

# Сверхпроводимость в разбавленной системе узлов с сильным межэлектронным притяжением

А. Ю. Зюзин<sup>1)</sup>

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 117940 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 1 сентября 2022 г.

После переработки 20 сентября 2022 г.

Принята к публикации 21 сентября 2022 г.

Рассматривается сверхпроводимость в проводнике с разбавленной системой отрицательных  $U$  центров с сильным электрон-электронным притяжением. Показано, что когда притяжение превышает определенное пороговое значение, на центрах возникают куперовские пары. При низких температурах благодаря андreeвскому рассеянию между центрами возникает глобальное когерентное сверхпроводящее состояние. Вычислены зависимости температуры сверхпроводящего перехода и второго критического магнитного поля от величины притяжения.

DOI: 10.31857/S1234567822210066, EDN: lhaplх

Полупроводники  $A^{IV}B^{VI}$  при малой концентрации носителей могут иметь относительно большие значения температуры сверхпроводящего перехода [1]. Оригинальной особенностью таких систем являются резонансные центры, возникающие в основной электронной зоне при легировании и обеспечивающие пиннинг фермиевского уровня. Отмечено, что наибольшая температура сверхпроводящего перехода достигается при пиннинге уровня Ферми в режиме вырождения состояний, отличающихся четным числом электронов. Это указывает на то, что на таких резонансных центрах может существовать сильное притяжение между электронами [2–4]. Недавние теоретические и экспериментальные исследования соединений  $A^{IV}B^{VI}$  и связи сверхпроводимости с особенностями легирования проводились в работах [5–6].

Электронный газ переходит в сверхпроводящее состояние даже при слабом притяжении между частицами. Образование электронных пар и их последовательная конденсация происходят при одной и той же температуре. При сильном притяжении энергия связи электронных пар может превышать температуру конденсации [7, 8]. Такому явлению способствует и узкая электронная зонная структура [9] и наличие плоских зон [10].

Модели с локальным примесным притяжением вблизи области вырождения можно свести к системе псевдоспинов взаимодействующих обменным образом с электронами проводимости. Сверхпроводимость

здесь соответствует дальнему порядку псевдоспинов [11 и ссылки там].

Мы используем преобразование Хаббарда–Стратоновича в модели отрицательных  $U$  центров для изучения сверхпроводимости как в режиме слабой, так и сильной связи. В последнем случае по мере усиления притяжения возникает локальный порядок с некоррелированными фазами на разных центрах. Когерентное же состояние возникает из-за андreeвского рассеяния между центрами. Вычислено верхнее критическое магнитное поле. Показано, что в режиме сильной связи магнитное поле не приводит к подавлению локального порядка, а разрушает когерентность между центрами.

**1. Основные определения.** Гамильтониан системы с отрицательными  $U$  центрами, которые слабо перекрываются с проводящими состояниями, имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\mathbf{p}, \sigma} [\epsilon(\mathbf{p}) - \mu] a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + U_{\text{imp}} + \\
 & + \sum_{i, \sigma} U [a^\dagger(\mathbf{r}_i, \sigma) a_i(\sigma) + a_i^\dagger(\sigma) a(\mathbf{r}_i, \sigma)] + \\
 & + \sum_i [E_R(n_{i, \downarrow} + n_{i, \uparrow}) - W n_{i, \downarrow} n_{i, \uparrow}]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь  $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ ,  $a(\mathbf{p}, \sigma)$  – операторы рождения и уничтожения проводящих электронов со спектром  $\epsilon(\mathbf{p})$ ,  $\mu$  – химический потенциал, а  $U_{\text{imp}}$  описывает случайное рассеяние проводящих электронов. Третий член гамильтониана (1) описывает слабую гибридизацию между проводящими и резонансным состояниями. Здесь  $a_i^\dagger(\sigma)$ ,  $a_i(\sigma)$  – операторы рождения и

<sup>1)</sup>e-mail: a.zyuzin@mail.ioffe.ru

уничтожения электронов в резонансном состоянии на примеси в точке  $r_i$ . Последний член в (1) содержит сумму гамильтонианов, описывающих резонансные узлы.  $E_R$  – энергия резонанса, измеренная относительно химического потенциала и  $W > 0$  – энергия электрон-электронного притяжения на узле. Используем единицы, где  $\hbar = k_B = 1$ .

