Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 9, с. 684 – 688

Динамическая восприимчивость скирмионного кристалла

В. Е. Тимофеев[+*×1)], *Д. Н. Аристов*[+*]

[+]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина Россия*

[*]*Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия*

[×]*Санкт-Петербургский электротехнический университет "ЛЭТИ", 197376 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 20 декабря 2022 г.
После переработки 19 марта 2023 г.
Принята к публикации 6 апреля 2023 г.

В подходе стереографической проекции разработан теоретический формализм расчета тензора динамической магнитной восприимчивости скирмионного кристалла (СкК), возникающего в тонких ферромагнитных пленках с взаимодействием Дзялошинского–Мории во внешнем магнитном поле. Там, где это возможно используется аналитический подход, для построения статической конфигурации СкК используется модельный анзац, после чего рассматриваются малые флуктуации вокруг вокруг него. Полученные выражения численно анализируются для случая однородной восприимчивости, наиболее важного для экспериментов по магнитному резонансу (МР). Предсказано, что помимо трех обсуждаемых ранее в литературе, а также наблюдаемых экспериментально, резонансов, должны наблюдаться дополнительные резонансы меньшей интенсивности на больших частотах.

DOI: 10.31857/S1234567823090070, EDN: boxhqa

Введение. Магнитные скирмионы – топологически защищенные конфигурации локальной намагниченности, возникающие, например, в нецентросимметричных магнетиках [1] в присутствии взаимодействия Дзялошинского–Мории (ДМ). Скирмионы привлекают внимание исследователей благодаря возможности их использования в качестве элементов новых устройств компьютерной памяти [2], арифметико-логических устройств [3], или даже искусственных нейронных сетей [4]. Известно, что скирмионы обычно упорядочиваются в регулярные решетки как в объемных образцах [5], так и в тонких пленках [6–9]. Решетки скирмионов, также называемые скирмионными кристаллами (СкК), интересны в контексте применения в магнонике [10].

Один скирмион представляет собой цилиндрическую доменную стенку малого радиуса, чье движение описывается уравнением Тиля [11]. Но даже один скирмион представляет собой сложную структуру, чья динамика не может описываться только в терминах смещений. Исследовались также деформации формы скирмиона такие, как дилатации, эллиптические деформации, треугольные и т.д. [12, 13]

Ранее было показано, что среди возбуждений СкК есть голдстоуновская мода [14], связанная со смещениями скирмионных центров в решетке. Кроме этой моды, существуют и другие возбуждения разной симметрии [10, 15, 16], отвечающие эллиптическим деформациям, вращению по часовой стрелке (CW), против часовой стрелки (CCW), дыхательной моде (Br) скирмионов.

Наблюдать и исследовать возбуждения СкК можно при помощи различных экспериментальных методов, например, неупругого рассеяния нейтронов [17], магнитооптического обратного эффекта Фарадея [18], магнитного резонанса (МР). При помощи последнего метода было показано [19], что CW и CCW моды наблюдаются в случае, когда осциллирующая компонента магнитного поля лежит в плоскости СкК, а дыхательная мода проявляет себя, когда поле колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости СкК, как и было предсказано, с помощью численного моделирования [15].

Также было показано, что октупольная и секступольная моды могут проявлять себя в МР экспериментах в объемных материалах со СкК, в которых сильна кубическая магнитокристаллическая анизотропия, приводящая к гибридизации этих мод с Br и CCW модами [20, 21].

В настоящей работе мы обсуждаем МР отклик СкК, образующегося в тонких пленках с взаимодействием ДМ во внешнем магнитном поле при низких температурах. Мы показываем, что, помимо низкоэнергетических CW, CCW и Br мод, существуют мо-

1)e-mail: vetimofeev@etu.ru

ды той же симметрии выше по энергии, которые также должны проявлять себя в МР, несмотря на то, что величина таких резонансов существенно меньше.

