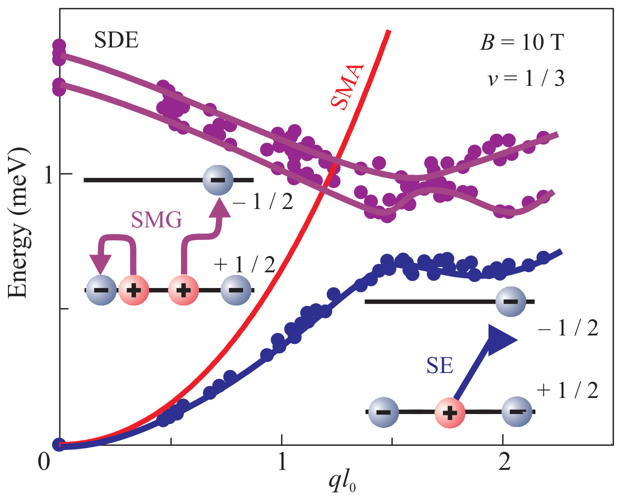

Рис. 3. (Цветной онлайн) Энергии возбуждений со спином 1 в дробном состоянии $\nu = 1/3$, полученные путем решения уравнения Шредингера для ДЭС с δ-функциональной квантовой ямой GaAs/AlGaAs, состоящей из 7, 8 или 9 электронов, во внешнем магнитном поле 10 Тл. Синие точки соответствуют возбуждению спиновых экситонов, фиолетовые точки – двум нижним ветвям континуума биротонов со спином 1. Сплошная красная линия – аналитический расчет дисперсии спиновых экситонов в одномодовом приближении. На вставках схематически изображены спиновый экситон (SE) и спиновый биротон (SMG)

роду этой ветви, рассмотрим дисперсию трех нижайших по энергии возбуждений со спином 1 (рис. 3). Наличие спинового экситона (возбуждения на нулевом уровне Ландау с переворотом спина) согласуется с предсказанием в одномодовом приближении [20]. Однако оказывается, что, помимо этого возбуждения, в спектре присутствуют комбинированные ветви спин-зарядовых возбуждений. Спин-зарядовые ветви соответствуют возбуждениям с одновременными осцилляциями плотности заряда на нижнем спиновом подуровне нулевого уровня Ландау и переворотом спина. Назовем данные возбуждения биротонами со спином 1, поскольку их можно представить как комбинацию магниторотонов с нулевым и единичным спинами. При некотором импульсе энергии ветвей спиновых биротонов и спиновых экситонов пересекаются, что приводит к расталкиванию данных ветвей и образованию локальных минимумов энергии. Соответственно, при импульсах, близких к нулю, спиновая ветвь с наименьшей энергией ведет себя как спин-экситонная, а при импульсах порядка обратной магнитной длины становится спиновой магниторотонной ветвью. При этом в случае δ-функциональной квантовой ямы GaAs/AlGaAs ее энергия оказывается наименьшей среди всех остальных нейтральных возбуждений в электронной системе.

Для использования полученных результатов в эксперименте необходимо установить, насколько учет геометрического форм-фактора, связанного с нелокальностью электронных волновых функций в направлении роста полупроводниковых гетероструктур с квантовыми ямами GaAs/AlGaAs, ослабляющего кулоновское взаимодействие [27] и одночастичной зеемановской энергии [28], может повлиять на вычисленные энергии возбуждений, и будут ли ветви спиновых возбуждений по-прежнему иметь наименьшую энергию. На рисунке 4 представлены зависимости энергии ротонных минимумов от магнитного поля и ширины квантовой ямы. Оказывается, что ниже некоторого критического магнитного поля энергия ветви возбуждений со спином 1 имеет наименьшее значение. В этом случае комбинация магниторотонов с нулевым и единичным спинами, т.е. биротонов со спином 1, будет иметь энергию меньше, чем энергия биротона со спином 0. Таким образом, спиновый экситон с одночастичной зеемановской энергией и спиновый биротон будут нижайшими по энергии нейтральными возбуждениями в электронной системе.

Таким образом, нами представлена расчетная схема для определения дисперсионных зависимостей нейтральных возбуждений в дробном состоянии КЭХ 1/3. Показано, что при определенных ограничениях, накладываемых на величину магнитного поля (электронную концентрацию) и ширину квантовой ямы GaAs/AlGaAs, можно реализовать экспериментальные условия для формирования макроскопического ансамбля нейтральных возбуждений со спином 1. Существуют две низкоэнергетические ветви спиновых возбуждений при нулевом импульсе (ситуация, наиболее просто реализуемая в эксперименте): спиновый экситон и спиновый биротон (магнитогравитон). Формирование макроскопического ансамбля спиновых экситонов в условиях стационарного оптического возбуждения электронной системы невозможно вследствие слишком короткого времени жизни этих возбуждений [28], в то время как создание макроскопического ансамбля спиновых биротонов (магнитогравитонов) является вполне реализуемой экспериментальной задачей [29].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект # 18-12-00246.

1. J. Leinaas and J. Myrheim, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **37**, 1 (1977).
2. F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).