Функция Грина резонансного узла на мацубаровской частоте  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  имеет вид

$$g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \frac{\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\psi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{i\omega_n - E_R + i\gamma \text{sign } \omega_n}. \quad (2)$$

Предполагается, что волновая функция  $\psi(\mathbf{r}) \sim a^{-3/2}$  в области размером порядка длины локализации центра  $a$ . Из-за гибридизации с зонными состояниями уровень уширяется на величину  $\gamma = \pi^3 \nu_0 |U|^2$ , где  $\nu_0$  – односпиновая плотность проводящих состояний на уровне Ферми.

При малой концентрации резонансных центров среднее время свободного пробега  $\tau$  зонных электронов определяется в основном рассеянием на нерезонансных узлах. Функция Грина проводящих электронов, усредненная по рассеянию на примесях, определяется выражением [12]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{i\omega_n - \epsilon(\mathbf{p}) + \mu + i \text{sign } \omega_n / 2\tau}. \quad (3)$$

Режим сильного беспорядка в модели Хаббарда обсуждался в [13].

Распространение электронной пары между центрами при многократном рассеянии описывается пропагатором, изображенным на рис. 1. Он находится из уравнения

$$(-D\nabla^2 + |\omega_n - \omega_m|)C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n, \omega_m) = \Theta(-\omega_n \omega_m) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4)$$

где  $D$  – константа диффузии проводящих электронов за счет рассеяния на примесях.

В магнитном поле в градиентной части надо заменить  $\nabla \rightarrow \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}$ .

**2. Сверхпроводящая неустойчивость при слабом притяжении.** Неустойчивость системы по отношению к переходу в сверхпроводящее состояние соответствует расходимости суммы лестничных диаграмм [12], показанной на рис. 2. Мы учитываем электрон-электронное взаимодействие только на резонансных узлах, а распространение электронных пар между ними описываем пропагатором (4).

Электронная петля  $\Pi(i, m)$  на рис. 2 состоит из локального и дальнегодействующего вкладов.

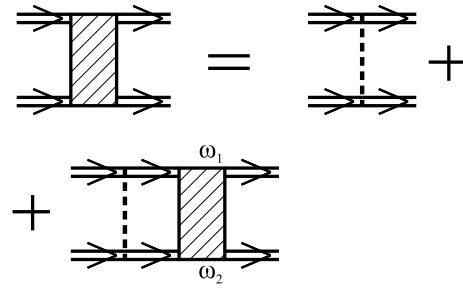


Рис. 1. Графическое уравнение, описывающее диффузионное распространение куперовских пар. Двойная линия соответствует функции Грина (3) проводящих электронов. Пунктир описывает рассеяние на случайном потенциале

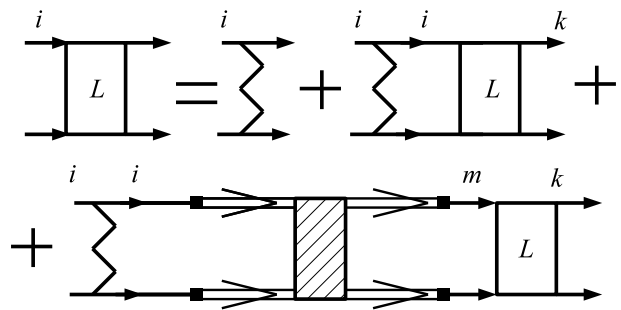


Рис. 2. Графическое уравнение для сверхпроводящей лестницы  $L(i, k)$ . Одиночные линии соответствуют функциям Грина резонансных узлов (2). Черный квадрат соответствует гибридизации с проводящими состояниями. Зигзагообразные вертикальные линии соответствуют электрон-электронному взаимодействию  $W$  на отрицательных  $U$  центрах. Распространение между узлами  $i$  и  $m$  описывается диффузионным пропагатором, показанным на рис. 1

Локальный вклад  $\Pi(0)$  построен на функциях Грина (2) резонансных узлов.