Модель. Рассмотрим тонкую ферромагнитную пленку с взаимодействием ДМ в однородном магнитном поле B, перпендикулярном пленке. Плотность энергии такой пленки дается следующим выражением:

$$\mathcal{E} = \frac{C}{2}\partial_\mu S_i \partial_\mu S_i - D\epsilon_{\mu ij} S_i \partial_\mu S_j - BS_3, \qquad (1)$$

где C и D – обменные и ДМ константы соответственно. Видимо, это минимальная модель, в которой существует СкК (за исключением центросимметричных фрустрированных магнетиков, см., например, [22, 23]). Мы не учитываем диполь-дипольное взаимодействие, поскольку для тонкой пленки в длинноволновом пределе оно может быть, с хорошей точностью, заменено анизотропией типа "легкая плоскость". Известно, что если величина анизотропии существенно меньше величины внешнего магнитного поля, фазовая диаграмма слабо меняется [24, 25], поэтому такого рода слагаемые мы также не рассматриваем.

Мы исследуем предел низких температур, когда локальная намагниченность достигает насыщения $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, где $|\mathbf{n}| = 1$. В этом случае удобно измерять длину в единицах $l = C/D$, а плотность энергии в единицах $CS^2 l^{-2} = S^2 D^2/C$. При таком выборе единиц измерения плотность энергии (1) зависит только от одного безразмерного параметра $b = BC/SD^2$. Оказывается, что в диапазоне полей $0.25 < b < 0.8$ равновесной статической конфигурацией $\mathbf{n}$ является СкК, ранее этот вопрос широко обсуждался в литературе [12, 26–28].

Сначала мы обсудим общий формализм вычисления восприимчивости, применимый для произвольной топологически нетривиальной конфигурации намагниченности, а затем используем этот формализм для частного случая СкК [29]. В подходе стереографической проекции единичный вектор, указывающий направление локальной намагниченности $\mathbf{n}$, может быть представлен как:

$$n_1 + in_2 = \frac{2f}{1+f\bar{f}}, \quad n_3 = \frac{1-f\bar{f}}{1+f\bar{f}}, \qquad (2)$$

где $f = f(z,\bar{z})$ – функция комплексного переменного $z = x+iy$ и комплексно сопряженного ему $\bar{z} = x-iy$, а x, y – пространственные координаты. Выражение для $\mathcal{E}$ существенно нелинейно в терминах $f, \bar{f}$, и обсуждалось ранее, например, в [29].

Мы исследуем динамику локальной намагниченности в лагранжевом формализме, $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{E}$, с кинетическим слагаемым вида:

$$\mathcal{T} = \frac{S}{\gamma_0}(1-\cos\theta)\dot{\varphi}, \qquad (3)$$

где углы φ и θ определяют направление намагниченности $\mathbf{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$. Такой кинетический член приводит к уравнению Ландау–Лифшица, $\dot{\mathbf{S}} = -\gamma_0 \mathbf{S}\times\mathbf{H}$, где γ_0 – гиромагнитное отношение, а $\mathbf{H} = \delta E/\delta\mathbf{S}$ – эффективное магнитное поле.

Множитель S/γ_0 может быть внесен в определение единиц измерения времени, при этом кинетическое слагаемое может быть переписано в терминах комплексной функции f следующим образом:

$$\mathcal{T}[f] = \frac{i}{2}\frac{\bar{f}\partial_t f - f\partial_t\bar{f}}{1+f\bar{f}}. \qquad (4)$$

Мы исследуем динамику локальной намагниченности в терминах малых флуктуаций стереографического образа, $f(\mathbf{r},t)$, относительно статической конфигурации, $f_0(\mathbf{r})$, отвечающей минимуму полной энергии, $\int d\mathbf{r}\,\mathcal{E}$. Запишем

$$f(\mathbf{r},t) = f_0(\mathbf{r}) + \alpha(1+f_0(\mathbf{r})\bar{f}_0(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r},t), \qquad (5)$$

где ψ – зависящая от времени функция, а α – малый параметр нашей теории, величина и смысл которого прояснятся ниже. Рассмотрим следующее разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \alpha\mathcal{L}_1 + \alpha^2\mathcal{L}_2 + \ldots$.

Нормальные моды. Для правильно подобранной функции f_0, члены первого порядка малости будут равны нулю, $\mathcal{L}_1 = 0$. При этом члены второго порядка малости записываются следующим образом:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\psi}, & \psi\end{pmatrix}\left(-i\begin{pmatrix}\partial_t & 0\\ 0 & -\partial_t\end{pmatrix} - \hat{\mathcal{H}}\right)\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

с гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$ следующего вида:

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix}(-i\nabla+\mathbf{A})^2+U & V\\ V^* & (i\nabla+\mathbf{A})^2+U\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где $\nabla = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y$, а потенциалы U, V и $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y$ есть функции $f_0(\mathbf{r})$ и ее градиентов, см. [29].

