Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 6, с. 399 – 400

Комментарий к статье “Теория вращающегося двумерного вигнеровского кластера” (Письма в ЖЭТФ 115(10), 642 (2022))

К. В. Чукбар[1)]

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июля 2022 г.
После переработки 1 июля 2022 г.
Принята к публикации 16 августа 2022 г.

DOI: 10.31857/S1234567822180112, EDN: kgnwoo

В работе [1] изучалось поведение двумерного кластера взаимодействующих электронов в переменном магнитном поле. Полученные результаты весьма интересны и актуальны, однако, как представляется, в тексте недостаточно прослежен общефизический контекст решаемых задач.

В частности, авторы пишут, что изменение однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости жесткого кластера, с B_1 на B_2 вызывает его вращение как целого с частотой, равной разности “циклотронных получастот”: $\Omega = (\omega_{B1}-\omega_{B2})/2, \omega_B = eB/(mc)$. Эта получастота имеет стандартное наименование в физической номенклатуре, а сам эффект является прямым следствием так называемой теоремы Лармора. Вот как она формулируется в классическом курсе [2] (§ 45, с. 142): “...в нерелятивистском случае поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m, совершающих финитное движение в центрально-симметричном электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле $\mathbf{B}$, эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = e\mathbf{B}/(2mc)\ldots$, а угловая скорость $\Omega = eB/(2mc)$ называется *ларморовой частотой*”.

В случае кластера роль внешнего электрического поля, обеспечивающего финитность эволюции системы, играет внешний же параболический потенциал. Как можно увидеть из доказательства теоремы Лармора в [2], ни электрическая его природа, ни центральная симметрия не требуются, используется только зависимость этого потенциала лишь от расстояний частиц до центра системы, так что аксиальной симметрии и направленности как магнитного поля, так и частоты вращения вдоль оси кластера вполне достаточно. Под слабостью же магнитного поля понимается малость циклотронной частоты в сравнении с собственными частотами системы, а у жесткого кластера такие частоты стремятся к бесконечности.

Вообще, ларморовы частоты проявляются в самых разных случаях. Наряду с разобранным эффектом, можно сослаться на указанную в [3] (§ 64, с. 310) эквивалентность задачи об определении переменного магнитного поля вокруг неравномерно вращающегося тела задаче об определении магнитного же поля вокруг неподвижного тела, находящегося в однородном внешнем поле с $\mathbf{B} = -2mc\mathbf{\Omega}/e$ или на “классическое” объяснение эффекта Зеемана в томсоновской модели атома – см. задачу к § 21 на с. 79 в [2]. Да достаточно просто сравнить выражения для двух гироскопических сил: магнитной составляющей силы Лоренца $m\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{v}$ и силы Кориолиса $m2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$.

Далее, утверждение авторов [1], что свободные электроны в аналогично изменяющемся магнитном поле “будут вращаться вокруг некоторых положений” также не вполне корректно. По крайней мере, если под свободой понимать отсутствие взаимодействия не только с параболическим потенциалом, но и между собой и при не слишком быстром переключении от B_1 до B_2 за время τ, удовлетворяющее неравенству $\omega_B\tau \gg 1$, их поведение не таково. Следует заметить, что даже если магнитное поле очень мало (~ 1 Гс), то время переключения должно превышать всего лишь половину микросекунды (для $\omega_B\tau \sim 10$), т.е. в реальном эксперименте при создании B магнитными катушками указанное соотношение будет выполняться с большим запасом.

