Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 3, стр. 190 — 194 10 февраля 1992 г.

МОДИФИКАЦИЯ ФОРМУЛЫ СТОКСА (ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ШАРА)

А.В.Бялко

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
142432, Черноголовка, Московская обл.

Поступила в редакцию 28 декабря 1991 г.

Уравнения Навье-Стокса выписаны для случая ламинарного движения тепловыделяющего шара в жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Поле температур на малых расстояниях и при малых скоростях обтекания сферически симметрично. Получены решения уравнений гидродинамики с учетом конвекции в случае, когда логарифмическую производную вязкости можно считать постоянной. Возможно также и чисто конвективное решение с равной нулю скоростью на бесконечности. Предельный переход решений и выражения для силы сопротивления в формулу Стокса (для постоянной вязкости) возможен только при полном отсутствии конвекции.

Классическая формула Стокса определяется гидродинамическим решением на расстояниях порядка радиуса шара. Это видно, например, из результатов Зельдовича [1]: в разложении силы сопротивления по степеням числа Рейнольдса Re большие расстояния дают поправку первого порядка, а малые - второго, не изменяя коэффициента главного (стоксовского) члена.

Вязкость η большинства жидкостей и пластичных твердых тел резко падает с ростом температуры. Эта зависимость в широком диапазоне хорошо аппроксимируется выражением $\eta(T) = \eta_0 \exp(\Theta/T)$, где величина Θ в несколько раз выше температуры плавления (размягчения) материала.

Поэтому, если тепловая мощность шара достаточна для увеличения текучести (обратной вязкости) вблизи его поверхности, гидродинамика в этой области будет существенно отличаться от решения Стокса, что должно привести к модификации формулы сопротивления.

Упомянем решения задачи переменной вязкости в одномерной геометрии [2] и для течения в трубе [3]. Наиболее важное качественное следствие, полученное для нелинейной задачи [2,3], состоит в том, что стационарное решение существует не при произвольных параметрах задачи - принципиально возможен режим "теплового взрыва", когда тепло, выделяющееся при вязком трении, не успевает отводиться теплопроводностью. В случае тепловыделяющего шара "тепловой взрыв" возможен только в условиях, малоинтересных для данной задачи - в трехмерной геометрии теплоотвод более эффективен, чем в одномерном и двухмерном случае.

Тепловое поле. Особенностью задачи переменной вязкости при пространственно ограниченном тепловом источнике является то, что уравнения теплопроводности и Навье-Стокса [4] можно расцепить в широком диапазоне изменения параметров.

Стационарное уравнение теплопроводности

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x_k}. \qquad (1)$$

на тех расстояниях, где коэффициент теплопроводности можно считать постоянным ($\kappa = \kappa_\infty$), легко решить, заменив входящую в него скорость v_i на постоянную величину - скорость обтекания u_i. В сферических координатах

$$T(r,\theta) = T_\infty \left[1 + \frac{R_1}{r}\exp(-\frac{(1-\cos\theta)ur}{\chi})\right], \qquad (R_1 = \frac{P}{4\pi\kappa_\infty T_\infty}). \tag{2}$$

Здесь P - тепловая мощность шара радиуса R, индексом ∞ обозначены величины на большом удалении от шара, $\chi = \kappa_\infty/\rho c_p$ - коэффициент температуропроводности.

Из решения видно, что на расстояниях, много меньших тепловой длины $r \ll \chi/u$, тепловое поле не зависит от углов, то есть сферически симметрично. Центральная симметрия является критерием применимости дальнейших решений. (Случай, обратный условию (3), при постоянной вязкости расплава рассмотрен в [5].) Поскольку нас интересует высокая вязкость (большие числа Прандтля $\Pr = \eta/\rho\chi$), то из сферической симметрии теплового поля автоматически следует ламинарность обтекания:

$$\mathrm{Re} = \frac{uR\rho}{\eta} \ll \mathrm{Re}\ \Pr = \mathrm{Pe} = \frac{uR}{\chi} \ll 1. \tag{3}$$

Отметим, что в решении (2) и в критерии (3) скорость обтекания u сама должна быть найдена из решения уравнения Навье-Стокса, точнее, из равенства силы сопротивления архимедовой силе. Поэтому область применимости решений в терминах теплофизических параметров будет определена в конце работы.