Уравнения Эйлера–Лагранжа в случае (6) имеют следующий вид:

$$-i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix} = \sigma_3\hat{\mathcal{H}}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

а энергии нормальных мод, ϵ_n, могут быть найдены из следующего уравнения:

$$\left(\epsilon_n \sigma_3 - \hat{\mathcal{H}}\right) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = 0\,, \tag{9}$$

где σ_3 – третья матрица Паули. Решения уравнения (9) подробно обсуждались в работе [29]. Они образуют полный ортонормированный базис, с нормировочным условием $\int d^2\mathbf{r}\,\left(|u_n|^2 - |v_n|^2\right) = 1$, что позволяет любую функцию ψ (вместе с сопряженной, $\bar{\psi}$) разложить в ряд следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n, & v_n^* \\ v_n, & u_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_n^\dagger \end{pmatrix}, \tag{10}$$

здесь c_n и $c_n^\dagger$ – комплексно сопряженные друг другу числа, которые после процедуры вторичного квантования становятся операторами рождения и уничтожения бозонов. При этом гамильтониан принимает стандартную форму, $\sum_n \epsilon_n (c_n^\dagger c_n + 1/2)$.

Разложение намагниченности. Разложение для локальной намагниченности по α имеет следующий вид:

$$S_i = S_i^{(0)} + \alpha S(\bar{F}_i \psi + F_i \bar{\psi}) + O(\alpha^2), \tag{11}$$

где $S_i^{(0)} = S n_i$ определяется (2) с $f = f_0$, а

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 + f_0 \bar{f}_0} \begin{pmatrix} 1 - f_0^2 \\ i(1 + f_0^2) \\ -2f_0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

есть зависящий от $\mathbf{r}$ вектор со следующим свойством: тройка векторов Re $\mathbf{F}$, Im $\mathbf{F}$, и $\mathbf{n}$ образуют ортонормированный базис.

Подставляя выражение (10) в (11), выписываем младший порядок по α:

$$S_i = S_i^{(0)} + \alpha S \sum_n \left((\bar{F}_i u_n + F_i v_n) c_n + \text{H.c.}\right). \tag{13}$$

Пользуясь стандартным коммутационным выражением, $[c_n, c_m^\dagger] = \delta_{nm}$, а также полнотой базиса (u_n, v_n), можно убедиться, что при выборе значения $\alpha = 1/\sqrt{2S}$, автоматически выполняется коммутационное соотношение:

$$[S_j(\mathbf{r}), S_k(\mathbf{r}')] = i\epsilon_{jkl} S_l^{(0)}(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,, \tag{14}$$

характерное для линейной теории спиновых волн.

Восприимчивость. Мы хотим вычислить тензор динамической магнитной восприимчивости, $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt\, e^{i\omega t} \chi_{ij}(\mathbf{k}, t)$, являющийся Фурье образом от спиновой запаздывающей функции Грина:

$$\chi_{ij}(\mathbf{k}, t) = -i\theta(t) \langle [S_i(\mathbf{k}, t), S_j(-\mathbf{k}, 0)] \rangle\,. \tag{15}$$

Пользуясь выражениями выше, получаем:

$$S_i(\mathbf{k}, t) = S_i^{(0)}(\mathbf{k}) + \sqrt{\frac{S}{2}} \sum_n (A_n^i(\mathbf{k}) e^{-i\epsilon_n t} c_n + \text{H.c.}). \tag{16}$$

Амплитуда спиновой волны с энергией ϵ_n и волновым вектором $\mathbf{k}$ дается следующим выражением:

$$A_n^j(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\bar{F}_j u_n + F_j v_n). \tag{17}$$

В итоге мы получаем общее выражение:

$$\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{S}{2} \sum_n \left(\frac{\bar{A}_n^i(\mathbf{k}) A_n^j(-\mathbf{k})}{\omega + \epsilon_n + i\delta} - \frac{A_n^i(\mathbf{k}) \bar{A}_n^j(-\mathbf{k})}{\omega - \epsilon_n + i\delta} \right). \tag{18}$$

Следуем отметить, что индекс n моды ϵ_n содержит в себе информацию как о волновом вектор $\mathbf{k}$, так и о номере зоны, см. [29]. Обсудим ниже случай однородной восприимчивости, когда $\mathbf{k} = 0$, особенно важный для экспериментов по магнитному резонансу. Общие выражения для этого случая упрощаются.

