Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 3, стр. 156 — 158 10 февраля 1992 г.

НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ СУПЕРСТРУНА НЕВЕ–ШВАРЦА И Superdiff$S^1/OSp(1|2)$

С.А.Меркулов

Отдел теоретических проблем РАН
121002, Москва

Поступила в редакцию 19 ноября 1991 г.

Доказано, что пространство комплексных структур на фазовом пространстве открытой суперструны Неве–Шварца изоморфно кэлерову супермногообразию Superdiff$S^1/OSp(1|2)$, а не SuperdiffS^1/S^1 как утверждалось в [1,2]. Вычислен тензор Риччи супермногообразия Superdiff$S^1/OSp(1|2)$. Построены непертурбативные вакуумные состояния суперструны.

В работах [1,2] непертурбативный подход Бовика и Раджива [3] к бозонной струне был обобщен на случай суперструн Неве–Шварца и Рамона. В этой формулировке центральную роль играет пространство $\mathcal{M}$ комплексных структур на фазовом пространстве $\Omega M^{d|d}$ открытой суперструны. В этой работе мы покажем, что в случае суперструны Неве–Шварца естественная комплексная структура J на $\Omega M^{d|d}$ инвариантна не только относительно группы поворотов S^1, но и относительно большей группы симметрий $OSp(1|2) \subset$ SuperdiffS^1. Из этого результата следует важный вывод о том, что пространство $\mathcal{M}$ изоморфно однородному кэлерову супермногообразию Superdiff$S^1/OSp(1|2)$, а не SuperdiffS^1/S^1 как утверждалось в [1,2] и во многих последующих работах.

Пусть M^d – d-мерное пространство Минковского. Обозначим через $\mathcal{L}M^{d|d}$-пространство всех отображений $x \oplus \psi : [0, 2\pi] \to M^{d|d} \equiv M^d \oplus \Pi M^d$, удовлетворяющих условиям $x^\mu(0) = x^\mu(2\pi)$, $\psi^\mu(0) = -\psi^\mu(2\pi)$, $\mu = 0, 1, ..., d-1$.

В [1] показано, что факторпространство $\Omega M^{d|d} \equiv \mathcal{L}M^{d|d}/M^d$ может быть отождествлено с фазовым (конфигурационным) пространством открытой (замкнутой) суперструны Неве–Шварца.

Векторные поля $(m \in Z,\ r \in Z + 1/2)$

$$L_m = -i \int d\sigma e^{im\sigma} \left\{ \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} \frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)} + \left[\frac{d\psi^\mu(\sigma)}{d\sigma} + i\frac{m}{2}\psi^\mu(\sigma) \right] \frac{\delta}{\delta\psi^\mu(\sigma)} \right\},$$

$$G_r = \int d\sigma e^{ir\sigma} \left\{ \psi^\mu(\sigma) \frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)} + i\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} \frac{\delta}{\delta\psi^\mu(\sigma)} \right\} \tag{1}$$

на $\Omega M^{d|d}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) G_{m+r}, \quad [G_r, G_s] = 2L_{r+s}, \tag{2}$$

и реализуют, следовательно, представление супералгебры SuperdiffS^1.

Если $x^\mu(\sigma)$ и $\psi^\mu(\sigma)$ разложить в ряды Фурье

$$x^\mu(\sigma) = \sum_{n \in Z} x_n^\mu e^{in\sigma}, \quad \psi^\mu(\sigma) = \sum_{r \in Z+1/2} \psi_r^\mu e^{ir\sigma},$$

то наборы мод$\{x_n^\mu, \psi_r^\mu,\ n \in Z \setminus 0,\ r \in Z + \frac{1}{2}\}$ образуют систему координат на $\Omega M^{d|d}$. В этих координатах генераторы (1) имеют вид

$$L_m = -\sum_{n\in Z\setminus 0}(n+m)x^\mu_{-n-m}\frac{\partial}{\partial x^\mu_{-n}} - \sum_{s\in Z+1/2}(r+\frac{m}{2})\psi^\mu_{-s-m}\frac{\partial}{\partial\psi^\mu_{-s}},$$

$$G_r = \sum_{n\in Z\setminus 0}\psi^\mu_{-n-r}\frac{\partial}{\partial x^\mu_{-n}} + \sum_{s\in Z+1/2}(r+s)x^\mu_{-s-r}\frac{\partial}{\partial\psi^\mu_{-s}}. \tag{3}$$

Пусть $W = \sum_{n\in Z\setminus 0} W^\mu_n \frac{\partial}{\partial x^\mu_n} + \sum_{r\in Z+1/2} W^\mu_r \frac{\partial}{\partial \psi^\mu_r}$ - произвольное векторное поле на $\Omega M^{d|d}$. Естественная комплексная структура J на $\Omega M^{d|d}$ определяется выражением

$$J(W) = -i\sum_{n\in Z}\mathrm{sgn}(n)W^\mu_n\frac{\partial}{\partial x^\mu_n} - i\sum_{r\in Z+1/2}\mathrm{sgn}(r)W^\mu_r\frac{\partial}{\partial\psi^\mu_r}. \tag{4}$$

Можно показать, что эта комплексная структура удовлетворяет соотношениям $J([L_0,W]) = [L_0,J(W)]$, $J([G_{-1/2},V]) = [G_{-1/2},J(V)]$, $J([G_{+1/2},T]) = [G_{+1/2},J(T)]$ для произвольных векторных полей W, V и T. Следовательно

$$\mathcal{L}_{L_0}J = 0, \quad \mathcal{L}_{G_{-1/2}}J = 0, \quad \mathcal{L}_{G_{+1/2}}J = 0,$$

где $\mathcal{L}$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля V. Таким образом, комплексная структура инвариантна не только относительно группы поворотов S^1, но и относительно менее очевидной группы симметрий $OSp(1|2) \subset \mathrm{Superdiff}S^1$, генерируемой L_0, $G_{1/2}$ и $G_{-1/2}$. Поэтому пространство $\mathcal{M}$ всех комплексных структур на $\Omega M^{d|d}$ изоморфно супермногообразию $\mathrm{Superdiff}S^1/OSp(1|2)$, а не $\mathrm{Superdiff}S^1/S^1$, как утверждалось в [1,2].

