Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 3, стр. 153 — 155 10 февраля 1992 г.

НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ БОЗОННАЯ СТРУНА И $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$

С.А.Меркулов

Отдел теоретических проблем РАН
121002, Москва

Поступила в редакцию 19 ноября 1991 г.

Доказано, что пространство комплексных структур на фазовом пространстве открытой бозонной струны, играющее главную роль в одном из непертурбативных подходов к квантованию струны, изоморфно кэлерову многообразию $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$, а не $\mathrm{Diff}S^1/S^1$ как утверждалось в [1].

Бовик и Раджив [1] предложили новый геометрический и непертурбативный подход к теории бозонной струны, в котором главную роль играет пространство $\mathcal{M}$ всех комплексных структур на фазовом пространстве открытой бозонной струны $\Omega R^{d-1,1}$. В этой работе мы покажем, что естественная комплексная структура J на $\Omega R^{d-1,1}$ инвариантна не только относительно поворотов S^1, но и относительно менее очевидной группы симметрий $SL(2,R) \subset \mathrm{Diff}S^1$. Из этого результата следует важный вывод (физическое значение которого мы обсудим в заключение), что пространство $\mathcal{M}$ изоморфно однородному кэлерову многообразию $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$, а не многообразию $\mathrm{Diff}S^1/S^1$, как утверждалось в [1] и других работах [2-4].

Пусть $\mathcal{L}R^{d-1,1}$ есть пространство отображений окружности в пространство Минковского $R^{d-1,1}$, а $\Omega R^{d-1,1} \equiv \Omega R^{d-1,1}/R^{d-1,1}$ - пространство петель с отмеченной точкой. В [1] показано, что $\Omega R^{d-1,1}$ можно отождествить с фазовым пространством открытой бозонной струны или с конфигурационным пространством замкнутой бозонной струны.

Векторным полям $ie^{ik\sigma}\frac{d}{d\sigma}$, $k \in Z$, на S^1 соответствуют векторные поля

$$L_k = i\int d\sigma e^{-ik\sigma}\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}\frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)} \tag{1}$$

на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$, реализующие представление алгебры Ли $\mathrm{Diff}S^1$,

$$[L_m,\ L_n] = (m-n)L_{m+n}. \tag{2}$$

Пусть J - некоторая лоренц-инвариантная комплексная структура на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$. Ее удобно представить в форме интегрального оператора

$$J(W) = \int d\sigma \{ \int d\sigma' J^{\mu}_{\nu}(\sigma,\ \sigma') W^{\nu}(\sigma') \} \frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\sigma)}, \tag{3}$$

где $W = \int d\sigma W^{\nu}(\sigma) \frac{\delta}{\delta x^{\nu}(\sigma)}$ - произвольное векторное поле на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$. Поскольку комплексная структура J лоренц-инварианта, ее интегральное ядро должно иметь вид $J^{\mu}_{\nu}(\sigma,\ \sigma') = \delta^{\mu}_{\nu} J(\sigma,\ \sigma')$ для некоторой функции $J(\sigma,\ \sigma')$ на $S^1 \times S^1$ (интеграл в (3) понимается в смысле главного значения). Тогда условие комплексности $J^2 = -id$ принимает форму

$$\int d\sigma' J(\sigma,\ \sigma') J(\sigma',\ \sigma'') = -\delta(\sigma - \sigma''). \tag{4}$$

Наша следующая задача - найти те комплексные структуры на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$, которые инвариантны относительно действия векторных полей L_0 и L_k для некоторого $k \in Z\backslash 0$, то есть удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{L}_{L_0} J = 0, \qquad \mathcal{L}_{L_k} J = 0, \tag{5}$$

где $\mathcal{L}_W$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля W. Прямолинейные вычисления показывают, что уравнения (5) эквивалентны следующему дифференциальному уравнению для ядра $J(\sigma,\ \sigma') = J(\sigma - \sigma')$ комплексной структуры (3)

$$[e^{-ik(\sigma-\sigma')} - 1] \frac{d}{d\sigma} J_k(\sigma - \sigma') = ik J_k(\sigma - \sigma'), \quad k \in Z\backslash 0, \tag{6}$$

из которого следует

$$J_k(\sigma - \sigma') = A\{1 - e^{-ik(\sigma-\sigma')}\}^{-1} = \frac{A}{2}[1 + i\mathrm{ctg}(\frac{1}{2}k\sigma)], \tag{7}$$

для некоторой константы A. Нетрудно убедиться в том, что среди функций (7) лишь функции $J_k(\sigma - \sigma')$ с $k = \pm 1$ могут быть нормализованы таким образом, чтобы удовлетворять уравнению (4). Таким образом, на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$ существует единственная комплексная структура J_{+1} с ядром

$$J_{+1}(\sigma - \sigma') = i[1 + i\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(\sigma - \sigma')] = i \sum_{m \geq 0} e^{im\sigma} - i \sum_{m<0} e^{im\sigma} \tag{8}$$

которая инвариантна относительно L_0 и L_1, а также единственная комплексная структура J_1 с ядром

$$J_{-1}(\sigma - \sigma') = ie^{i(\sigma-\sigma')}[1 + i\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(\sigma - \sigma')] = i \sum_{m \geq 1} e^{im\sigma} - i \sum_{m<1} e^{im\sigma}, \tag{9}$$

которая инвариантна относительно L_0 и L_{-1}.