Для случая однородной восприимчивости положим $\mathbf{k} = 0$ и обозначим $A_n^j(0) \equiv A_{j,n}$. Из общих соображений мы ожидаем, что тензор χ_{ij} имеет симметричную и антисимметричную части, а единственным выделенным направлением в нашей задаче, ур. (1), является нормаль к плоскости, $\hat{h} = (0, 0, 1)$. Таким образом можно записать:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\omega) &= \chi_\parallel \hat{h}_i \hat{h}_j + \chi_\perp (\delta_{ij} - \hat{h}_i \hat{h}_j) + \chi_{as} \epsilon_{ijk} \hat{h}_k, \\ \chi_\parallel &= \sum_n \frac{\epsilon_n S\, |A_{3,n}|^2}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2}, \\ \chi_\perp &= \sum_n \frac{\epsilon_n S\, |A_{1,n}|^2}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2}, \\ \chi_{as} &= \sum_n \frac{i\omega S\, \text{Im}(A_{1,n} \bar{A}_{2,n})}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Восприимчивость СкК. Введем анзац для СкК, который мы подробно обсуждали до этого в работах [27–29]. Мы показали, что стереографический образ СкК с хорошей точностью описывается суммой стереографических образов отдельных скирмионов:

$$f_{SkX}(a, z_0) = \sum_{n,m} f_1(\mathbf{r} - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2), \tag{20}$$

где $\mathbf{a}_1 = (0, a)$, $\mathbf{a}_2 = (-\sqrt{3}a/2, a/2)$, и a – параметр решетки СкК. Стереографический образ f_1 отдельного

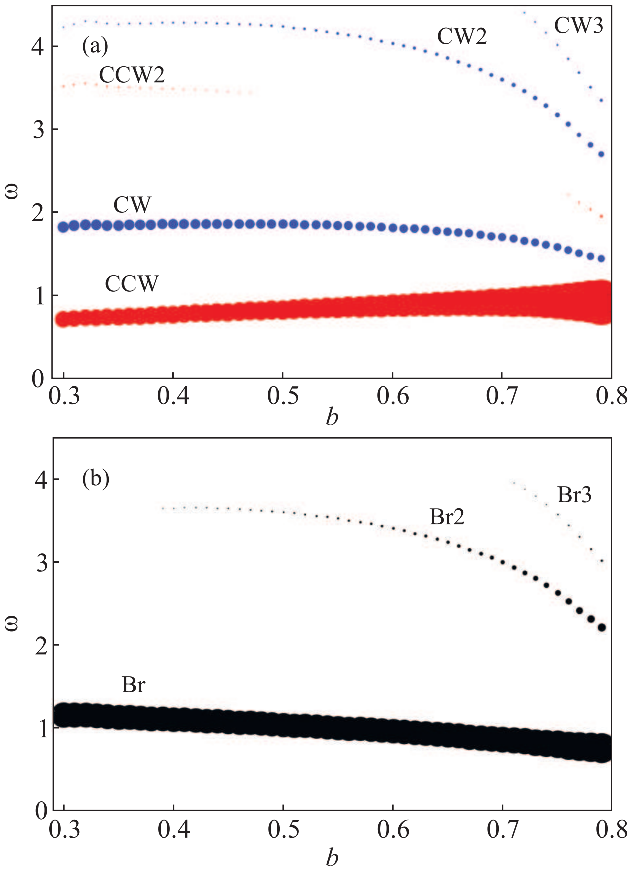

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость мнимой части (a) поперечной, $\chi_\perp$, и b) продольной, $\chi_\parallel$, компонент восприимчивости (19) от магнитного поля b. Площадь каждого кружка, пропорциональная весу, $|A_{j,n}|^2$, каждой дельта-функции. Можно увидеть три хорошо известных низколежащих резонанса: дыхательная мода (Br), вращение по часовой стрелке (CW) и против часовой стрелки (CCW), при этом вместе с ними видны резонансы меньшей интенсивности на больших частотах

