Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 10, с. 754 – 764

Образование капель параметра порядка и сверхпроводимость в неоднородных Ферми–Бозе смесях (Миниобзор)

М. Ю. Каган[a,b1)], *С. В. Аксенов*[c], *А. В. Турлапов*[d,e,f], *Р. Ш. Ихсанов*[a], *К. И. Кугель*[g,a], *Е. А. Мазур*[h,i], *Е. А. Кузнецов*[j,k,l], *В. М. Силкин*[m,n,o], *Е. А. Буровский*[a]

[a] *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия*

[b] *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия*

[c] *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения РАН, Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук", 660036 Красноярск, Россия*

[d] *Институт прикладной физики РАН, 603155 Н. Новгород, Россия*

[e] *Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[f] *Российский квантовый центр, 121205 Москва, Россия*

[g] *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, 125412 Москва, Россия*

[h] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[i] *Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[j] *Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[k] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 119334 Москва, Россия*

[l] *Сколковский институт науки и технологии, 121205 Сколково, Россия*

[m] *Donostia International Physics Center (DIPC), 20018 San Sebastian/Donostia, Basque Country, Spain*

[n] *Departamento de Polimeros y Materiales Avanzados: Fisica, Quimica y Tecnologia, Facultad de Ciencias Quimicas, Universidad del Pais Vasco UPV/EHU, Apartado 1072, 20080 San Sebastiain/Donostia, Basque Country, Spain*

[o] *IKERBASQUE, Basque Foundation for Science, 48013 Bilbao, Basque Country, Spain*

Поступила в редакцию 3 апреля 2023 г.
После переработки 8 апреля 2023 г.
Принята к публикации 9 апреля 2023 г.

В обзоре рассмотрен ряд систем, описываемых неоднородной (пространственно-разделенной) Ферми–Бозе смесью, со сверхпроводящими кластерами или каплями параметра порядка в матрице распаренных нормальных состояний. Пространственно-разделенная Ферми–Бозе смесь реализуется в сверхпроводящих оксидах висмута $BaKBiO_3$. Капли параметра порядка могут возникать в тонких пленках грязного металла, описываемых 2D моделью Хаббарда малой электронной плотности с сильным притяжением и сильным диагональным беспорядком. Бозе-конденсатные капли формируются в разбалансированных по плотностям компонент Ферми–Бозе смесях и дипольных газах. Бозе-конденсатные кластеры возникают также в центре или на периферии магнитной ловушки в спин-поляризованных Ферми-газах. Экситонные и плазмонные коллапсирующие капли могут формироваться при притягательном знаке экситон–экситонного или плазмон–плазмонного взаимодействия. Плазмонный вклад в экранировку заряда в MgB_2 приводит к возникновению неоднородных, модулированных в пространстве структур. В металлическом водороде и гидридах металла капли могут формироваться в экспериментах с ударными волнами вблизи границы фазового перехода первого рода между металлической и молекулярной фазами. В пространственно-разделенной Ферми–Бозе смеси в интерференционном кольце Ааронова–Бома со сверхпроводящим мостиком в топологически нетривиальном состоянии возможно появление и коллапс дополнительных резонансов Фано, обусловленных присутствием в системе краевых майорановских мод.

DOI: 10.31857/S1234567823100075, EDN: cnbvlt

I. Введение. Пространственно-разделенная Ферми–Бозе смесь и сверхпроводимость в оксидах висмута $BaKBiO_3$. В статье [1] была впервые сформулирована идея пространственно-разделенной Ферми–Бозе смеси локальных бозонных кластеров или комплексов (содержащих компактные электронные или дырочные пары) в матрице неспаренных (Ферми-жидкостных) состояний для объяснения механизма сверхпроводимости и природы электронного транспорта в нормальном состоянии в оксидах висмута BaKBiO.

[1)] e-mail: kagan@kapitza.ras.ru

На рисунке 1 приведена схема локальной кристаллической структуры в плоскости BiO_2 исходного соединения $BaBiO_3$, являющегося диэлектриком с волной зарядовой плотности (CDW) и с шахматной структурой распределения октаэдров BiL^2O_6 и BiO_6 (левый рисунок) и схема локальной кристаллической структуры $Ba_{0.5}K_{0.5}BiO_3$ с диагональными цепочками комплексов BiO_6, внедренных в большой перколяционный кластер октаэдров BiL^2O_6 (правый рисунок).

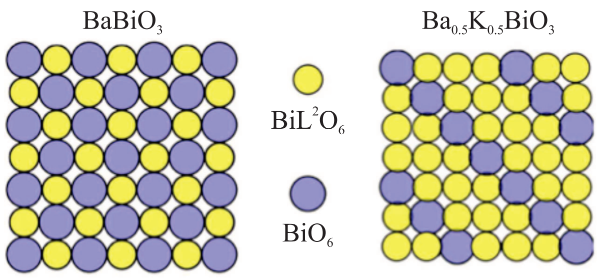

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема локальной кристаллической структуры в плоскости BiO_2 исходного соединения $BaBiO_3$, являющегося CDW-изолятором с шахматной структурой распределения октаэдров BiL^2O_6 и BiO_6 (левый рисунок) и локальной кристаллической структуры $Ba_{0.5}K_{0.5}BiO_3$ с диагональными цепочками комплексов BiO_6, внедренных в большой перколяционный кластер октаэдров BiL^2O_6 (правый рисунок) [2]

Отметим, что возникновение дальнего порядка и макроскопической волновой функции сверхпроводящего состояния в $Ba_{1-x}K_xBiO_3$ обусловлено туннелированием локальных электронных пар из одного бозонного кластера BiO_6 в соседний BiO_6 кластер через туннельный барьер, образованный нормальными фермионными кластерами. Компоненты Ферми–Бозе смеси в интервале металлических концентраций $0.37 < x < 0.5$ разделены в реальном пространстве, но не разделены в энергетическом пространстве (см. более детальное описание в [1] и [2]).