В дальнедействующем вкладе, соответствующем последнему слагаемому на рис. 2, можно заменить суммирование по узлам  $m \neq i$  на интегрирование по координатам центров  $\mathbf{r}_k$ , взвешенным с плотностью резонансных узлов  $n_R$ .

Температура сверхпроводящего перехода определяется уравнением

$$1 - W\Pi(0) = Wn_R \int d\mathbf{r} \Pi(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Дисперсионное уравнение на температуру перехода (5) при подстановке функций Грина (2) и пропагатора (4) приобретает вид

$$1 - W/W_c = \frac{2Wn_R\gamma^2}{\pi\nu_0} T \sum_{\omega_n} \frac{C(\mathbf{q} = 0, \omega_n, -\omega_n)}{((\omega_n + \gamma \text{sign } \omega_n)^2 + E_R^2)^2}. \quad (6)$$

Здесь

$$W_c^{-1} = T \sum_{\omega_n} \frac{1}{(\omega_n + \gamma \operatorname{sign} \omega_n)^2 + E_R^2}. \quad (7)$$

При  $T \ll \gamma, |E_R|$  критическая величина взаимодействия равна  $W_c = 2|E_R| \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\gamma}{|E_R|}\right)^{-1}$ .

Правая часть в уравнении (6) равна

$$W n_R \frac{\gamma^2 \Lambda}{\pi^2 \nu_0} \ln(E_0/T)$$

с логарифмическим обрезанием пропагатора (4)  $E_0 \sim \min(\gamma, |E_R|)$ . Параметр

$$\Lambda \equiv \frac{1}{(E_R^2 + \gamma^2)^2} \quad (8)$$

соответствует члену  $[g(\omega_n)g(-\omega_n)]^2$ , взятому в пределе  $\omega_n \rightarrow 0$ . Он возникает во всех определениях температуры перехода и критических магнитных полей.

Температура сверхпроводящего перехода из уравнения (6) в режиме слабой связи равна

$$T_c = E_0 \exp \left\{ - \frac{\pi^2 \nu_0 (1 - W/W_c)}{\gamma^2 \Lambda W n_R} \right\}. \quad (9)$$

Режим слабой связи соответствует  $W/W_c < 1$ , когда дисперсионное уравнение (5) выполняется из-за дальнего действия  $\Pi(\mathbf{r})$ , которое приводит к логарифмическому вкладу в (6). При  $W \ll W_c$  выражение (9) соответствует результату, полученному в [14].

Отметим, что для положительных  $E_R > \gamma$  режим сильной связи  $W \sim W_c = 2E_R$  соответствует условию вырождения состояний с числом частиц 0 и 2 [4].

**3. Сильное взаимодействие  $W/W_c \geq 1$ .** В режиме сильной связи дисперсионное уравнение (5) удовлетворяется уже при учете только локального вклада. Этот режим удобно рассматривать в рамках функционала Гинзбурга–Ландау (Г-Л). Разделим функционал на сумму локальных вкладов отдельных резонансных узлов и вкладов, связанных с взаимодействием между ними.

*3.1. Локальная часть функционала Г-Л.* Локальная часть функционала Г-Л задается суммой по резонансным узлам. После расщепления взаимодействия на изолированных центрах комплексными полями Хаббарда–Стратоновича  $\Delta_i$  в приближении седловой точки получаем

$$F_{\text{loc}} = \sum_i (W^{-1} - W_c^{-1}) |\Delta_i|^2 + b |\Delta_i|^4. \quad (10)$$

В (10) учитывается минимально необходимое число степеней  $|\Delta_i|$ . Коэффициент  $b > 0$  определяется выражением

$$b = T \sum_{\omega_n > 0} [(\omega_n + \gamma)^2 + E_R^2]^{-2}. \quad (11)$$

$W_c$  и  $b$  являются функциями  $T, E_R$  и уширения уровня  $\gamma$ . По величине  $b^{-1} \sim W_c^3 \sim \max(|E_R|^3, \gamma^3)$ .

