Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 3, стр. 198 — 202 10 февраля 1992 г.

РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ДЕРРИДЫ С РЕДКИМИ СВЯЗЯМИ, АСИММЕТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОНСТАНТ СВЯЗИ И КОДИРОВАНИЕ

Д.В.Саакян

Ереванский физический институт
375036, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 12 декабря 1991 г.
После переработки 15 января 1992 г.

Решается модель Дерриды для случая редких связей. Найдено соотношение констант, при котором происходит переход из фазы спинового стекла в ферромагнитную.

Передача информации всегда сопровождается шумом. Существует ненулевая вероятность p_{ik}, что буква номер i перейдет в букву номер k. Для того чтобы извлечь информацию с нулевой вероятностью ошибки, надо передать лишнюю информацию.

Пусть чистое сообщение - N чисел σ_i из θ-значного алфавита. Существует постоянная вероятность ошибки $1-m$, что в переданном сообщении буква σ_i будет заменена другой буквой. Как кодировать сообщение (найти $\rho_i(\sigma)$, $i = 1...Z$), чтобы можно было восстановить первоначальную информацию (σ_i, $i = 1...N$) без ошибок?

Шеннон нашел предел, ниже которого не может быть Z, при условии безошибочной декодировки. Появилась проблема: конструировать такие коды.

В случае сильного шума $0 \ll m \ll 1$ такую кодировку, оптимальную согласно теореме Шеннона, дает, как предполагалось в [1], модель Дерриды [2,3] для асимметричного распределения констант связи [4].

Если в обычных моделях, например - Изинга, спины взаимодействуют попарно, то в модели Дерриды одновременно взаимодействует P-спинов ($1 \ll P \ll N$).

Возможно, это и не физично, но, с другой стороны, модель Дерриды выделена (среди моделей спиновых стекол): эта модель точно решается в рамках теории Паризи уже в одноступенчатом нарушении репличной симметрии. А предельные модели (ситуации) всегда интересны в физике. Гамильтониан модели с N спинами $\sigma_i = \exp\left(\frac{i2\pi k}{Q}\right)$ при $k = 1...Q$ с поттсовским взаимодействием имеет вид

$$H = -\sum_{(i_1...i_P)} \sum_{r=1}^{Q-1} (\tau_{i_1...i_P}\sigma_{i_1}...\sigma_{i_P})^r, \tag{1}$$

где $\tau_{i_1...i_P}$ - константы связи с неким случайным распределением,

$$\tau = \exp(i2\pi k/Q), \quad k = 1...Q.$$

В стандартной модели Дерриды идет суммирование по всем P-плетам (выборам совокупности разных индексов $i_1...i_P$). В случае чистого шума имеем распределение

$$\rho(\tau(k)) = \sum_{i=1}^{Q} \frac{1}{Q}\delta_{k,i}. \tag{2}$$

Решение модели (1) при (2) дает [3], что при высоких температурах система находится в парамагнитной фазе, а ниже критической температуры T_c переходит в фазу спинового стекла. Начиная с T_c и ниже энтропия системы нулевая. Вообще вид взаимодействия σ^P физически разрешает лишь две возможности: либо полная намагниченность, либо нулевая. Поэтому модель Дерриды решается довольно просто. Пусть во время передачи буква σ_i переходит с вероятностью p_{ij} в σ_j

$$p_{ij} = \rho_k, \quad k = (j-i)\mathrm{mod}(Q).$$

Рассмотрим распределение ρ для τ

$$\rho(\tau(k)) \equiv \rho_k = [(1+m(Q-1))/Q]\delta_{k,Q} + \sum_{i=1}^{Q-1}\left(\frac{1-m}{Q}\right)\delta_{k,i}. \tag{3}$$

Важнейшим для модели является свойство калибровочной инвариантности

$$\sigma_i \to s_i\sigma_i, \quad \tau_{i_1\dots i_P} \to \tau_{i_1\dots i_P}(s_{i_1}\dots s_{i_P})^{-1}.$$

Это свойство имеет место, ввиду факторизации матрицы перехода p_{ij}

$$p_{ij} = \rho_k, \quad k = (j-i)\mathrm{mod}(Q).$$

В данной работе мы будем исследовать случай редких связей, когда в (1) будут входить P-плеты не всегда, а с вероятностью $CP!/N^{P-1}$. Таким образом, число связей (P-плетов) будет всего

$$Z = CN. \tag{4}$$

В случае нулевого шума ($m=1$), единственным основным состоянием системы (1), (3), (4) при $C>1$ является конфигурация

$$\sigma_i = 1. \tag{5}$$

При включении ненулевого шума ($m<1$) надо увеличить Z до некоторого критического значения $Z = CN$ ($C>1$), чтобы основным состоянием системы оказалось (5). Чистое сообщение из N букв в (5) закодировано в Z-числах $\tau_{i_1\dots i_P}$, таким образом, чтобы несмотря на наличие шума можно было восстановить первоначальную информацию из букв, находя вакуум (1).