Отметим также, что формирование металлических ферромагнитных нанокапель в немагнитных (парамагнитных, антиферромагнитных и зарядово-упорядоченных) диэлектрических матрицах в магнитных оксидах было подробно рассмотрено в [3].

II. Капли параметра порядка в электронной системе малой плотности с притяжением в присутствии сильного случайного потенциала. В работе [4] нами рассчитаны свойства двумерной электронной системы с малой электронной плотностью ($n \ll 1$), сильным локальным притяжением Хаббарда на узле $|U| > W$ (W – ширина зоны) в присутствии сильного случайного потенциала (диагонального беспорядка) V, равномерно распределенного в диапазоне от $-V$ до $+V$. Учитывались электронные прыжки только на соседние узлы квадратной решетки с шириной зоны $W = 8t$. Расчеты осуществлялись на решетке 24×24 с периодическими граничными условиями.

В рамках подхода Боголюбова–де Жена наблюдалось появление неоднородных состояний пространственно-разделенной Ферми–Бозе смеси куперовских пар и неспаренных электронов с образованием бозонных сверхпроводящих капель разного размера в матрице непарных нормальных электронных состояний.

Нами также подробно проанализирована область параметров задачи (характеризуемых двумя важными отношениями $|U|/W$ и V/W), в которой при электронных плотностях $n_C \approx 0.31$ начинается формирование большого перколяционного кластера и происходит переход изолятор–сверхпроводник [4, 5].

Отметим, что в численном моделировании наблюдался эффект уменьшения размера капли (от более крупных капель до отдельных би-электронных пар) при уменьшении электронной плотности до малых значений $n \leq 0.1$ при фиксированных значениях притяжения Хаббарда U и случайного потенциала V.

Полученные результаты важны как для построения глобальной фазовой диаграммы в нашей системе, так и для понимания природы фазового перехода между сверхпроводящим, нормальным металлическим и локализованным (диэлектрическим) состоянием в квазидвумерном (тонкая пленка) грязном металле. В более практическом смысле полученные результаты интересны также для экспериментального построения сверхпроводящих флакс-кубитов в гранулированных сверхпроводниках, и, в частности, в гранулированных Al пленках.

В работе [4] расчет начинается со случайными значениями амплитуды спаривания Δ_i и зависящей от узла перенормировки химического потенциала $\tilde{\mu}_i$ на каждом из узлов, после чего выполнялась процедура численной диагонализации полученного гамильтониана. В результате были найдены собственные векторы $u_n(\mathbf{r}_i)$, $v_n(\mathbf{r}_i)$ и собственные значения E_n системы.

На рисунке 2 показано двумерное распределение электронной плотности (левый столбец), электронно-дырочного перемешивания (средний столбец) и параметра порядка (правый столбец) при $n = 0.15$ на 24×24 решетке с амплитудой беспорядка $V/t = 10.0$.

Подчеркнем, что хотя даже для малых электронных плотностей $n \leq 0.1$ и больших амплитуд хаббардовского отталкивания $|U|/t = 10$, мы все еще

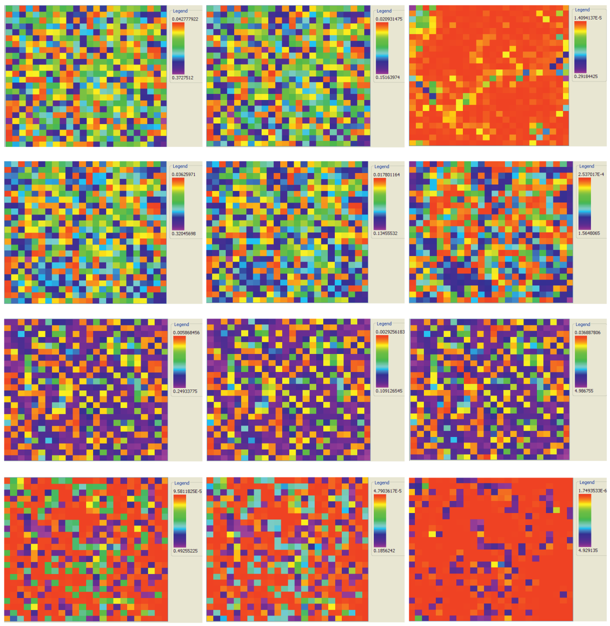

Рис. 2. (Цветной онлайн) Двумерное распределение электронной плотности (левый столбец), электронно–дырочного перемешивания (средний столбец) и параметра порядка (правый столбец) при $n = 0.15$ на 24×24 решетке с амплитудой беспорядка $V/t = 10.0$

находимся в области БКШ для БКШ-БЭК кроссовера между протяженными куперовскими парами (область применимости теории Бардина–Купера–Шриффера) и локальными парами, образующими бозе-эйштейновский конденсат (БЭК). Электронные пары при таких параметрах системы уже достаточно компактны, они слабо перекрываются и почти касаются друг друга. Таким образом, мы действительно очень близки к пределу, когда пары начинают "раздавливать" друг друга, т.е. к пределу Ферми–Бозе смеси компактных пар и неспаренных одиночных электронов. Кроме того, отметим, что по мере роста беспорядка пространственное распределение локальной амплитуды спаривания $\Delta(r)$ сначала принимает форму отдельных капель, а затем при уменьшении плотности – отдельных биэлектронных пар.

III. Неоднородные состояния в разбалансированных Ферми–Бозе смесях и квантовых газах. С экспериментальной точки зрения, расслоение на фазы в разбалансированных (спин-поляризованных) ультрахолодных Ферми-газах впервые наблюдалось в работах группы Кеттерле [6]. В трехмерных ловушках в центре ловушки Кеттерле с соавторами детектировал парное состояние (бозе-конденсат составных бозонов с равными плотностями компонент $n_\uparrow = n_\downarrow$), в то время как на периферии ловушки в основном сосредоточены избыточные спины "вверх". В квазиодномерных ловушках – ситуация обратная. Сбалансированные спаренные фермионы находятся на периферии, а избыточные спины "вверх" находятся в центре ловушки. Первые экспериментальные результаты по расслоению на фазы в квазидвумерных ловушках принадлежат группе Томаса [7]. Качественно ситуация в квазидвумерной геометрии напоминает трехмерную – со сбалансированными спаренными фермионами в центре ловушки.

