

НОВЫЕ ПОПРАВКИ К СВЕРХТОНКОМУ РАСЩЕПЛЕНИЮ В МЮНИИ И ВОДОРОДЕ

С.Г.Каршенбойм, В.А.Шелюто, М.И.Эйдес

Получены радиационные поправки к сверхтонкому расщеплению относительного порядка $\alpha^2(Z\alpha)$, индуцированные поляризационными вставками во внешние фотоны. Новый вклад равен $(\alpha^2(Z\alpha)/\pi)(-\frac{4}{3}\ln^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{20}{9}\sqrt{3}\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{608}{45}\ln 2 + \frac{\pi^2}{9} - \frac{38}{15}\pi + \frac{91639}{37800})$ в единицах энергии сверхтонкого расщепления Ферми E_F .

После вычисления радиационных поправок к отдаче для сверхтонкого расщепления в основном состоянии мюония ¹⁻³, лишь чисто радиационные поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ могут привести к вкладам на уровне единиц килogerц. Они примерно на порядок превышают погрешность эксперимента ⁴, равна 0,16 кГц, что делает задачу их определения весьма актуальной.

Используя развитые в ⁵ методы, нетрудно показать, что все поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ исчерпываются матричными элементами шести калибровочно-инвариантных наборов диаграмм рисунка. Заштрихованный блок на рис. в означает все перенормированные вставки одного радиационного фотона в электронную линию, одевающие двухфотонное испускание, а заштрихованный блок на рис. e – все вставки двух радиационных фотонов. Мы сейчас вычислим вклады в сверхтонкое расщепление диаграмм рис. a–в, содержащих вставки поляризационного оператора во внешние фотоны.

Скелетной диаграмме с двумя внешними фотонами соответствует инфракрасно расходящийся интеграл ²

$$-\frac{8Z\alpha}{\pi} E_F \int_0^\infty \frac{dk}{k^2}, \tag{1}$$

где $k = |k|$ – трехмерный импульс обменного фотона, обезразмеренный массой электрона. В отличие от ^{2,3} мы включили здесь в определение энергии Ферми E_F в качестве множителя полный, а не дираковский магнитный момент мюона. Это связано с тем, что все полученные ниже поправки происходят от импульсов интегрирования, малых по сравнению с массой мюона. При таких импульсах аномальный магнитный момент, согласно низкоэнергетической теореме, входит во все физические величины на равных с дираковским моментом

Вставка двух однопетлевых поляризационных операторов во внешний фотон на рис. a соответствует замене в подинтегральном выражении (1)

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow k^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left\{ \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{4+k^2(1-v^2)} \right\}^2. \tag{2}$$

Соответствующий вклад в сверхтонкое расщепление выражается интегралом

$$\delta E_{1P} = -\frac{3 \cdot 8\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} E_F \int_0^\infty dk k^2 \left[\int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{4+k^2(1-v^2)} \right]^2, \quad (3)$$

где комбинаторный множитель 3 учитывает наличие трех диаграмм рис. а. Вычисляя сначала интеграл по v , а затем по k , получаем

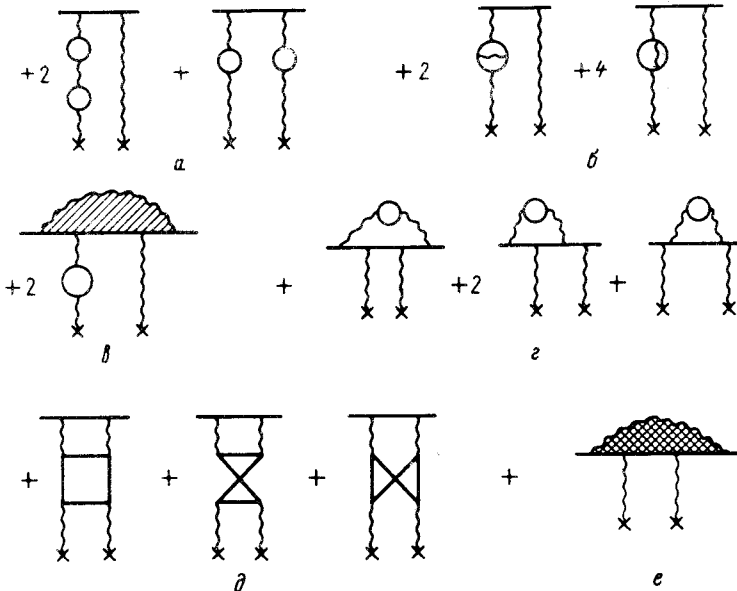
$$\delta E_{1P} = \frac{36}{35} \cdot \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F. \quad (4)$$

Вклад графиков рис. б учитываем с помощью замены

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{dv \cdot v}{4+k^2(1-v^2)} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (3-v^2)(1+v^2) \left[\frac{\pi^2}{6} + \ln \frac{1+v}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} + 2Li\left(\frac{1+v}{1+v}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2Li\left(\frac{1+v}{2}\right) - 2Li\left(\frac{1-v}{2}\right) - 4Li(v) + Li(v^2) \right] + \left[\frac{11}{16} (3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} - \frac{3}{2} v(3-v^2) \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{1+v}{1-v} + 3v(3-v^2) \ln \frac{1+v}{2} - 2v(3-v^2) \ln v + \frac{3}{8} v(5-3v^2) \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где $Li(x)$ – дилогарифм Эйлера (см., напр., ^{2,3}) и мы использовали известное выражение для двухпетлевой поляризации вакуума ^{6,7}. Соответствующий вклад в энергию вычисляем, интегрируя сначала по обменному импульсу, а затем по \bar{v} , и, учитывая комбинаторный множитель 2 (см. рис. б), получаем

$$\delta E_{2P} = \left(\frac{224}{15} \ln 2 - \frac{38}{15} \pi - \frac{118}{225} \right) \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F. \quad (6)$$



Калибровочно-инвариантные наборы графиков, приводящих к вкладам порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ в сверхтонкое расщепление.

