Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 4, стр. 256 - 259 25 февраля 1992 г.

ГРУППА СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ ПЛАЗМЫ БЕЗ СОУДАРЕНИЙ

В.Ф.Ковалев, С.В.Кривенко, В.В.Пустовалов

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
117924, Москва

Поступила в редакцию 27 декабря 1991 г.

Найдена непрерывная точечная группа Ли, допускаемая системой интегродифференциальных уравнений Власова в теории электрон-ионной плазмы с самосогласованным электромагнитным полем. В условиях инвариантности зарядов и масс частиц плазмы и скорости света в вакууме группа является конечной 12-параметрической и содержит в качестве подгруппы 10-параметрическую группу Пуанкаре. Учет перенормировок констант теории делает группу бесконечной с произволом в 16 функций пяти переменных.

Горячая плазма представляет собой квазинейтральный газ заряженных частиц с пренебрежимо малой частотой кулоновских соударений. Основу теории такой плазмы составляет система кинетических уравнений Власова [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{V}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+e\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{B}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=0;\quad \vec{p}=\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-(\vec{V}/c)^2}};$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}+\vec{V}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \vec{r}}+\bar{e}\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{B}]\right\}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \vec{q}}=0;\quad \vec{q}=\frac{\bar{m}\vec{V}}{\sqrt{1-(\vec{V}/c)^2}};\qquad (1)$$

для функций распределения f- и $\bar{f}$-частиц плазмы, движущихся в самосогласованном электромагнитном поле, векторы напряженности $\vec{E}$ и $\vec{B}$ которого подчиняются уравнениям Максвелла

$$c\,\mathrm{rot}\vec{E}+\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0;\quad \mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho;$$

$$c\,\mathrm{rot}\vec{B}-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=4\pi\vec{j};\quad \mathrm{div}\vec{B}=0.\qquad (2)$$

Плотности заряда ρ и тока $\vec{j}$ определяются в свою очередь движением частиц:

$$\rho=e\int d\vec{p}f+\bar{e}\int d\vec{q}\bar{f};\quad \vec{j}=e\int d\vec{p}\vec{V}f+\bar{e}\int d\vec{q}\vec{V}\bar{f}.\qquad (3)$$

Система уравнений (1)-(3) имеет обширные применения в физической кинетике и, в частности, играет важную роль в теории плазмы, исследуемой по программе управляемого термоядерного синтеза.

В данной статье представлен результат прямого вычисления координат инфинитезимального оператора (ИО) непрерывной точечной группы Ли, допускаемой системой (1)-(3). Расчет выполнен по стандартной схеме группового анализа Ли–Овсянникова–Ибрагимова [2–4] для систем дифференциальных уравнений в частных производных, существенно дополненной элементами подхода [5], позволяющего учесть в этой схеме нелокальные вклады (3). Кроме того, исходя из основной идеи метода ренормализационной группы

[6,7], мы включаем в набор переменных (4), подвергаемых групповому преобразованию, пять параметров системы (1)-(3), а именно, заряды e, $\bar{e}$ и массы $m, \bar{m}$ частиц плазмы (двух сортов) и скорость света c:

$$\{t, x_i, V_i, e, m, \bar{e}, \bar{m}, c; f, \bar{f}, E_i, B_i, j_i, \rho\}. \tag{4}$$

Здесь через x_i обозначены компоненты радиус-вектора $\vec{r}$, индекс i пробегает три значения соответственно размерности входящих в (1)-(3) векторов. Возникающий при таком групповом анализе ИО содержит произвол в 16 независимых скалярных функций пяти параметров и может быть представлен 16-ю ИО с коэффициентами в виде этих функций:

$$A_0, A_i, b_i, g_i, A_4, A_5, ...A_9 - \text{функции } e, m, \bar{e}, \bar{m}, c. \tag{5}$$