В работе [8] были продолжены исследования разбалансированных ультрахолодных газов в режиме размерного кроссовера от квазиодномерных к трехмерным системам. Нами была решена задача о фазовой диаграмме в спин-поляризованном Ферми-газе с двумя компонентами для спинов "вверх" и "вниз" в случае притягательного взаимодействия на хаббардовских цепочках и лестницах с двумя и тремя ногами.

Результаты показывают значительное отличие хаббардовских цепочек с локальным притяжением на узле от лестниц с двумя и тремя ногами. При этом для двуногих и трехногих лестниц фазовая диаграмма (также, как и для лестниц с большим числом ног) содержит фазы сбалансированного Ферми-газа (ED) с локальными парами на узле и равным числом частиц для спинов "вверх" и "вниз" $n_\uparrow = n_\downarrow$, частично поляризованного Ферми-газа, для которого $n_\uparrow > n_\downarrow$ (PP), и полностью (100 %) поляризованного Ферми-газа (FP), для которого $n_\uparrow = n$ и $n_\downarrow = 0$. Проведен анализ лестничных систем на устойчивость. Построение фазовой диаграммы осуществлялось в удобных осях химического. потенциала μ и магнитного поля $h = n_\uparrow - n_\downarrow$.

Отметим, что в одномерных системах точное решение методом анзатца Бете подтверждает существование алгебраического порядка БКШ-типа в фазе с равными плотностями, в то время как частично поляризованная фаза является кандидатом для экспериментального наблюдения неоднородной сверхтекучести в фазе с параметром порядка типа Фулде–Ферреля–Ларкина–Овчинникова [9, 10], где сверхпроводящие корреляции убывают алгебраически в реальном пространстве и модулированы с характерной длиной, определяемой разницей импульсов Ферми для компонент "вверх" и "вниз".

Построение фазовой диаграммы для лестничных систем проводилось на основе модели Хаббарда с притяжением для изотропного случая, отвечающего одинаковым значениям $t_\perp = t_{||}$ для перескоков на ближайшие узлы вдоль и поперек цепочек (вдоль "ног" и вдоль поперечных ступенек). При этом анализировались как пределы сильной связи $|U| > W$, так и слабой связи по отношению абсолютной величины взаимодействия к ширине одномерной зоны $|U| < W = 4t$.

Максимальное значение $|U|/t$, исследованное нами, равнялось 7. Вычисления проводились методами точной диагонализации DMRG (*density matrix renormalization group*) для энергии основного состояния системы при температуре $T = 0$. Потенциал конфайнмента ловушки учитывался по методу Томаса–Ферми с помощью замены магнитного поля h на $h - V(x)$ и фактически соответствовал вертикальному наклону линий границы фаз на фазовой диаграмме.

Некоторые аспекты фазовой диаграммы представляются нам достаточно интересными и важными, в частности, нетривиальные границы и немонотонные линии на фазовой диаграмме между фазами с частичной поляризацией и равными числами частиц в случае двуногих и трехногих лестниц. Этот эффект становится особенно интересен в окрестности мультикритической точки O на фазовой диаграмме.

Отрицательный наклон линии границы между этими двумя фазами $d\mu/dh < 0$ для хаббардовской цепочки иллюстрирует тот факт, что в одномерной системе частично поляризованная фаза соответствует центральной части облака газа, а фаза с равными плотностями спинов либо находится на периферии, либо отсутствует вовсе. В то же время для лестниц с двумя и тремя ногами наклон этой линии становится положительным $d\mu/dh > 0$, и теперь уже спин-поляризованная фаза находится на периферии ловушки как в экспериментах Кеттерле [38], в то время как фаза с равными плотностями спинов находится в центре ловушки.

На рисунке 3 изображена фазовая диаграмма модели Хаббарда с притяжением для лестниц с различным числом связанных цепочек (“ног” w): (a) – с одной ногой $w = 1$; (b) – двумя ногами $w = 2$; (c) – тремя ногами $w = 3$, – для значений хаббардовского притяжения на узле $U = -7t$. Мы показываем только ту часть фазовой диаграммы, для которой $\mu < U/2$, $h > 0$, поскольку ее другая часть $h < 0$, симметрична относительно замены $h \to -h$, и аналогично часть фазовой диаграммы, где $\mu > U/2$ симметрична показанной части фазовой диаграммы с $\mu < U/2$ благодаря симметрии между частицами и дырками. Сплошные линии – результат численных расчетов. Длина каждой из ног лестницы $L = 40$ [8].