Общий случай, когда $\sigma_i \neq 1$ приводится с помощью калибровочного преобразования к случаю (3), (5).

Для случая симметричного распределения модель редких связей (4) была решена в [5] (в случае $Q=2$ в [6]). Ниже мы будем использовать технику этих работ.

Будем вычислять свободную энергию модели (1), (3), (4) с помощью метода реплик:

$$Z^n = \langle \mathrm{tr}_\sigma \exp\{\sum_{i_1\dots i_P} B\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{Q-1}(\tau_{i_1\dots i_P}\sigma_{\alpha,i_1}\dots\sigma_{\alpha,i_P})^r\}\rangle. \tag{6}$$

В (6) усреднение идет по распределению τ (3). Используем формулу (7) [5]

$$\exp(B\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_\alpha\tau^{n_\alpha}) = A^n\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r\sum_{\alpha_1\dots\alpha_r}\prod_{i=1}^{r}\sigma_{\alpha_i}\tau^{n_{\alpha_i}}, \tag{7}$$

$$A = \left[\frac{1}{Q}\exp(B(Q-1)) + \frac{Q-1}{Q}\exp(-B)\right], \tag{8}$$

$$\mu = \frac{\exp(BQ)-1}{\exp(BQ)+Q-1}.$$

Суммирование в (7) идет по разным наборам отличных друг от друга $\alpha_1 ... \alpha_r$. Используя (7), (8), можно получить

$$\exp(B\sum_{r=1}^{Q-1}(\tau_{i_1...i_P})^r \sum_{\alpha=1}^{n}(\sigma_{\alpha,i_1}...\sigma_{\alpha,i_P})^r = A^n \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s \sum_{\alpha_1...\alpha_s}\prod_{\beta=1}^{P}\sum_{r_1...r_s}\sigma^{r_1}_{\alpha_1,i_\beta}...\sigma^{r_s}_{\alpha_s,i_\beta}\tau^{r_1...r_s}. \tag{9}$$

В приближении среднего поля (точного в нашем случае), используя представление для δ-функции

$$\delta(q^{\alpha_1...\alpha_r}_{i_1...i_r} - \sigma^{\alpha_1}_{i_1}...\sigma^{\alpha_r}_{i_r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} dh^{\alpha_1...\alpha_r}_{i_1...i_r}\exp[h^{\alpha_1...\alpha_r}_{i_1...i_r}(q^{\alpha_1...\alpha_r}_{i_1...i_r} - \sigma^{\alpha_1}_{i_1}...\sigma^{\alpha_r}_{i_P})],$$

можно получить

$$-nBF = nC\ln A + C\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\sum_{\alpha_1...\alpha_s}\sum_{r_1...r_s}(q^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s})^P\langle\tau^{r_1+...r_s}\rangle + \tag{10}$$

$$-\sum_{\alpha_1...\alpha_s}\sum_{r_1...r_s}h^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s}q^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s} + \ln \mathrm{Tr}_\sigma \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r_1...r_s}\sum_{\alpha_1...\alpha_s}h^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s}\sigma^{r_1}_{\alpha_1}...\sigma^{r_s}_{\alpha_s}).$$

Значение корреляторов q и лагранжевых множителей h определяются из условия экстремума (10) [3-5]. В (10) надо различать четные распределения $(r_1 + ... r_s = 0, \mathrm{mod}(Q))$ и нечетные $(r_1 + ... r_s \neq 0, \mathrm{mod}(Q))$.

Для четных распределений

$$\langle\tau^{r_1+...r_s}\rangle = 1. \tag{11}$$

Для нечетных

$$\langle\tau^{r_1+...r_s}\rangle = m. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай сохранения репличной симметрии:

$$q^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s} = q^{r_1...r_s}, \quad h^{r_1...r_s}_{\alpha_1...\alpha_s} = h^{r_1...r_s}. \tag{13}$$

Из условия экстремума для q имеем

$$h^{r_1...r_s} = C\mu^s P(q^{r_1...r_s})^{P-1}. \tag{14}$$

Из (14) получаем для парамагнитной фазы $q < 1$, $h \to 0$. Разлагая $\exp(\Sigma h\sigma)$ в ряд по h получаем, дифференцируя (10) по h,

$$h^{r_1...r_s} = 0, \quad q^{r_1...r_s} = 0 \tag{15}$$

$$-BF = C\ln\int[\frac{1}{Q}\exp(B(Q-1)) + \frac{Q-1}{Q}\exp(-B)] + \ln Q.$$

В случае ферромагнитной фазы имеем

$$q^{r_1\dots r_s}=1,\quad h^{r_1\dots r_s}\to\infty. \tag{16}$$

Для вычисления F надо в (10) найти число E_s четных распределений и число нечетных распределений O_s чисел $r_1\dots r_s$, $r_\alpha=1\dots Q-1$. Имеем, что $O_1=Q-1$, $E_1=0$. Легко найти рекуррентную формулу