Параметром задачи размерности длины является величина R_1 (2). Отношение R_1 к радиусу шара R далее рассматривается, как величина порядка единицы, допуская случай $R_1/R \ll 1$ и исключая (в данной работе) случай $R_1/R \gg 1$. При сравнимом с единицей отношении R_1/R становится существенной зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Если эта зависимость степенная, т.е. $\kappa(T) = \kappa_\infty(T/T_\infty)^\nu$, то решение уравнения теплопроводности может быть найдено аналитически:

$$T|_{\nu\neq 1}(r) = T_\infty \left[1 + \frac{(1-\nu)R_1}{r}\right]^{1/(1-\nu)}, \qquad T|_{\nu=1}(r) = T_\infty \exp(\frac{R_1}{r}). \tag{4}$$

Как видно отсюда, "тепловой взрыв" реализуется при $\nu > 1$ и при тепловой мощности, обеспечивающей условие $R_1 > R/(\nu - 1)$. Для гидродинамики обтекания это сочетание малоинтересно.

В области $R < r \ll R_1 \ll u/\chi$ решения (2) и (4) совпадают: $T - T_\infty \sim r^{-1}$.

Гидродинамика. Уравнение Навье-Стокса при малых числах Рейнольдса линейно. Входящая в него вязкость η - функция температуры, - после решения уравнения теплопроводности становится заданной функцией координат. В уравнениях гидродинамики [4] оставим конвективный член, пропорциональный коэффициенту объемного расширения β:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - g_i\beta\rho(T - T_\infty), \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \tag{5}$$

В системе отсчета, где шар неподвижен, скорость на его поверхности $r = R$ равна нулю, на больших расстояниях она равна постоянной скорости обтекания u_i. Скорость u_i неизвестна по величине, но известна по направлению — параллельна ускорению свободного падения g_i. Будем искать решение в виде

$$v_i = u_i\left(\frac{1}{2}\Phi(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi}\Phi(\xi)d\xi\right) - \frac{1}{2}n_i u_k n_k \Phi(\xi), \qquad \xi = \ln(r/R_1), \tag{6}$$

которое автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial v_k/\partial x_k = 0$ и должно удовлетворять граничным условиям:

$$\Phi(\xi_0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 0, \quad \int_{\xi_0}^{\infty} \Phi\, d\xi = 1, \quad \xi_0 = \ln(R/R_1). \tag{7}$$

Из уравнения (5) после исключения градиента давления p операцией rot для функции $\Phi(\xi)$ получается неоднородное линейное уравнение третьего порядка:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + 2(1+L)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + (L^2 + 3L - 5 + \frac{\partial L}{\partial\xi})\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + (L^2 - 5L - 6 + \frac{\partial L}{\partial\xi})\Phi =$$

$$= -2\mathrm{Gr}\,\exp(-\int_{\xi_0}^{\xi}(L-1)\,d\xi). \tag{8}$$

Аналогичное уравнение (без конвекции) было получено Мэтью [6] при решении задачи о движении иона в жидком гелии. В это уравнение входит одна постоянная - число Грассхофа, определенное здесь, как

$$\mathrm{Gr} = g_k u_k \frac{\beta\rho P R}{4\pi\kappa_\infty \eta(R) u^2} = \pm\beta T_\infty \frac{g\rho R_1 R}{u\eta(R)}, \tag{9}$$

и одна известная функция координат

$$L = \frac{d\ln\eta(T(r))}{d\ln r}. \tag{10}$$

Зависимости температуры от радиуса (4) позволяют установить конкретный вид функции L, приведем его для двух значений показателя ν коэффициента теплопроводности:

$$L|_{\nu=0}(\xi) = \frac{\Theta}{2T_\infty}\frac{1}{(1+\mathrm{ch}\xi)}, \quad L|_{\nu=1}(\xi) = \frac{\Theta}{T_\infty}\exp(-\xi - e^{-\xi}). \tag{11}$$

Заметим, что выбор точки отсчета (нуля ξ) в уравнениях (7,8) произволен. Он выбран при $r = R_1$ для упрощения формул (11), при таком выборе максимум функции $L(\xi)$ находится при $\xi = 0$.