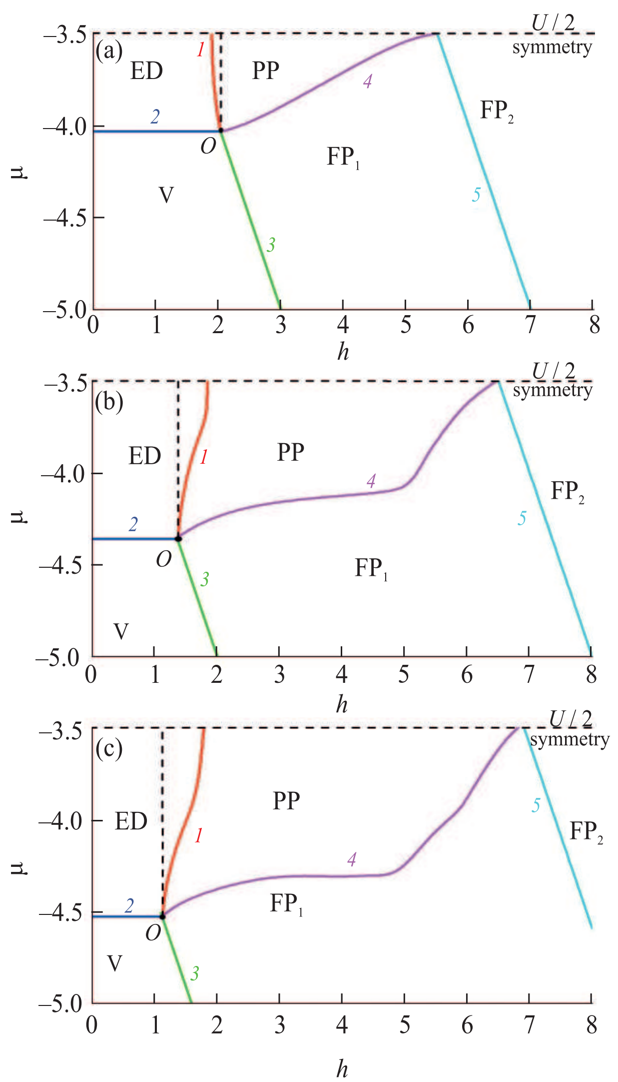

Рис. 3. (Цветной онлайн) Глобальная фазовая диаграмма модели Хаббарда с притяжением для лестниц с различным числом “ног” w: (a) – с одной ногой $w = 1$; (b) – двумя ногами $w = 2$; (c) – тремя ногами $w = 3$, - для значений хаббардовского притяжения на узле $U = -7t$. Мы показываем только ту часть фазовой диаграммы, для которой $\mu < U/2$, $h > 0$, поскольку ее другая часть $h < 0$, симметрична относительно замены $h \to -h$, и аналогично часть фазовой диаграммы, где $\mu > U/2$ симметрична показанной части фазовой диаграммы с $\mu < U/2$ благодаря симметрии между частицами и дырками. Сплошные линии – результат численных расчетов. Длина каждой из хаббардовских цепочек (ног лестницы) $L = 40$ [8]. ED – equal density phase (фаза с равными плотностями спинов вверх и вниз $n_\uparrow = n_\downarrow$); PP – partially polarized phase (частично поляризованная фаза с плотностями $n_\uparrow > n_\downarrow$); FP – fully polarized phase (полностью поляризованная фаза $n_\downarrow = 0$

IV. Задачи разлета и коллапса квантовых газов. В работах [11–13] нами исследована задача о расширении классических и квантовых газов в вакуум на основе симметрийного подхода. Для квантовых газов в приближении Гросса–Питаевского [14, 15] дополнительные симметрии возникают для газов с химическим потенциалом μ, зависящим от плотности n степенным образом с показателем $\nu = 2/D$, где D – размерность пространства. Для газовых конденсатов бозе-атомов при температурах $T \to 0$ эта симметрия возникает для двумерных систем. При $D = 3$ и, соответственно, $\nu = 2/3$ такая ситуация реализуется для сильно взаимодействующего Ферми-газа при низких температурах в унитарном пределе [14]. Эта же симметрия для классических газов в трехмерной геометрии возникает для одноатомных газов с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Оба эти факта были обнаружены в 1971 г. независимо Талановым [16] для двумерного нелинейного уравнения Шредингера (совпадающего с уравнением Гросса–Питаевского [14, 15]), описывающего стационарную самофокусировку света в средах с керровской нелинейностью, а для классических газов – Анисмовым и Лысиковым [17]. В квазиклассическом пределе уравнение Гросса–Питаевского совпадает с уравнениями гидродинамики идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1 + 2/D$.

Автомодельные решения в этом приближении описывают на фоне расширяющегося газа угловые деформации газового облака в рамках уравнений типа Ермакова [18]. Такого рода изменения формы расширяющегося облака наблюдаются в многочисленных экспериментах как при разлете газа после воздействия мощного лазерного излучения, например, на металл, так и при разлете квантовых газов в вакуум.

В экспериментах [19] наблюдалось автомодельное расширение сильно взаимодействующего Ферми-газа из ловушки сигарообразной формы. На рисунке 4, взятом из [19], представлены изображения расширяющегося Ферми-газа.

В начальный момент времени газовое облако имело форму сильно вытянутого эллипсоида в виде сигары (время $t = 100$ мкс), затем при $t = 600$ мкс почти сферическую форму и на конечной стадии облако имело форму диска. Общее время наблюдения было 2000 мкс, которое можно взять в качестве полупериода (или меньше) для угловых осцилляций формы газового облака, $t \leq t_{\rm osc}/2$. Все эти стадии качественно отвечают автомодельному решению. При этом результаты измерений среднего размера как функции времени для разных значений обратного газового параметра $1/(a_s k_F)$ с хорошей точностью представляют собой параболические зависимости, в полном соответствии с соотношением для среднего квадрата радиуса R^2 облака, следующим из теоремы вириала [20]:

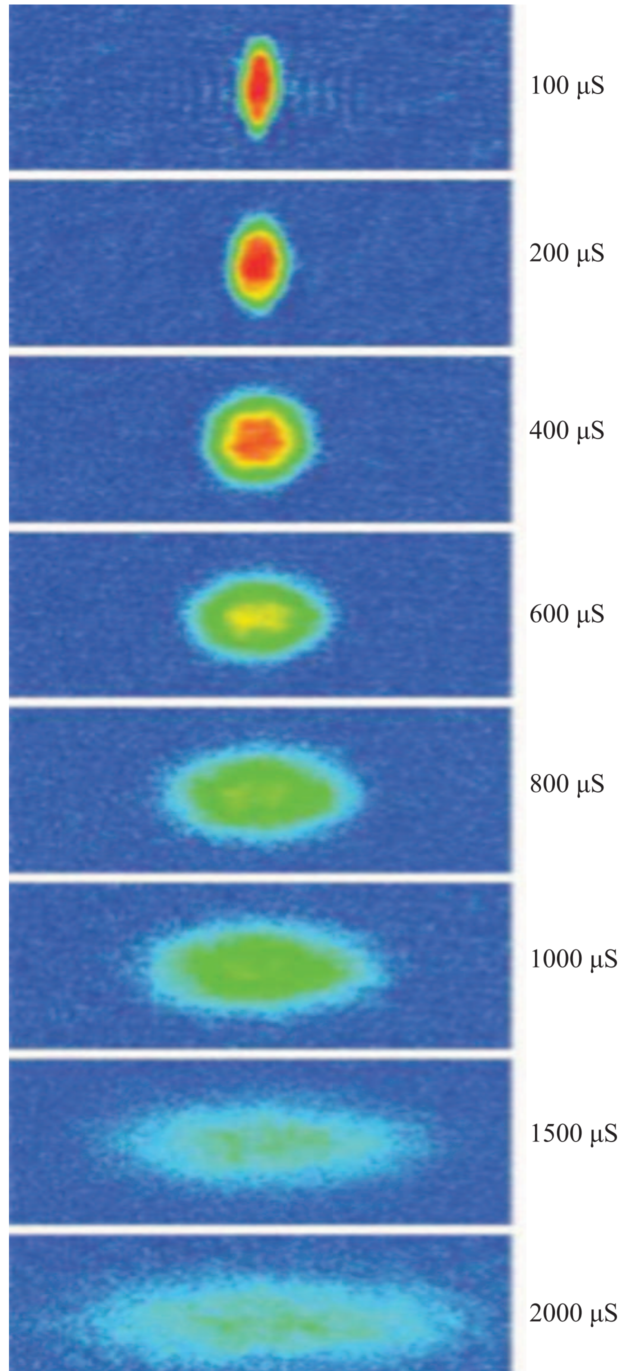

Рис. 4. (Цветной онлайн) Изображения расширяющегося сильно-взаимодействующего Ферми-газа во времени (в мкс). Начальная форма в виде сигары [19]. Далее, сферическая форма и плоская цилиндрически-симметричная форма в виде блина

$$2mN\frac{d^2(R^2)}{dt^2} = 4E.$$

Здесь $2m$ – удвоенная за счет куперовского спаривания масса Ферми-атомов, N – полное число частиц,

E – полная энергия. Интегрирование этого соотношения дает

$$2mNR^2 = 2m\int r^2 n d\mathbf{r} = 2mNR^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2, \tag{1}$$

где плотность $n = |\Psi|^2$, Ψ – волновая функция конденсата, C_1, C_2 – два дополнительных интеграла движения. Отсюда следует, что асимптотически при больших t средний размер облака квантового газа, расширяющегося в вакуум, растет линейно со временем, т.е. имеет место выход на баллистический режим.

Как показано в работах [11–13], уравнение Гросса–Питаевского при степенной зависимости μ от плотности n с показателем $\nu = 2/D$ в квазиклассическом приближении допускает точные трехмерные автомодельные решения, описывающие анизотропный разлет газа в вакуум. В безразмерных переменных плотность через автомодельные переменные $\xi_i = x_i/a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ задается в виде

$$n = \frac{1}{a_x a_y a_z} f(\xi),$$

где три скейлинговых параметра a_i являются функциями времени t. При этом $f(\xi)$ оказывается сферически- симметричной функцией, зависящей только от модуля $|\xi|$ и положительной константы λ, определяемой из начальных условий:

$$f(\xi) = \left[1 - \frac{3\lambda}{10}\xi^2\right]^{3/2},$$

и обращается в нуль при $|\xi| > \sqrt{\frac{10}{3\lambda}}$.

Поведение скейлинговых параметров от времени определяется из решений уравнений Ньютона

$$\ddot{a}_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i},\ U(a) = \frac{3\lambda}{2\left(a_x a_y a_z\right)^{2/3}}. \tag{2}$$

Эти уравнения относятся к так называемым системам ермаковского типа [18] и интегрируются благодаря сохранению энергии

$$E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2 + U(a). \tag{3}$$

и соотношению (1), где $R^2 = 3a^2$ и потенциал

$$U(a) = 3\lambda/2a^2. \tag{4}$$

В сферически-симметричном случае, когда энергия зависит от модуля $|\mathbf{a}| = a$, решение тривиально находится. Размер облака r при $t \to \infty$ растет линейно, соответственно скорость разлета на больших временах стремится к постоянной величине (баллистический режим), в размерных переменных равной:

$$v_\infty = \sqrt{E/mN}.$$

Необходимо отметить, что в случае коллапса [21–23] выражение для квадрата радиуса облака, следующего из вириальной теоремы, обращается в нуль в некоторый момент времени $t = t_0$ (достаточным условием этого является отрицательность H). Отсюда немедленно следует, что при приближении к $t = t_0$ размер облака

$$R \propto (t_0 - t)^{1/2},$$

что отвечает режиму слабого автомодельного коллапса (см. [21, 22]).

Для анализа деформаций формы облака на фоне расширяющегося газа (рис. 4) необходимо в (3) перейти к сферическим координатам: модулю a и сферическим углам φ и ϕ. Благодаря теореме вириала (1), движение по радиусу отщепляется, а угловая динамика определяется эффективным потенциалом:

$$U = \frac{3\lambda}{2^{1/3}\left(\cos^2\phi \sin\phi \sin 2\varphi\right)^{2/3}} \cdot \frac{1}{3a^2}.$$

Минимум этого потенциала min $U = \frac{3\lambda}{2a^2}$ достигается при

$$\sin\phi = 1/\sqrt{3},\ \varphi = \pi/4, \tag{5}$$

соответствует сферически симметричному распределению в (4). Вторые производные от U по угловым переменным в точке минимума определяют главные частоты осцилляций. В автомодельном приближении они оказываются одинаковыми и равными:

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = 18\lambda.$$

В заключение данного раздела подчеркнем, что формирование больших бозонных капель (содержащих 5 и более частиц) в магнитных и оптических ловушках характерно для разбалансированных Ферми–Бозе смесей изотопов щелочных элементов Li-6 (фермионы)–Li-7 (бозоны) и K-40 (фермионы)–Rb-87 (бозоны), когда бозонная плотность больше фермионной: $n_B > n_F$ (см. [24]), а также в бозе-газах с резонансным притяжением между бозонами. Большие бозонные капли в случае сильного разбаланса между компонентами $n_B \gg n_F$ были экспериментально детектированы в Ферми–Бозе смеси K-40–Rb-87 с большим преобладанием бозонов в работах группы Модуно [25]. Исчезновение пороговым образом (по числу бозонов в ловушке) локального минимума в бозонной энергии и вследствие этого коллапс в бозонной подсистеме в разбалансированной Ферми–Бозе смеси с преобладанием бозонов, $N_B > N_F$, притяжением между фермионами и бозонами была подробно проанализирована в теоретических работах [26, 27].

В сбалансированной Ферми–Бозе смеси с равными плотностями компонент $n_B = n_F$ возможно также образование составных фермионов $f_\sigma b$ и четверок $f_\uparrow b f_\downarrow b$ из двух фермионов с противоположными проекциями спина и двух бозонов [28, 29] и [30, 31]. Большие бозонные капли также были экспериментально обнаружены в бозе-газе Dy-164 с сильным диполь–дипольным притяжением [32].

V. Длинноволновые осцилляции заряда в MgB_2. Акустические плазмоны. Неоднородные состояния в плазмонных системах. Поставлена и качественно решена задача об эффективном экранированном кулоновском взаимодействии в слоистом металле MgB_2 со спектром акустического плазмона $\omega_{ac}^2 = B\sin^2(q_z d)$ в направлении z перпендикулярном слоям (см. рис. 5 и [33]). Как хорошо видно из рис. 5, спектр практически линеен в окрестностях точек $q_z d \to n\pi$, где $n = 0, 1, ...$; d – межплоскостное расстояние.

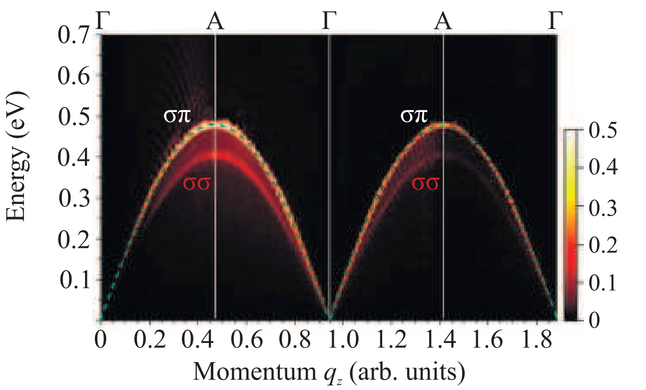

Рис. 5. (Цветной онлайн) Спектр акустического плазмона $\omega_{\sigma\pi}^2 = B\sin^2(q_z d)$ в слоистом металле MgB_2 в направлении z, перпендикулярном базальной плоскости [33]. Спектр практически линеен в окрестностях точек $q_z d \to n\pi$, где $n = 0, 1, ...$; d – межплоскостное расстояние

В этом случае эффективное взаимодействие в импульсном пространстве имеет особенность на малых частотах в резонансе с частотой акустического плазмона и конечных волновых векторах $q_z = (Q = \pi/d)$ равных вектору "нестинга" Q. В импульсном пространстве эта особенность имеет вид $V_{\text{eff}} \propto 1/|q_z - Q|$.

Если мы аккуратно перейдем в координатное пространство, то увидим, что возникает сингулярная (осциллирующая) часть эффективного взаимодействия в реальном пространстве, спадающая степенным образом по закону $\cos(Qz)/(Qz)^2$. Такой квадратичный характер спадания напоминает фриделевские осцилляции при экранировке заряда в 2D металле [34].

Интересной задачей на будущее является задача о возможности бозе–эйнштейновской конденсации и сверхтекучести в слабо-неидеальных боголюбовских газах акустических плазмонов при отталкивательном характере потенциала плазмон–плазмонного взаимодействия и задача об их коллапсе в реальном пространстве при притягательном знаке этих взаимодействий.

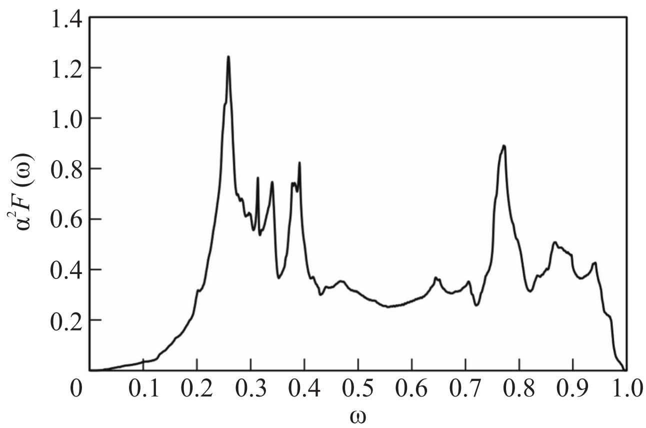

Рис. 6. Фононная функция Элиашберга для фазы $I4_1$/amd металлического водорода под давлением 500 ГПа [38]

VI. Сверхпроводимость и формирование капель в металлическом водороде и гидридах металлов. Сверхпроводимость в однородных фазах металлического водорода и металло-гидридов мы рассчитывали в рамках модифицированной нами схемы интегральных уравнений Элиашберга на мнимой оси с учетом поправок на химический потенциал [5, 35]. Отметим, что численные методы решения системы уравнений Элиашберга также ранее разрабатывались в [36–40]. На рисунке 6 приведена функция Элиашберга фононного спектра для одной из фаз металлического водорода под давлением.