скирмиона имеет простой полюс в центре скирмиона, а также убывает на бесконечности, поэтому мы выбираем для него следующий вид:

$$f_1 = \frac{i\, z_0\, \kappa(z\bar{z}/z_0^2)}{\bar{z}}, \tag{21}$$

где z_0 – вещественная величина, которая может быть ассоциирована с размером скирмиона, а κ – функция профиля скирмиона, которая была численно найдена в работе [27]. Отметим, что хорошим приближением для κ является функция Гаусса с шириной, зависящей от величины b. Когда величины B и D равны нулю, наш анзац (20) переходит в точное решение модели для многоскирмионной конфигурации при $\kappa \equiv 1$, см. [30]. Для СкК при отличных от нуля параметров B и D оптимальные значения параметров a и z_0 могут быть получены из процедуры минимизации плотности энергии (1), см. [27, 28].

Пользуясь анзацем (20) для статической конфигурации СкК f_0, мы рассчитали волновые функции при $\mathbf{k} = 0$ в уравнении (9), для тридцати шести низкоэнергентических возбуждений с $\epsilon_n > 0$. Формулы (12) и (17) выше использовалась для вычисления компонент восприимчивости, ур. (19).

Резюмируем результаты проведенных вычислений ниже.

i. Из-за правил отбора, возникающих при вычислении матричных элементов $A_{j,n}$, не все нормальные моды проявляют себя в восприимчивости (19). Главное значение в этих правилах отбора имеет симметрия волновой функции магнонов в центре скирмиона, $\psi \sim z^m$. Моды с магнитным квантовым числом $m = 0, 2$ проявляются в $\chi_\perp$, а моды с $m = 1$ проявляются в $\chi_\parallel$, соответственно. Низкоэнергетические моды с $m = 0, 1, 2$ называются "вращением против часовой стрелки" (CCW), "дыхательной" (Br) и "вращением по часовой стрелке" (CW), соответственно, благодаря их динамическим свойствами, см. [15, 29].

ii. Для CCW и CW мод антисимметричная часть восприимчивости, χ_{as}, равна по модулю диагональной части $\chi_\perp$, с вычетами $\mathrm{Im}(A_{1,n}\bar{A}_{2,n}) = -|A_{1,n}|^2$ и $\mathrm{Im}(A_{1,n}\bar{A}_{2,n}) = |A_{1,n}|^2$, соответственно.

iii. В отличие от предыдущих исследований, мы наблюдаем несколько мод с бóльшими энергиями для каждого m, которые могут наблюдаться экспериментально. Закономерно, что для бóльших ϵ_n вес таких резонансов уменьшается, это связано с уменьшением величины $|A_{j,n}|^2$, ур. (19). Мы показываем положение и вес соответствующих резонансов на рис. 1.

iv. На рисунке 1 видно, что наиболее интенсивные линии относятся в низким частотам, при этом наблюдается тенденция увеличения характерной частоты с ростом величины магнитного поля, b. Обозначение CW (CCW) на рис. 1 соответствует знаку χ_{as}, как объяснялось выше.

v. Интенсивность линий, $|A_{j,n}|^2$, из ур. (19), изображена отдельно на рис. 2 как функция внешнего поля. Видно, что при бóльших значениях поля, $b \simeq$ $\simeq 0.75$, близко к точке плавления СкК, интенсивность вторых резонансов CW2 и Br2 становится сопоставимой по величине с интенсивностью главного CW резонанса. Было бы интересно проверить это предсказание экспериментально.

Подводя итоги нашей работы, мы разработали теорию динамической магнитной восприимчивости СкК в подходе стереографической проекции. Полученные выражения имеют общий характер и не подразумевают конкретного типа упорядочения скирми-

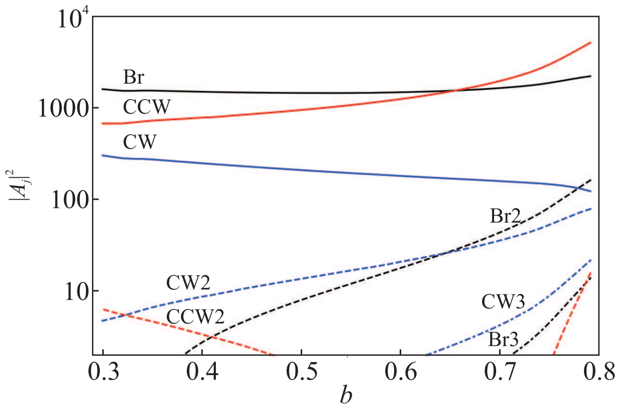

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость спектрального веса восьми резонансов изображенных на рис. 1, от величины магнитного поля b

онов. Применяя полученный формализм к конфигурации треугольной решетки блоховских скирмионов, мы предсказали наличие нескольких резонансов, только три из которых до этого обсуждались в литературе.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант # 22-22-20034, и Санкт-Петербургским научным фондом, грант # 33/2022.