Давление в жидкости можно выразить в общем виде через решение уравнения (8):

$$p = p_\infty + \frac{\eta u_k n_k}{2r}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + (3+L)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + L\Phi\right]. \tag{12}$$

Модельное решение. Уравнение (8) заслуживает точного численного исследования. Однако, здесь мы преследуем минимальную цель: получить формулу для силы сопротивления. Она, как было отмечено, определяется течением в прилегающем к шару слое. Вдоль него логарифмическую производную вязкости можно считать постоянной, равной своему значению на поверхности шара $L(\xi) \simeq L(\xi_0) = L_0$. Другими словами, мы будем исследовать модельную зависимость вязкости, $\eta(r) = \eta(R)(r/R)^{L_0}$ и получим для этого случая точное решение. Это модельное решение даст возможность получить выражение для силы сопротивления, которое будет справедливо при больших L_0 и произвольном виде $L(\xi)$ и одновременно будет приближенным, но переходящим в Стоксову формулу при малых L_0.

В случае $L=$const решение уравнения (8) получается элементарно:

$$\Phi = \sum_{s=0}^{3} C_s \exp(k_s(\xi - \xi_0)). \tag{13}$$

В сумме индексом $s=0$ обозначено частное решение неоднородного уравнения:

$$k_0 = -L_0 + 1, \quad C_0 = \mathrm{Gr}(L_0+4)^{-1}. \tag{14a}$$

Для выполнения граничного условия на бесконечности должно выполняться одно из условий: или $L_0 > 1$, или Gr$=0$.

Остальные решения (однородные) соответствуют трем корням уравнения

$$k^3 + 2(L_0+1)k^2 + (L_0^2 + 3L_0 - 5)k + (L_0^2 - 5L_0 - 6) = 0.$$

Одно из них, определяемое наибольшим корнем, k_1, возрастает с радиусом (или же, при $L_0 > 6$, убывает недостаточно медленно), поэтому коэффициент при нем должен быть равен нулю $C_1 = 0$. Два отрицательных корня позволяют получить решение, удовлетворяющее граничным условиям (7):

$$k_2 = -\frac{L_0+1}{2} - \frac{\sqrt{L_0^2 - 2L_0 + 25}}{2}, \quad C_2 = \frac{k_2 k_3}{k_3 - k_2}\left(1 + C_0 \frac{k_0 - k_3}{k_0 k_3}\right), \tag{14b}$$

$$k_3 = -L_0 - 1, \qquad C_3 = \frac{k_2 k_3}{k_3 - k_2}\left(-1 + C_0 \frac{k_2 - k_0}{k_0 k_2}\right). \tag{14c}$$

Скорость приближается к скорости на бесконечности как степень радиуса. При больших L_0 эффективная толщина слоя обтекания равна R/L_0, что и оправдывает применение модельного решения для дальнейшего вычисления силы сопротивления в физическом случае, когда L описывается функциями (11) или близким к ним. При этом в физическом решении корневые выражения в (14) следует разложить по степеням $L_0^{-1} \ll 1$. Эту операцию надо производить с осторожностью, имея в виду, что для разных целей при этом приходится удерживать разное число членов[1)].

При $L_0 \sim 1$ модельное решение (14) имеет в физическом случае качественный характер (истинное решение уравнения (8) зависит от конкретного вида $L(\xi)$). Предельный переход решения (14) при $L_0 = 0$ в решение Стокса ($k_2 = -3$, $k_3 = -1$) выполняется, но! - для этого перехода нужно сначала положить равным нулю число Грассхофа, и только затем устремить $L_0 \to 0$. Заметьте - число Грассхофа не мало при малых скоростях u. Это говорит о том, что решение Стокса нарушается не только при больших скоростях обтекания и на больших расстояниях, но также неустойчиво при конечном тепловыделении на малых расстояниях при малых скоростях.

Сила сопротивления F_i находится стандартным [4] образом, как интеграл по поверхности шара от проекции на вертикаль суммы нормального давления и вязких напряжений:

$$F_i u_i = \oint dS u_i n_k \left(p\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right).$$

Подставив сюда решение (13, 14) с учетом (6, 12) и вычислив интегралы, получим:

$$F = \frac{2\pi}{3}\eta(R) R u \left[(L_0+1)k_2^2 - \mathrm{Gr}\frac{(k_0^2 + k_2^2)}{(L_0+4)(L_0-1)}\right], \quad (L_0 > 1). \tag{15}$$

1)Кроме того, при $L_0 = 6$ в (13, 14) находится сократимая особенность.