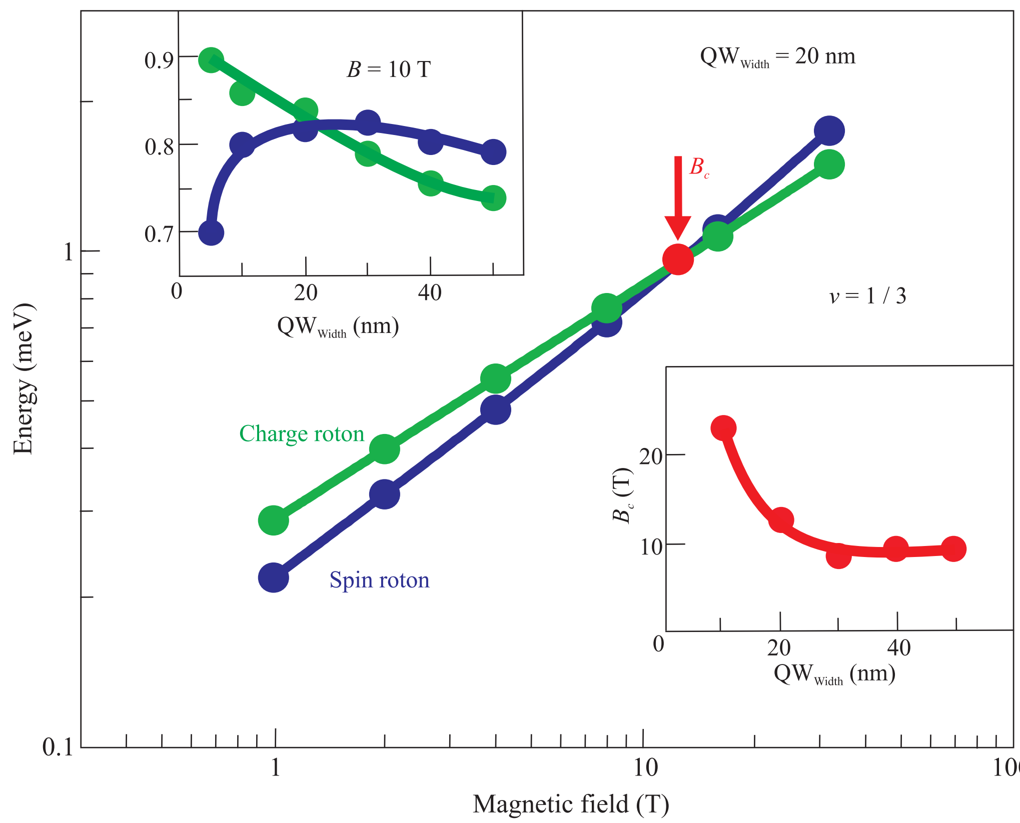

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости энергии ротонных минимумов для биротонов со спином 0 и 1 (зеленые и синие точки соответственно) от магнитного поля для квантовой ямы GaAs/AlGaAs шириной 20 нм, полученные путем решения уравнения Шредингера для ДЭС из 7, 8 или 9 электронов. На верхней вставке показана зависимость энергии ротонных минимумов при 10 Тл в зависимости от ширины квантовой ямы. Значения одночастичной зеемановской энергии для различных ширин ям взяты из [27]. На нижней вставке показана зависимость величины критического магнитного поля, в котором энергии ротонных минимумов для возбуждений со спинами 0 и 1 становятся равными, от ширины квантовой ямы

3. B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).
4. D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
5. H. Bartolomei, M. Kumar, R. Bisognin, A. Marguerite, J. M. Berroir, E. Bocquillon, B. Plaçais, A. Cavanna, Q. Dong, U. Gennser, Y. Jin, and G. Féve, Science **368**, 173 (2020).
6. J. Nakamura, S. Liang, G. C. Gardner, and M. J. Manfra, Nature Phys. **16**, 931 (2020).
7. X. G. Wen, Mod. Phys. Lett. B **5**, 39 (1991).
8. A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
9. I. V. Kukushkin, J. H. Smet, V. W. Scarola, V. Umansky, and K. von Klitzing, Science **324**, 1044 (2009).
10. I. V. Kukushkin, J. H. Smet, K. von Klitzing, and W. Wegscheider, Nature **415**, 409 (2002).
11. S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, Phys. Rev. Lett. **54**, 581 (1985).
12. S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, Phys. Rev. B **33**, 2481 (1986).
13. J. K. Jain, Phys. Rev. B **41**, 7653 (1990).
14. B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
15. L. V. Kulik, A. S. Zhuravlev, S. Dickmann, A. V. Gorbunov, V. B. Timofeev, I. V. Kukushkin, and S. Schmult, Nat. Commun. **7**, 13499 (2016).
16. J. P. Eisenstein and A. H. MacDonald, Nature **432**, 691 (2004).
17. Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, ZhETF **71**, 738 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 389 (1976)].
18. А. В. Горбунов, А. В. Ларионов, Л. В. Кулик, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **114**, 479 (2021) [JETP Lett. **114**, 417 (2021)].
19. Y. A. Bychkov, S. V. Iordanskii, and G. M. Eliashberg, JETP Lett. **33**, 143 (1981).
20. J. P. Longo and C. Kallin, Phys. Rev. B **47**, 4429 (1993).
21. F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **55**, 2095 (1984).
22. D. Yoshioka, Phys. Rev. B **29**, 6833 (1984).
23. B. Yang, Z. Hu, Z. Papić, and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **108**, 256807 (2012).

24. S. Golkar, D. X. Nguyen, and D. T. Son, J. High Energy Phys. **2016**, 21 (2016).
25. A. Gromov and D. T. Son, Phys. Rev. X **7**, 041032 (2017).
26. K. Park and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **84**, 5576 (2000).
27. M. J. Snelling, G. P. Flinn, A. S. Plaut, R. T. Harley, A. C. Tropper, R. Eccleston, and C. C. Phillips, Phys. Rev. B **44**, 11345 (1991).
28. A. S. Zhuravlev, S. Dickmann, L. V. Kulik, and I. V. Kukushkin, Phys. Rev. B **89**, 161301 (2014).
29. А. С. Журавлев, Л. В. Кулик, Л. И. Мусина, Е. И. Белозеров, А. А. Загитова, И. В. Кукушкин, Письма в ЖЭТФ **114**, 474 (2021).