Очевидная из физических соображений группа Пуанкаре отвечает подгруппе, представленной здесь десятью (скалярными) ИО:

$$X_0 = A_0\frac{\partial}{\partial t};\ \ X_i = A_i\frac{\partial}{\partial x_i};\ \ Y_i = b_i\left[x_i\frac{\partial}{\partial t} + c^2 t\frac{\partial}{\partial x_i} + (c^2\delta_{is} - V_i V_s)\frac{\partial}{\partial V_s} - \right.$$

$$\left. - c e_{isk} B_s\frac{\partial}{\partial E_k} + c e_{isk} E_s\frac{\partial}{\partial B_k} + c^2\rho\frac{\partial}{\partial j_i} + j_i\frac{\partial}{\partial \rho}\right];$$

$$Z_i = g_i e_{isk}\left[x_s\frac{\partial}{\partial x_k} + V_s\frac{\partial}{\partial V_k} + E_s\frac{\partial}{\partial E_k} + B_s\frac{\partial}{\partial B_k} + j_s\frac{\partial}{\partial j_k}\right]. \tag{6}$$

Здесь и ниже по индексам s, k идет суммирование, а по индексу i - нет; e_{isk} - единичный совершенно антисимметричный тензор. Эта подгруппа (6) дополняется ИО растяжений и переносов:

$$X_4 = A_4\left\{t\frac{\partial}{\partial t} + x_s\frac{\partial}{\partial x_s} - 2f\frac{\partial}{\partial f} - 2\bar{f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}} - E_s\frac{\partial}{\partial E_s} - B_s\frac{\partial}{\partial B_s} - 2j_s\frac{\partial}{\partial j_s} - 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right\};$$

$$X_5 = A_5\left\{\frac{1}{m^3 e}\frac{\partial}{\partial f} - \frac{1}{\bar{m}^3\bar{e}}\frac{\partial}{\partial \bar{f}}\right\}. \tag{7}$$

В условиях инвариантности параметров теории функции (5) являются константами, а допускаемая системой уравнений (1)-(3) непрерывная группа Ли (6), (7) является конечной 12-параметрической. В общем случае набор ИО (6), (7) дополняется еще четырьмя ИО, возникновение которых обусловлено групповым преобразованием скорости света, зарядов и масс частиц плазмы:

$$X_6 = A_6\left[c\frac{\partial}{\partial c} + x_s\frac{\partial}{\partial x_s} + V_s\frac{\partial}{\partial V_s} - 3f\frac{\partial}{\partial f} - 3\bar{f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}} + E_s\frac{\partial}{\partial E_s} + B_s\frac{\partial}{\partial B_s} + j_s\frac{\partial}{\partial j_s}\right];$$

$$X_7 = A_7\left[m\frac{\partial}{\partial m} + \bar{m}\frac{\partial}{\partial \bar{m}} - 2f\frac{\partial}{\partial f} - 2\bar{f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}} + E_s\frac{\partial}{\partial E_s} + B_s\frac{\partial}{\partial B_s} + j_s\frac{\partial}{\partial j_s} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right];$$

$$X_8 = A_8\left[\bar{m}\frac{\partial}{\partial \bar{m}} + \bar{e}\frac{\partial}{\partial \bar{e}} - 4\bar{f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}}\right];\quad X_9 = A_9\left[m\frac{\partial}{\partial m} + e\frac{\partial}{\partial e} - 4f\frac{\partial}{\partial f}\right]. \tag{8}$$

Шестнадцать скалярных ИО (6)-(8) с точностью до произвола функций (5) образуют алгебру Ли и представляют бесконечную непрерывную группу, допускаемую системой уравнений Власова (1)-(3).

Формулы (6) - (8) являются основным результатом данной заметки. Коротко обсудим его. Возникновение гиперболических поворотов Y_i в наборе (6) обусловлено двумя обстоятельствами: зависимостями импульсов частиц плазмы от скорости и "релятивистским" характером уравнений поля (2). Изменение одной из этих зависимостей (например, в случае квазичастиц в кристаллической решетке металла) меняет группу. В частности, группе Галилея соответствует следующее приближенное выражение для ИО Y_i:

$$Y_i \approx c^2 b_i \left[t\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial V_i} - \frac{1}{c} e_{isk} B_s \frac{\partial}{\partial E_k} + \rho \frac{\partial}{\partial j_i} \right]. \tag{9}$$