Вычислим тензор Риччи этого супермногообразия. Пусть L_m, $m\in Z$, и G_r, $r\in Z+1/2$, - генераторы суперагебры $\mathrm{Superdiff}S^1$. Теми же символами будем обозначать соответствующие левоинвариантные векторные поля на $\mathcal{M}$. Произвольный касательный к $\mathcal{M}$ вектор θ может быть представлен в виде линейной комбинации

$$\theta = \sum_{n\neq\pm1,0}\theta_n L_n + \sum_{r\neq\pm1/2}\theta_r G_r.$$

Определим почти комплексную структуру $\tilde{J}$ в нуле $0\in\mathcal{M}$ соотношением

$$\tilde{J}(\theta) = \sum_{n\in\neq\pm1,0} -i\,\mathrm{sgn}(n)\theta_n L_n + \sum_{r\neq\pm1/2} -i\,\mathrm{sgn}(r)\theta_r G_r. \tag{5}$$

В остальных точках $\mathcal{M}$ почти комплексная структура определяется левыми сдвигами. Из (1) следует [4], что структура $\tilde{J}$ интегрируема. Следовательно, $\mathcal{M}$ является комплексным супермногообразием. На $\mathcal{M}$ существует единственная однородная кэлерова форма, задаваемая соотношениями (ср. [1-3,5,6])

$$\omega(L_m,L_n) = a(m^3-m)\delta_{m,-n}, \quad \omega(L_m,G_r) = \omega(G_r,L_m) = 0,$$

$$\omega(G_r,G_s) = a(4r^2-1)\delta_{r,-s},$$

где a - ненулевой параметр, $n\in Z\setminus\{\pm1,0\}$, r, $s\in\{Z+1/2\}\setminus\{\pm1/2\}$.

Данные $(\tilde{J},\omega)$ образуют кэлерову структуру на $\mathcal{M}$. Тензор Риччи соответствующей кэлеровой метрики находится по методу Фрида [7] и имеет вид (ср. [1,2])

$$\mathrm{Ric}(L_{-m}, L_n) = -\frac{10}{8}(m^3 - m)\delta_{m,n}, \quad \mathrm{Ric}(G_{-r}, G_s) = -\frac{10}{8}(4r^2 - 1)\delta_{r,s}.$$

Следуя методу геометрического квантования и работам [1-3], мы находим тензор кривизны вакуумного расслоения Фока B над $\mathcal{M}$

$$F(L_{-m}, L_n) = \frac{d}{8}(m^3 - m)\delta_{m,n}, \quad F(G_{-r}, G_s) = \frac{d}{8}(4r^2 - 1)\delta_{r,s}.$$

Непертурбативные вакуумные состояния суперструны Неве–Шварца определяются в этом подходе как нетривиальные голоморфные и горизонтальные сечения тензорного произведения $B \otimes \Gamma$ расслоений над $\mathcal{M}$, где Γ - каноническое голоморфное расслоение. Необходимым и достаточным условием существования таких сечений является обращение в нуль

$$O = F(L_{-m}, L_n) + \mathrm{Ric}(L_{-m}, L_n) = \frac{d-10}{8}(m^3 - m)\delta_{m,n},$$

$$O = F(G_{-r}, G_s) + \mathrm{Ric}(G_{-r}, G_s) = \frac{d-10}{8}(4r^2 - 1)\delta_{r,s}$$

полной кривизны расслоения $B \otimes \Gamma$. Таким образом, непертурбативные $\mathrm{Superdiff}\, S^1$-инвариантные вакуумные состояния суперструны возможны лишь при $d = 10$ (в полном согласии с обычными пертурбативными методами описания суперструны [8]).

1. D.Harari, D.K.Hong, P.Ramond and V.Rodgers, Nucl. Phys. B 294, 556 (1987).
2. Z.Y.Zhao, K.Wu and T.Saito, Phys. Lett. B 199 , 37 (1987).
3. M.J.Bowick and S.G.Rajeev, Phys. Rev. Lett. 58, 535 (1987); Nucl. Phys. B 293, 348 (1987).
4. Ш.Кобаяси, К.Номидзу, Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, (1981), 2.
5. А.А.Кириллов, Д.В.Юрьев, Функцион. анализ и его прил. 20, 79 (1986); 21, 35 (1987).
6. M.J.Bowick and A.Lahiri, J. Math. Phys. 29, 1979 (1988).
7. D.Freed, In: Infinite dimensional group with applications. Ed. V.Kac, Berlin: Springer 1985.
8. М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн. М.: Мир, 1990; С.В.Кетов, Введение в квантовую теорию струн и суперструн. Новосибирск: Наука, 1990.