Вклад графиков рис. в вычисляем с помощью полученного в ³ единого выражения для радиационных поправок к двухфотонному испусканию из фермионной линии. Нетрудно видеть, что в случае внешнего поля только коэффициент при структуре $\langle \gamma \hat{k} \gamma \rangle$ в фермионном факторе ³ дает вклад в сверхтонкое расщепление. Учет вставок в электронную линию соответствует замене в (1)

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^x dx \int_0^x dy \left[\frac{A_1(x, y)}{k^2 y(1-y) + x^2} - \frac{k^2 B_1(x, y)}{[k^2 y(1-y) + x^2]^2} \right] \equiv \frac{\alpha}{2\pi} L(k), \quad (7)$$

где

$$A_1(x, y) = (1-x)^2 - x - 2y \frac{1-x}{x} + \frac{2y^2}{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right), \quad (8)$$

$$B_1(x, y) = xy \left(1 - \frac{x}{2}\right) + y^2 \left(-\frac{4}{x} + 1 + x\right) + y^3 \left(\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 3\right) + 2 \frac{y^4}{x}.$$

Выражения (8) для A_1 и B_1 несколько отличаются от приведенных в ³. Дело в том, что в случае внешнего поля при $k_0 = 0$ разбиение электронного фактора на слагаемые с квадратом и первой степенью знаменателя $k^2 y(1-y) + x^2$ становится неоднозначным, так как интегрирование по частям позволяет переводить их друг в друга. Мы воспользовались этой свободой и избавились от логарифмов, имевшихся в формуле для B_1 в ³, что облегчает последующее интегрирование. Учитывая еще вставку поляризации вакуума в обменный фотон и комбинаторный множитель 2, получаем для вклада диаграмм рис. в, связанных с электронным фактором (7),

$$\delta E_{RP}^{(1)} = 8 \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} E_F \int_0^\infty dk k^2 L(k) \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{4+k^2(1-v^2)}. \quad (9)$$

В результате громоздких и утомительных вычислений получаем

$$\delta E_{RP}^{(1)} = \left(-\frac{4}{3} \ln^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{20}{9} \sqrt{5} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{64}{45} \ln 2 + \frac{\pi^2}{9} + \frac{1043}{675} \right) \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F. \quad (10)$$

В выражении (8) для электронного фактора вычтен аномальный магнитный момент электрона, который необходимо теперь учесть отдельно. Легко видеть, что соответствующий вклад в сверхтонкое расщепление получается из известной поправки порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$, индуцированной поляризационной вставкой в обменный фотон ^{8,9}, умножением на аномальный момент

$$\delta E_{RP}^{(2)} = \frac{3}{8} \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F. \quad (11)$$

Складывая (4), (6), (10) и (11) приходим к суммарному вкладу в сверхтонкое расщепление диаграмм рис. а-в

$$\delta E = \left(-\frac{4}{3} \ln^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{20}{9} \sqrt{5} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{608}{45} \ln 2 + \frac{\pi^2}{9} - \frac{38}{15} \pi + \frac{91639}{37800} \right) \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \approx 2,23 \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F. \quad (12)$$

Как уже отмечалось, поправка (12) появляется в результате интегрирования по виртуальным импульсам, малым по сравнению с массой тяжелой частицы, когда структура этой тяжелой частицы не разрешается. Полученный результат (12) справедлив поэтому не только для мюония, но и для водорода, если в качестве энергии Ферми подставить соответствующую величину. Численно (12) составляет $\sim 1,2$ кГц для мюония и $\sim 0,39$ кГц для водорода. Работа по вычислению остальных поправок к сверхтонкому расщеплению порядка

$\alpha^2(Z\alpha)E_F$, не содержащих поляризационных вставок во внешние фотоны и соответствующих диаграммам рис. 2—e, продолжается, и мы надеемся сообщить ее результаты в недалеком будущем.

Все полученные в этой работе вклады в сверхтонкое расщепление были получены не только аналитически, но и путем численного интегрирования на компьютере. Машинные расчеты были чрезвычайно полезны при контроле за правильностью аналитических преобразований. Мы глубоко признательны В.Г.Иванову, Г.А.Исаакьяну и П.И.Окону за помощь при получении численных результатов.

Литература

1. *Sapirstein J.R. et al.* Phys. Rev. Lett., 1983, 51, 982; Phys. Rev. D, 1984, 29, 2290.
2. *Eides M.I. et al.* Phys. Lett. B, 1986, 177, 425; *Каршенбойм С.Г. и др.* ЯФ, 1986, 44, 1118; ЖЭТФ, 1987, 92, 1188.
3. *Eides M.I. et al.* Phys. Lett. B, 1988, 202, 572; *Каршенбойм С.Г. и др.* ЖЭТФ, 1988, 94, 42.
4. *Mariam F.G. et al.* Phys. Rev. Lett., 1982, 49, 993.
5. *Каршенбойм С.Г. и др.* ЯФ, 1988, 48, 769.
6. *Källén G., Sabry A. K.* Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 1955, 29, № 17.
7. *Швингер Ю.* Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1976, 2, 432.
8. *Kroll N., Pollock F.* Phys. Rev., 1951, 84, 595; *ibid.*, 1952, 86, 876.
9. *Karplus R. et al.* Phys. Rev., 1951, 84, 597; *Karplus R., Klein A.* Phys. Rev., 1952, 85, 972.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт метрологии им. Д.И.Менделеева

Поступила в редакцию
29 мая 1989 г.