Подчеркнем, что в режиме сильной связи при  $W > W_c$  наличие ненулевого значения  $\Delta$  не означает наличия сверхпроводимости. Чтобы иметь когерентное состояние, необходимо ненулевое значение корреляционной функции

$$\langle |\Delta_i \Delta_k| \exp i(\phi_i - \phi_k) \rangle \neq 0 \quad (12)$$

при больших  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  для далеких центров. Это условие может быть выполнено при учете нелокальных вкладов в функционал Г-Л.

*3.2. Нелокальная часть функционала Г-Л.* Нелокальная часть функционала Г-Л определяется андреевскими отражениями в системе с заданным распределением  $\Delta_i$ . Связь между  $\Delta_i$  и  $\Delta_k$  дается диаграммой, изображенной на рис. 3. Ее вклад в функционал Г-Л равняется

$$F(i, k) = -B(i, k) |\Delta_i \Delta_k| \cos \phi_{ik}, \quad (13)$$

где

$$B(i, k) = \frac{8\gamma^2 T}{\pi \nu_0} \sum_{\omega_n > 0} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_{ik})}{2\omega_n + Dq^2} \times \frac{1}{[(\omega_n + \gamma)^2 + E_R^2]^2}. \quad (14)$$

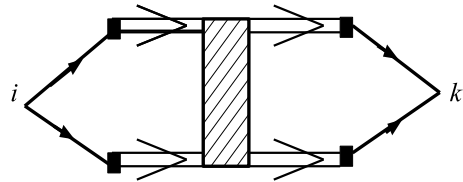


Рис. 3. Андреевское рассеяние между центрами  $i$  и  $k$

Первый множитель в (14) определяет степенную зависимость от расстояния. Он происходит от пропагатора (4).

Мы не учитываем четверные нелокальные члены. Не зависящие от фаз члены сводятся к поправкам в нелинейную часть (10), так как  $|\Delta_i| = |\Delta_m|$ .

Члены типа  $\Delta_i \Delta_k^* |\Delta_j|^2$  приводят к затуханию пропагатора (4) в определении (13). При малых концентрациях  $n_R$  ими можно пренебречь.

Не учитываются члены, связанные андреевским отражением между разными узлами,  $\Delta_i \Delta_k \Delta_j^* \Delta_m^*$ . При высоких температурах из-за случайных фазовых множителей соответствующие слагаемые малы. В методе среднего поля они не влияют на температуру перехода в сверхпроводящее состояние.

3.3. *Функционал Г-Л при  $W \geq W_c$ .* Выражения (10) и (13) определяют функционал Г-Л

$$F = \sum_i \left[ \frac{1 - W/W_c}{W} |\Delta_i|^2 + b |\Delta_i|^4 \right] - \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} B(i, k) |\Delta_i \Delta_k| \cos(\phi_{ik}). \quad (15)$$

4. **Среднее поле.** Вычислим температуру сверхпроводящего перехода методом среднего поля. Заменяем на среднее  $\Delta_{i \neq 0} \rightarrow \Theta \equiv \langle \Delta \rangle$ . Для  $i = 0$  уравнение среднего поля для комплексной функции  $\Delta = \theta_1 + i\theta_2$  имеет вид

$$\Theta \equiv \langle \theta_1 + i\theta_2 \rangle = \frac{\int d\theta_1 d\theta_2 \Delta \exp(-F_{MF}(\Theta)/T)}{\int d\theta_1 d\theta_2 \exp(-F_{MF}(\Theta)/T)}, \quad (16)$$

где

$$F_{MF}(\Theta) = \frac{1 - W/W_c}{W} |\Delta|^2 + b |\Delta|^4 - \Theta \theta_1 \sum_{k \neq 0} B(0, k). \quad (17)$$