Зависимость параметра порядка от температуры показана на рис. 7. Хотя для этой фазы металлического водорода разница между результатами, полученными с поправкой на химический потенциал электронов [5, 35] и ранее без нее [38], невелика, для других веществ она может быть весьма существенной. Однако следует отметить, что учет поправки на химический потенциал электронов приводит к резкому

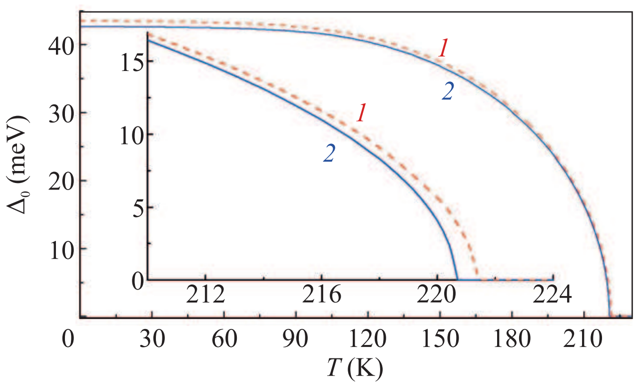

Рис. 7. (Цветной онлайн) Зависимость параметра порядка от температуры $\Delta(T)$ для фазы $I4_1/amd$ металлического водорода при давлении 500 ГПа (*1* – расчеты с поправкой на химический потенциал электронов, *2* – без поправки [35]). На вставке показан увеличенный фрагмент графика вблизи температуры сверхпроводящего перехода

(в нашем случае на 2 порядка) увеличению времени расчета.

Аналогичные результаты для других соединений на основе водорода при высоких давлениях получены в работе [41]. Для всех веществ, для которых в этой работе приведены функции Элиашберга, мы рассчитывали T_c двумя методами (см. табл. 1): с использованием алгоритма Аллена–Дайнса [42—44] (столбец "A-D-1") и методом решения уравнений Элиашберга вида [5, 35] (столбец "El-1"). Значения T_c, полученные в [41] с использованием модифицированного уравнения Макмиллана [42] в приближении Аллена–Дайнса и путем решения уравнений Элиашберга, также приведены в таблице (столбцы "A-D-2" и "El-2").

Таблица 1. Температуры сверхпроводящего перехода некоторых гидридов при высоких давлениях

Вещество	P (ГПа)	T_C (K)			
		A-D-1	A-D-2	El-1	El-2
$LaBeH_8$	50	194	167	192	191
$LaBH_8$	70	160	144	159	160
$LaAlH_8$	100	145	130	145	144
$CaBeH_8$	210	307	254	303	302
$CaBH_8$	100	241	212	239	238
$YBeH_8$	100	250	215	248	249
$SrBH_8$	150	206	163	204	200

Как видно из табл. 1, во-первых, результаты наших расчетов и авторов работы [41] в основном совпадают с точностью до 1 К (расхождение, очевидно, связано с ошибкой оцифровки графиков функций Элиашберга, приведенных в статье). Во-вторых, расчеты по алгоритму Аллена–Дайнса в данном случае дают очень хорошее приближение к температуре сверхпроводящего перехода (для большинства материалов не хуже 2 К). Наоборот, использование модифицированного уравнения Макмиллана в приближении Аллена–Дайнса дает занижение T_c на несколько десятков градусов.

Образование металлических капель вблизи границы фазового перехода первого рода между металлическим и молекулярным водородом. В качестве естественного обобщения результатов, представленных в работе, мы планируем расширить нашу модель для уравнений Элиашберга, чтобы учесть влияние примесей, многозонный характер исследуемых соединений [3, 5, 35], а также возможность образования неоднородных состояний (образование капель), возникающих при приближении к фазовому переходу первого рода между жидким и кристаллическим металлическим водородом.

Мы планируем учесть также возможность образования в системе двух бозе-конденсатов, первый из которых представляет собой бозе-конденсат куперовских пар в электронной подсистеме, а второй – бипротонный бозе-конденсат в ионной компоненте (подобно ситуации в нейтронных звездах). Качественные соображения о возможности сосуществования двух бозе-конденсатов куперовских пар и бипротонов в низкоразмерных фазах металлического водорода (таких как планарная и нитевидная фаза [24, 45] были сформулированы нами в [46, 47].

Рассмотрим теперь возможность образования капель в металлическом водороде. На рисунке 8 приведена $T-P$ фазовая диаграмма молекулярного и атомарного металлического водорода при высоких давлениях. Фазовая диаграмма содержит 4 фазы молекулярного и металлического водорода, а именно 2 фазы твердого (кристаллического) молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и низких температурах и две фазы жидкого молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и высоких температурах [48].

При этом фазовый переход из кристаллической в жидкую фазу как для атомарного металлического водорода, так и для молекулярного (диэлектрического) водорода является фазовым переходом первого рода, для которого характерно образование неоднородных капельных структур. Отметим, что образование жидких капель и маленьких "льдинок" вокруг положительных и отрицательных ионов хорошо известно в физике жидкого и твердого гелия [49]. Аналогично, можно ожидать формирование капель металлического водорода в диэлектрической матрице

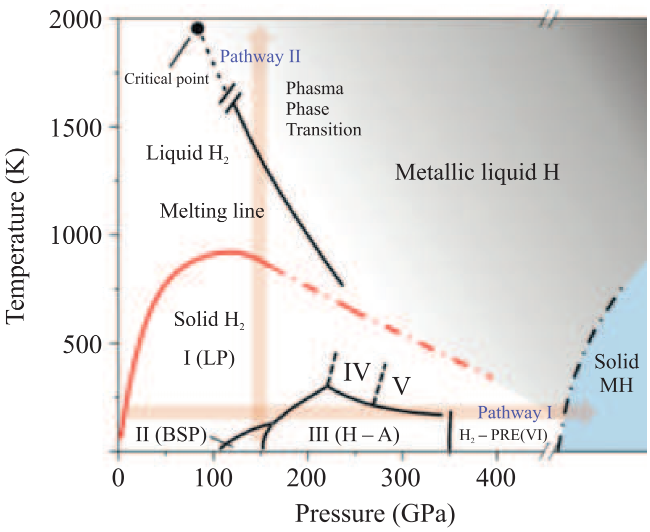

Рис. 8. (Цветной онлайн) $T - P$ фазовая диаграмма молекулярного и атомарного металлического водорода при высоких давлениях. Фазовая диаграмма вблизи фазовой границы между молекулярным и металлическим водородом содержит 4 существенные для нас фазы, а именно 2 фазы твердого (кристаллического) молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и низких температурах и две фазы жидкого молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и высоких температурах [48]

молекулярного водорода. Экспериментальным подтверждением этой идеи являются эксперименты с ударными волнами [50] для дейтериевых систем.