Если $W'^{\mu}(\sigma) = \sum_{n \in Z} W^{\mu}_n e^{in\sigma}$ - компоненты некоторого вектора на $\mathcal{L}R^{d-1,1}$, то в явной форме действия комплексных структур J_{-1} и J_{+1} записываются так

$$(J_{+1}(W))^{\mu} = +iW^{\mu}_0 + i \sum_{n \neq 0} \mathrm{sgn}(n) W^{\mu}_n e^{in\sigma}, \tag{10}$$

$$(J_{-1}(W))^{\mu} = -iW^{\mu}_0 + i \sum_{n \neq 0} \mathrm{sgn}(n) W^{\mu}_n e^{in\sigma}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что (L_0, L_1)-инвариантная комплексная структура J_{+1} и (L_0, L_{-1})-инвариантная комплексная структура J_{-1} отличаются друг от друга только своим действием на нулевую моду W_0^{μ}. Следовательно, на факторпространстве $\Omega R^{d-1,1} = \mathcal{L}R^{d-1,1}/R^{d-1,1}$ они индуцируют одну и ту же комплексную структуру J, которая в точности совпадает с естественной комплексной структурой [1,5] на $\Omega R^{d-1,1}$. Другой вывод заключается в том, что J инвариантна не только относительно группы поворотов S^1, но и группы $SL(2,R)$, генерируемой векторными полями L_{-1}, L_0 и L_{+1}, и это единственная комплексная структура на $\Omega R^{d-1,1}$, обладающая таким свойством. Следовательно, многообразие всех комплексных структур на $\Omega R^{d-1,1}$ изоморфно однородному кэлерову многообразию $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$, а не $\mathrm{Diff}S^1/S^1$ как утверждалось в [1] и последующих работах [2-4]. Можно показать, что этот вывод не меняет интерпретацию [1] критической размерности 26 как условия существования голоморфных и горизонтальных сечений вакуумного расслоения $B \bigotimes \Gamma$ над $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$.

Наш вывод полностью согласуется с результатами Пилча и Уорнера [3], которые с помощью отличных от [1] математических средств исследовали вакуумное расслоение $B \bigotimes \Gamma$ над $\mathrm{Diff}S^1/S^1$ и доказали, что вакуумные состояния бозонной струны описываются $SL(2,R)$ инвариантными сечениями расслоения $B \bigotimes \Gamma$ над $\mathrm{Diff}S^1/S^1$. Взаимосогласованность этого результата и нашего вывода проясняется следующим значением: $SL(2,R)$-инвариантные голоморфные и горизонтальные сечения вакуумного расслоения над $\mathrm{Diff}S^1/S^1$ являются в точности поднятиями (относительно естественной проекции $\mathrm{Diff}S^1/S^1 \to \mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$) голоморфных и горизонтальных сечений вакуумного расслоения над $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$.

В работах [4] получены подтверждения гипотезы о том, что непертурбативная струнная амплитуда может быть записана в форме интеграла по $\mathcal{M} = \mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$ с мерой, определяемой кэлеровой метрикой на $\mathcal{M}$. С другой стороны $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$ является плотным комплексным подмногообразием [4] универсального пространства Тейхмюллера, содержащего все пространства Тейхмюллера T_g, $g \geq 1$, соответствующих римановым поверхностям рода g. Поэтому основанный на $\mathrm{Diff}S^1/SL(2,R)$ непертурбативный подход к квантованию бозонной струны должен быть тесно связан с обычным подходом, подразумевающим суммирование по родам g.

---

1. M.J.Bowick and S.G.Rajeev, Phys. Rev. Let. 58, 535, (1987); Nucl. Phys. B 293, 348, (1987).
2. D.Harari, D.K.Hong, P.Ramond and V.Rodgers, Nucl. Phys. B 294, 556, (1987); Z.Y.Zhao, K.Wu, and T.Saito, Phys. Lett. B, 199, 37, (1987); J.Mickelsson, Commun. Math. Phys. 112, 653, (1987); E.Witten, Commun. Math. Phys. 144, 1, (1988); M.A.Awada and A.H.Chamseddine, Phys. Lett. B 206, 437, (1988); Y.Yu, Phys. Lett. B 216, 75, (1989).
3. K.Pilch and N.P.Warner, Class. Quantum Grav. 4, 1183, (1987).
4. S.Nag and A.Verjovski, Commun. Math. Phys. 130, 123, (1990); D.K.Honge and S.G.Rajeev, Commun. Math. Phys. 135, 401, (1991).
5. A.N.Pressley, J. London Math. Soc. 26, 557, (1982); Э.Прессли, Г.Сигал, Группы петель. М.: Мир, 1990.