Функции распределения частиц плазмы инвариантны относительно подгруппы (6) и подвергаются групповым преобразованиям согласно (7), (8). Параметры теории являются инвариантами подгруппы (6), (7). ИО (8) составляют основу для построения ренормализационной группы. В таком ренормгрупповом контексте (см. [8]) была использована, в частности, и подгруппа Лоренца с ИО Y_i, Z_i для воспроизводства нелинейных диэлектрических проницаемостей однородной горячей плазмы без внешних полей из адекватных им выражений в холодной покоящейся плазме. Инфинитезимальная форма представления группы (6)-(8) характерна для группового анализа [2-4]. Конечные преобразования группы выстраиваются решением уравнений Ли для ИО. Например, одномерные преобразования Лоренца [9] являются решениями уравнений Ли для x-компоненты векторного ИО Y_i. Неодномерные преобразования Лоренца вместе с круговыми вращениями [10] - суть решения уравнений Ли для шести скалярных ИО, соответствующих двум вектор-операторам Y_i и Z_i в подгруппе Пуанкаре (6).

Первое вычисление непрерывной точечной группы Ли, допускаемой кинетическим уравнением Власова, было выполнено в работе [11] в одномерном нерелятивистском приближении для однородной электронной плазмы с потенциальным самосогласованным электрическим полем на основе переформулировки интегродифференциальных соотношений в виде эквивалентной им бесконечной системы дифференциальных уравнений для степенных моментов функции распределения электронов по скоростям. Через 1,5 десятка лет результат [11] был воспроизведен в работе [5] на основе разработанного в ней же единого общего подхода, позволяющего строить и решать определяющие уравнения группы с непосредственным учетом нелокальных (интегральных) вкладов в исходных уравнениях, подвергаемых групповому анализу. Именно этот подход [5] позволил впервые получить здесь группу (6)-(8) для системы интегродифференциальных уравнений (1)-(3), качественно отличающуюся от [11]. Из-за нелокальности операции интегрирования функций распределения f и $\bar{f}$ в правых частях равенств (3) по импульсам $\vec{p}$ и $\vec{q}$ производные по f и $\bar{f}$ в (7), (8) при построении определяющих уравнений группы понимаются в смысле Фреше. Расщепление нелокальных определяющих уравнений достигается в данном случае простым вариационным дифференцированием по независимым групповым переменным f и $\bar{f}$.

В заключение отметим, что результат (6)-(8) сохраняет силу и для точных микроскопических уравнений Климонтовича [12], если вместо одночастичных функций распределения $f, \bar{f}$ и средних напряженностей электрического и магнитного полей в формулах (6)-(8) иметь в виду микроскопические фазовые плотности $N, \bar{N}$ и микроскопические поля $\vec{E}, \vec{B}$, учитывающие флуктуации плазмы. Дополнительное расширение группы (6)-(8) достигается, например, лагранжевой заменой эйлеровых импульсов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в кинетических уравнениях (1).

Авторы весьма признательны С.В.Мелешко и С.И.Сенашову за разъяснение основных положений подхода [5] и Д.В.Ширкову за обсуждение результатов (6)-(8).

1. А.А.Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938); УФН 93, 444 (1967).
2. S.Lie, Gezammelte Abhandlungen. Leipzig-Oslo, Bd.5 (1924); Bd.6 (1927).
3. Л.В.Овсянников, Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Н.Х.Ибрагимов, Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
5. С.В.Мелешко, Докт. дис. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1991.
6. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, ДАН СССР 103, 203 (1955); 103, 391 (1955).
7. Д.В.Ширков, ТМФ 60, 218 (1984).
8. В.Ф.Ковалев, С.В.Кривенко, В.В.Пустовалов, Доклады на Международном семинаре "Современный групповой анализ", Уфа: июнь 1991; Международном совещании "Ренормгруппа-91", Дубна, сентябрь 1991.
9. Л.Ландау, Е.Лифшиц, Теория поля. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
10. В.А.Фок, Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физ-мат., 1961.
11. В.Б.Таранов, ЖТФ 46, 1271 (1976).
12. Ю.Л.Климонтович, ЖЭТФ 33, 982 (1957); 34, 173 (1958); 37, 735 (1959); 38, 1212 (1960).