$$E_{n+1}=O_n,\quad E_n+O_n=(Q-1)^n. \tag{17}$$

Отсюда находим уравнение

$$E_{n+1}=(Q-1)^n-E_n, \tag{18}$$

решением которого

$$E_n=\frac{(Q-1)^n+(Q-1)(-1)^n}{Q},\quad O_n=\frac{(Q-1)^{n+1}-(Q-1)(-1)^n}{Q}. \tag{19}$$

Используя (19), в случае

$$q^{r_1\dots r_s}=1,\quad h^{r_1\dots r_s}\to\infty, \tag{20}$$

можно получить

$$-BF=C\ln\frac{\exp(B(Q-1))+(Q-1)\exp(-B)}{Q}+$$
$$+\frac{1+m(Q-1)}{Q}\ln\frac{Q\exp(BQ)}{\exp(BQ)+Q-1}+\frac{(Q-1)(1-m)}{Q}\ln\frac{Q}{\exp(BQ)+Q-1}=mBQ. \tag{21}$$

Перейдем к случаю нарушения репличной симметрии. Оказывается, что в нашем случае решение модели (1), (3) совпадает, с решением найденным в [5] (модель (1) при (2)). Это связано с тем, что для нечетных распределений $q^{r_1\dots r_s}$ исчезает, а для четных

$$\langle\tau^{r_1+\dots r_s}\rangle=1, \tag{22}$$

и для (2) и для (3).

Приведем результат [5] для этого случая ($C>1$)

$$-F=\frac{1}{B_c}\ln Q+\frac{C}{B_c}\ln\left[\frac{1}{Q}\exp(B_c(Q-1))+\frac{Q-1}{Q}\exp(-B_c)\right]. \tag{23}$$

В (23) B_c определяется из условия исчезновения энтропии в (15).

$$C=\frac{\ln Q}{\frac{B_c(Q-1)\exp(B_c(Q-1))-\exp(-B_c)}{\exp(B_c(Q-1))+(Q-1)\exp(-B_c)}-\ln\frac{\exp(B_c(Q-1))+(Q-1)\exp(-B_c)}{Q}} \tag{24}$$

$$m=\frac{\exp(B_c(Q-1))-\exp(-B_c)}{\exp(B_c(Q-1))+(Q-1)\exp(-B_c)}. \tag{25}$$

Давайте найдем B_c из (25) и подставим в (24), легко получить для $Z=CN$

$$Z\left[\ln Q+\frac{1+m(Q-1)}{Q}\ln\frac{1+m(Q-1)}{Q}+\frac{(Q-1)(1-m)}{Q}\ln\frac{1-m}{Q}\right]=N\ln Q. \tag{26}$$

Эта формула решает поставленную в начале статьи задачу. При заданном m (вероятность ошибки равна $1-m$) для того, чтобы в вакуумном состоянии была полная намагниченность, требуется, чтобы число связок Z было больше, чем определенное в (26); с другой стороны, уравнение (26) согласно теореме Шеннона для оптимального кодирования

$$\frac{Z}{N} \geq \left[\ln Q + \sum_{i=1}^{Q} p_i \ln p_i \right], \tag{27}$$

дает предел лучшего возможного кодирования для нашего распределения τ (3). Отметим, что при другом распределении τ потребуется учитывать в гамильтониане (1) другой тип взаимодействия.

Можно посмотреть на (27) в другом контексте. Для того чтобы можно было в системе Q-значных спинов создать состояние спинового стекла, требуется энтропия распределения τ (связок) больше, чем пороговое значение $N \ln Q$. Не всякий шум может достаточно сильно испортить ферромагнитный вакуум, чтобы довести до состояния спинового стекла. Это будет относиться ко всем моделям спинового стекла.

Можно сделать вывод, о существовании глубокой связи между рассмотренной нами моделью спинового стекла и теорией кодирования. Было бы интересно это замечательное обстоятельство использовать для понимания и теории спиновых стекол и кодирования. Эта связь, возможно, имеет отношение к свойствам ультраметричности, которая встречается в обеих теориях.

---

1. N.Sourlas, Nature 339, 693 (1989).
2. B. Derrida, Phys. Rev. Lett. 45, 79 (1980).
3. D. Gross and M. Mezard, Nucl. Phys. B 240, 141 (1984).
4. Д.Б.Саакян, ЖЭТФ 100, 1 (1991).
5. Y.Goldschmidt, J. Phys. A 22, L157 (1989).
6. C. Dominicis and P.Mottishaw, J. Phys. A 20, L1267 (1987).