1. N. Bogdanov and D. A. Yablonskii, Sov. Phys. JETP **68**, 101 (1989).
2. H. Vakili, J.-W. Xu, W. Zhou, M. N. Sakib, M. G. Morshed, T. Hartnett, Y. Quessab, K. Litzius, C. T. Ma, S. Ganguly, M. R. Stan, P. V. Balachandran, G. S. D. Beach, S. J. Poon, A. D. Kent, and A. W. Ghosh, J. Appl. Phys. **130**, 070908 (2021).
3. Z. Yan, Y. Liu, Y. Guang, K. Yue, J. Feng, R. Lake, G. Yu, and X. Han, Phys. Rev. Appl. **15**, 064004 (2021).
4. S. Li, W. Kang, X. Zhang, T. Nie, Y. Zhou, K. L. Wang, and W. Zhao, Mater. Horiz. **8**, 854 (2021).
5. S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, Science **323**, 915 (2009).
6. X. Z. Yu, N. Kanazawa, Y. Onose, K. Kimoto, W. Z. Zhang, S. Ishiwata, Y. Matsui, and Y. Tokura, Nature Mater. **10**, 106 (2010).
7. X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, Nature **465**, 901 (2010).
8. A. Tonomura, X. Yu, K. Yanagisawa, T. Matsuda, Y. Onose, N. Kanazawa, H. S. Park, and Y. Tokura, Nano Lett. **12**, 1673 (2012).
9. P. Huang, T. Schönenberger, M. Cantoni, L. Heinen, A. Magrez, A. Rosch, F. Carbone, and H. M. Rønnow, Nature Nanotechn. **15**, 761 (2020).
10. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, Journal of Physics D: Applied Physics **50**, 293002 (2017).
11. A. A. Thiele, Phys. Rev. Lett. **30**, 230 (1973).
12. C. Schütte and M. Garst, Phys. Rev. B **90**, 094423 (2014).
13. S.-Z. Lin, C. D. Batista, and A. Saxena, Phys. Rev. B **89**, 024415 (2014).
14. O. Petrova and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. B **84**, 214433 (2011).
15. M. Mochizuki, Physical. Rev. Lett. **108**, 017601 (2012).
16. S. A. Díaz, T. Hirosawa, J. Klinovaja, and D. Loss, Physical Review Research **2**, 013231 (2020)
17. T. Weber, D. M. Fobes, J. Waizner et al. (Collobartion), Science **375**, 1025 (2022).
18. N. Ogawa, S. Seki, and Y. Tokura, Sci. Rep. **5**, 1(2015).
19. Y. Onose, Y. Okamura, S. Seki, S. Ishiwata, and Y. Tokura, Phys. Rev. Lett. **109**, 037603 (2012).
20. R. Takagi, M. Garst, J. Sahliger, C. H. Back, Y. Tokura, and S. Seki, Phys. Rev. B **104**, 144410 (2021).
21. A. Aqeel, J. Sahliger, T. Taniguchi, S. Mändl, D. Mettus, H. Berger, A. Bauer, M. Garst, C. Pfleiderer, and C. H. Back, Phys. Rev. Lett. **126**, 017202 (2021).
22. O. I. Utesov, Phys. Rev. B **103**, 064414 (2021).
23. O. I. Utesov, Phys. Rev. B **105**, 054435 (2022).
24. S.-Z. Lin, A. Saxena, and C. D. Batista, Phys. Rev. B **91**, 224407 (2015).
25. U. Güngördü, R. Nepal, O. A. Tretiakov, K. Belashchenko, and A. A. Kovalev, Phys. Rev. B **93**, 064428 (2016).
26. J. H. Han, J. Zang, Z. Yang, J.-H. Park, and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **82**, 094429 (2010).
27. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, JETP Lett. **109**, 207 (2019).
28. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, Phys. Rev. B **103**, 094402 (2021).
29. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, Phys. Rev. B **105**, 024422 (2022).
30. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).