В таком режиме основным эффектом будет радиальное смещение электронов к центру или от центра системы в зависимости от того, растет или падает внешнее поле. Согласно гл. III в [4] при выполнении этого неравенства в уравнении движения электрона

[1)]e-mail: Chukbar_KV@nrcki.ru

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

под воздействием какой-либо перпендикулярной к внешнему магнитному полю силы $\mathbf{F}$ можно пренебречь инерцией в левой части в сравнении с последним членом в правой части. В результате эта сила приводит к так называемому дрейфовому движению со скоростью, направленной вдоль $-\mathbf{F}\times\mathbf{B}$ (аналог прецессии гироскопа). В данном случае в цилиндрической системе координат в задаче наличествует переменное во времени, но однородное в пространстве магнитное поле $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{e}_z$ с вектор-потенциалом $\mathbf{A} = Br/2\cdot\mathbf{e}_\varphi$, порождающее индукционное электрическое поле $\mathbf{E} = -1/c\cdot\partial\mathbf{A}/\partial t$.

Согласно сказанному выше, исходно покоящийся в таком $\mathbf{B}$ электрон в первом приближении будет испытывать дрейф в скрещенных полях $\mathbf{v}_E = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$. Его скорость равна $v_E = \dot{r} = -\dot{B}r/(2B)$, т.е. движение происходит с сохранением интеграла $r^2B = \text{const}$ (смена знака магнитного поля в таком подходе не описывается, поскольку вблизи $B \to \to 0$ дрейфовое приближение неизбежно нарушается). Иными словами, при изменении B, скажем, в два раза, кластер "свободных" электронов как простая совокупность невзаимодействующих (например, из-за большой разреженности) частиц сожмется или расширится в $\sqrt{2}$ раз. Поскольку данный вариант соответствует другой крайности – случаю предельно мягкой системы (с нулевыми собственными частотами), то не удивительно, что в реалистичных расчетах [1] наблюдалось и вращение, и сжатие кластера. В принципе, в движении можно учесть и следующий член разложения по параметру $(\omega_B\tau)^{-1}$ – дрейф под воздействием силы инерции $-m\dot{\mathbf{v}}_E$, который из-за связи с переменностью уже электрического поля принято называть "поляризационным" [4]. Нетрудно видеть, что он приводит к угловому смещению электрона по закону $r\dot{\varphi} = \dot{v}_E/\omega_B$, или, если угодно, с учетом указанного закона сохранения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mc}{e\sqrt{B}}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)$$

(при $B > 0$, в противном случае под корнем стоит $-B$, и знак правой части меняется). Иными словами, мягкий кластер не только сжимается/расширяется, но и слегка проворачивается, однако смещение по углу много меньше радиального. "Вращаются вокруг некоторых положений" только электроны, помещенные в магнитное поле с исходно ненулевой скоростью (но и при этом дрейф неизбежен) или испытавшие "скачок" этого поля с $\omega_B\tau \ll 1$, при котором уже инерция доминирует над магнитной составляющей силы Лоренца. Однако, как указано выше, реализовать такой режим на практике, а не в расчетах крайне непросто.

И в заключение следует отметить, что и вращение жесткого, и сжатие мягкого кластера являются тривиальным следствием закона сохранения обобщенного углового импульса (момента импульса) системы вследствие нетеровой симметрии ее лагранжиана:

$$\sum_i \left[mr_i^2\dot{\varphi}_i - \frac{e}{c}A(t,r_i)r_i\right] = \text{const}.$$

Просто в первом случае ввиду невозможности радиального движения компенсация переменной полевой составляющей происходит за счет механической, а во втором все решается внутри члена с вектор-потенциалом (инерция дрейфового движения ничтожна). Лагранжев и гамильтонов подход позволяет сделать очень многое, например, проанализировать, как модифицируется дрейфовый интеграл r^2B при прохождении $B(t)$ через 0.

Автор благодарен А. С. Иоселевичу и В. П. Пастухову за ценные обсуждения.

1. М. М. Махмудиан, М. М. Махмудиан, М. В. Энтин, Письма в ЖЭТФ **115**, 642 (2022).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. II. Теория поля*, Наука, М. (1973), 504 с.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. VIII. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982), 624 с.
4. Д. А. Франк-Каменецкий, *Лекции по физике плазмы*, Атомиздат, М. (1968), 288 с.