Уравнение (16) в пределе  $\Theta \rightarrow 0$  приводит к уравнению для температуры перехода в когерентное состояние

$$1 = \frac{\langle |\Delta|^2 \rangle}{2T} \sum_{k \neq 0} B(0, k), \quad (18)$$

где множитель  $\langle |\Delta|^2 \rangle$  есть среднее с локальным функционалом

$$\langle |\Delta|^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty d\rho \rho \exp \left[ - \left( \frac{1 - W/W_c}{W} \rho + b\rho^2 \right) / T \right]}{\int_0^\infty d\rho \exp \left[ - \left( \frac{1 - W/W_c}{W} \rho + b\rho^2 \right) / T \right]}. \quad (19)$$

Снова как в (5), можно суммирование по центрам заменить интегрированием

$$\sum_{k \neq 0} B(0, k) = \frac{2\gamma^2 \Lambda n_R \ln(E_0/T)}{\pi^2 \nu_0}. \quad (20)$$

Выражения (18), (19) и (20) позволяют определить температуру перехода в когерентное состояние как в режиме слабой, так и сильной связи.

5. **Температура перехода в когерентное состояние.** В режиме слабой связи  $W < W_c$  при вычислении корреляционной функции в (18) можно пренебречь членом  $b|\Delta|^4$ . В этом случае из (18), (19)

и (20) мы получаем температуру перехода в пределе слабой связи (9).

При сильном притяжении  $W > W_c$  термодинамическое среднее  $|\Delta|$  имеет ненулевое значение. При  $(W - W_c)^2/W_c > T_c$  вкладом флуктуаций в (19) можно пренебречь, так что температура перехода определяется выражением

$$T_c(W) = \frac{(W/W_c - 1) n_R \gamma^2 \Lambda}{Wb} \frac{1}{2\pi^2 \nu_0} \ln |E_0/T_c|. \quad (21)$$

Заметим, что (21) соответствует пределу, рассмотренному в [11 и ссылки там].

В малой окрестности вблизи критического значения притяжения такой, что  $T_c > (W - W_c)^2/W_c$  можно пренебречь членом  $\sim \rho$  в показателе степени в (19). В этом случае мы получаем температуру перехода из (18)

$$T_c(W \sim W_c) = \left[ \frac{n_R \gamma^2 \Lambda}{\pi^2 \nu_0 \sqrt{\pi b}} \ln |E_0/T_c| \right]^2. \quad (22)$$

Это выражение справедливо как для  $W < W_c$ , так и для  $W > W_c$ . Отнормированная на значение в критической точке зависимость температуры перехода от величины притяжения изображена на рис. 4.

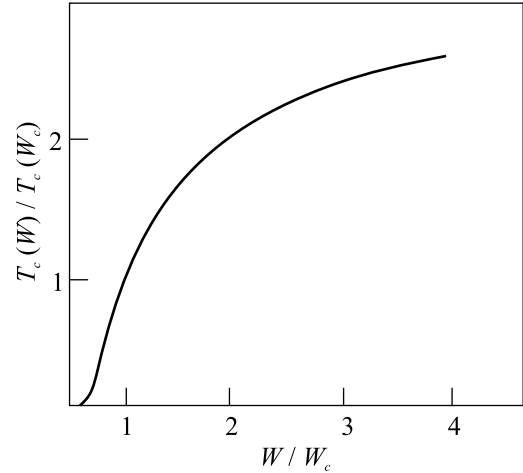


Рис. 4. Зависимость критической температуры от величины притяжения при  $\nu_0 W_c / n_R \sim 1$

6. **Верхнее критическое магнитное поле.** В магнитном поле параметр порядка среднего поля зависит от координаты  $\langle \Delta_i \rangle = \Theta_i$ . Вместо (18) линейное уравнение самосогласования имеет вид

$$\Theta_i = \frac{\beta \langle |\Delta|^2 \rangle}{2T} \sum_{k \neq i} B(i, k) \Theta_k. \quad (23)$$