Напомним, что k_2 дано в формуле (14б), где L_0 следует вычислить по формулам (11) на поверхности шара, при $\xi = \xi_0 = \ln(4\pi R\kappa_\infty T_\infty/P)$. Число L_0 пропорционально отношению Θ/T_∞ и в общем случае не мало.

Приравняем силу сопротивления силе Архимеда $4\pi g\Delta\rho R^3/3$, вызванной разностью плотностей $\Delta\rho$ шара и среды. Имея в виду физический случай, удержим только высшие степени L_0. Кроме того, подставим формулу (9) для числа Грассхофа, содержащую u. В результате получим скорость погружения (при $\Delta\rho > 0$) или всплытия (при $\Delta\rho < 0$) тепловыделяющего шара:

$$u = \frac{2g\Delta\rho R^2}{\eta(R)L_0^3}\left[1 - \beta T_\infty L_0 \frac{\rho}{\Delta\rho}\frac{R_1}{R}\right]. \tag{16}$$

Ограниченная конвекция. Существует чисто конвекционное течение, при котором скорость на бесконечности $u = 0$. Оно осуществляется при физически ясном условии

$$1 = L_0\beta T_\infty \frac{\rho R_1}{\Delta\rho R} \simeq L_0\beta(T_0 - T_\infty)\frac{\rho}{\Delta\rho},$$

– разность плотностей шара и среды компенсируется уменьшением плотности среды при тепловом расширении в слое толщины $\delta R \simeq R/L_0$. Само решение следовало бы искать так, чтобы изначально, в формуле (6) v_i было пропорционально ускорению g_i, а интеграл в (7) был равен 0, а не 1. Можно, однако, просто совершить предельный переход $u \to 0$ в решении (13, 14), учитывая, что $C_0 \sim \mathrm{Gr} \sim u^{-1}$, а $v_i \sim u_i$. В результате - конвективное поле скоростей:

$$v_i = \frac{2\Delta\rho R^2}{\eta(R)L_0^3}\left[g_i\left(\frac{1}{2}\Phi_1(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi}\Phi_1(\xi)d\xi\right) - \frac{1}{2}n_i\, g_k n_k\, \Phi_1(\xi)\right],$$

$$\Phi_1 = \exp(k_0(\xi - \xi_0)) + \frac{k_2(k_0 - k_3)}{k_0(k_3 - k_2)}\exp(k_2(\xi - \xi_0)) + \frac{k_3(k_2 - k_0)}{k_0(k_3 - k_2)}\exp(k_3(\xi - \xi_0)). \tag{17}$$

Размерный коэффициент скорости дан в пределе $L_0 \gg 1$, но функция $\Phi_1(\xi)$ выписана в модельном приближении. Особенность в ней при $L_0 = 6$ сократима:

$$\Phi_1|_{L_0=6} = \exp\left(-5(\xi - \xi_0)\right) - (1 + 14\xi/5)\exp\left(-7(\xi - \xi_0)\right).$$

Условие применимости. Вернемся к критерию (3), подставив в него ответ для скорости обтекания (16) (при малой конвекции):

$$R \ll L_0\left[\frac{\chi\eta(R)}{g\Delta\rho}\right]^{1/3} \sim L_0\left[\frac{\eta(R)}{\eta_{16}}\right]^{1/3}\cdot 100\ \text{м}. \tag{18}$$

В последней численной оценке $\chi \simeq 10^{-6}\text{м}^2/\text{с}$, $\Delta\rho \simeq 1\cdot 10^3\text{кг}/\text{м}^3$, $\eta_{16} = 10^{16}\text{кг}/(\text{мс})$. Это, в частности, означает, что модифицированная формула Стокса применима в геофизике.

---

1. Я.Б.Зельдович, Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика, Наука, 1984, с.71, ЖЭТФ, 7, 1466, (1937).
2. С.А.Бостанджиян, А.Г.Мержанов, С.И.Худяев, ДАН, 163, 133 (1965).
3. С.А.Бостанджиян, С.М.Черняева ДАН, 170, 301 (1966).
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Гидродинамика, Наука, 1988.
5. S.H.Emerman, D.L.Turcotte Int. j. Heat Mass Transfer, 26, 1625, (1983).
6. J.Mathews, Phys. Fluids, 21, 876 (1978).