После замены суммирования в уравнении (23) интегрированием и разложением параметра порядка в магнитном поле с  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  вблизи  $\mathbf{r}_i$

$$\Theta_k = \Theta(\mathbf{r}_i) + \frac{\mathbf{r}_{ik}^2}{2} \left( \frac{d}{d\mathbf{r}_i} - \frac{2e}{c} i\mathbf{A} \right)^2 \Theta(\mathbf{r}_i) \quad (24)$$

перед градиентным членом возникает комбинация

$$\int d\mathbf{r} r^2 B(\mathbf{r}) = \frac{D\Lambda\gamma^2}{2\pi\nu_0 T_c}. \quad (25)$$

Для определения верхнего критического магнитного поля  $H_{c2}$  необходимо выбрать собственное состояние  $\Theta(\mathbf{r})$  оператора (24) с наибольшим собственным значением.

В случае слабой связи  $W < W_c$  и при температуре вблизи  $T_c$  верхнее критическое поле имеет обычное для неупорядоченных сверхпроводников выражение.

При сильном притяжении, когда  $W > W_c$  и  $\langle |\Delta|^2 \rangle \simeq \langle |\Delta| \rangle^2 = \left| \frac{1-W/W_c}{2bW} \right|$ , критическое поле увеличивается на множитель  $\ln |E_0/T_c|$

$$\frac{D|e|H_{c2}}{c} = \frac{4}{\pi} (T_c - T) \ln |E_0/T_c|. \quad (26)$$

Подчеркнем, что магнитное поле не влияет на локальное значение  $\Delta_i$ . Скорее, оно уменьшает эффективные значения джозефсоновской связи между разными резонансными центрами.

**7. Выводы.** В данной работе мы исследовали сверхпроводящий переход в разбавленной системе отрицательных  $U$  центров с сильным электрон-электронным притяжением.

Мы показали, что если притяжение сильнее некоторого критического значения  $W_c$ , зависящего от энергии и ширины резонансных уровней, то в системе возникает некогерентное сверхпроводящее состояние. Глобальная сверхпроводимость устанавливается за счет андреевского отражения между резонансным уровнем при более низкой температуре. Этот режим напоминает переход из состояния БКШ в жидкость составных бозе-частиц.

Результаты не меняются при смене знака  $E_R$ . Поэтому они справедливы не только для центров с вырождением по числу электронов при малых  $|2E_R - W| \ll E_R$ , но и для системы узлов с отрицательными  $E_R$  при  $|2E_R + W| \ll |E_R|$ .

Автор благодарен А. Л. Шеланкову, В. Зюзину и А. Зюзину за интересные дискуссии.

1. I. A. Chernik and S. N. Lykov, *Sov. Phys. Solid State* **23**, 817 (1981).
2. V. I. Kaidanov and Yu. I. Ravich, *Sov. Phys.-Uspekhi* **28**, 31 (1985).
3. S. A. Nемов and Y. I. Ravich, *Sov. Phys.-Uspekhi* **41**, 735 (1998).
4. C. M. Varma, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2713 (1988).
5. N. Haldolaarachchige, Q. Gibson, W. Xie, M. B. Nielsen, S. Kushwaha, and R. J. Cava, *Phys. Rev. B* **93**, 024520 (2016).
6. P. Girado-Gallo, P. Walmsley, B. Sangiorgio, S. C. Riggs, R. D. McDonald, L. Buchauer, B. Fauque, C. Liu, N. A. Spaldin, A. Kaminski, K. Behnia, and I. R. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 207001 (2018).
7. P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
8. C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
9. R. Micnas, J. Ranninger, and S. Robaszkiewicz, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 113 (1990).
10. G. E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 537 (2018).
11. A. G. Mal'shukov, *Solid State Commun.* **77**, 57 (1991).
12. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover, N.Y. (1963).
13. Н. А. Кулеева, Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, *Письма в ЖЭТФ* **112**, 603 (2020).
14. A. L. Shelankov, *Solid State Commun.* **62**, 327 (1987).