VII. Коллапс резонанса Фано в кольце Ааронова–Бома [51] с топологическим сверхпроводящим мостиком как тест на не-локальность майорановских мод. Идеи пространственно-разделенных Ферми и Бозе систем и нетривиальной сверхпроводимости, наведенной в них, могут быть реализованы и в ограниченной геометрии микроконтакта с 2 или 4 квантовыми точками [52–54].

В геометрии ромба, показанной на рис. 9 с 4 квантовыми точками, два фермиевских рукава (фактически, две эффективные фермиевские зоны) которого, описываемые туннельными гамильтонианами для фермиевских квазичастиц, соединены сверхпроводящим мостиком, содержащим парные бозонные состояния [55–57]. При этом в сверхпроводящем мостике может наводиться топологически нетривиальная сверхпроводимость [55].

В этом контексте совместно с С. В. Аксеновым [57] в 2020 г. решена задача о коллапсе узкого резонанса Фано [58] в кондактансе системы вследствие нелокальности майорановского состояния [59]. Подчерк-

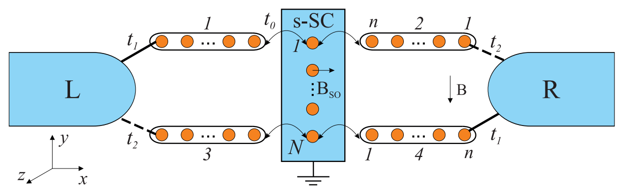

Рис. 9. (Цветной онлайн) Кольцо Ааронова–Бома [51] со сверхпроводящим мостиком в топологически нетривиальном состоянии с асимметрией туннельных параметров между рукавами кольца и контактами. Кольцо Ааронова–Бома используется в качестве интерференционного устройства для наблюдения резонансов Фано [58]

нем, что одна из главных особенностей майорановских состояний, привлекающая большой интерес к этим возбуждениям в твердотельных системах, заключается в их нелокальном характере.

В [57] нами рассмотрено интерференционное устройство в виде асимметричного кольца Ааронова–Бома, рукава которого соединены поперечным мостиком в виде одномерного топологического сверхпроводника. Асимметричность устройства заключается в неодинаковости параметров туннелирования t_1 и t_2 между контактами и двумя рукавами кольца.

Показано, что в отличие от рассмотренной нами в [56] симметричной геометрии, в кондактансе асимметричного устройства возникают новые резонансы Фано. Обнаружено, что их ширина прямо пропорциональна величине нелокального состояния сверхпроводника с минимальной энергией, равной энергии связи пары краевых майорановских возбуждений.

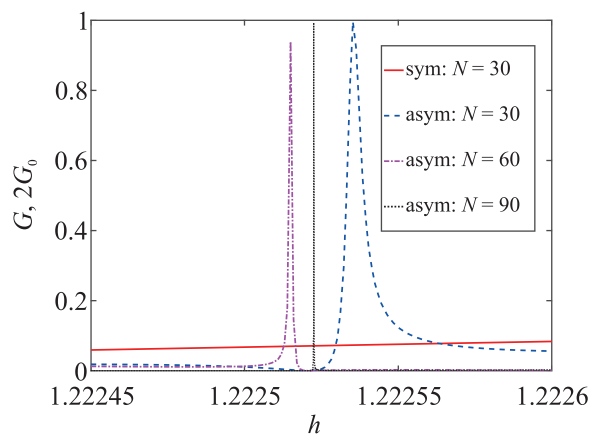

Рис. 10. (Цветной онлайн) Коллапс узкого резонанса Фано с увеличением степени нелокальности майорановских мод в сверхпроводящем мостике

Другими словами, можно сказать, что чем сильнее плотность вероятности концентрируется на краях, тем уже резонанс Фано. В результате, в предельном случае двух невзаимодействующих майорановских фермионов (очень большой длины топологического сверхпроводящего мостика) данная особенность кондактанса исчезает (см. рис. 10).

Это утверждение может быть проиллюстрировано в рамках бесспиновой модели кольца [57], в роли мостика для которой используется майорановская цепочка Китаева [60] с четным числом узлов. При этом показано, что обнаруженный эффект связан с увеличением кратности вырождения структуры с нулевой энергией в особой точке модели Китаева и уменьшением перекрытия волновых функций майорановских фермионов при увеличении числа узлов (фактически длины) цепочки, что и приводит к коллапсу узкого резонанса Фано.

Дополнительное рассмотрение частного случая интерферометра, включающего только его половину (например, когда сверхпроводящий мостик на рис. 9 связан только с левыми проволоками), показало, что перекрытие майорановских волновых функций, образующих бологюбовское возбуждение с нулевой энергией, приводит к удвоению периода осцилляций Ааронова-Бома [61].

IX. Заключение. В обзоре в рамках пространственно-разделенной Ферми–Бозе смеси мы описали ряд сверхпроводящих и сверхтекучих систем, в которых возможно формирование капель или кластеров параметра порядка в матрицах нормальных неспаренных состояний. Эти системы включают в себя сверхпроводящие оксиды висмута BaKBiO, разбалансированные Ферми-газы и Ферми–Бозе смеси в магнитных ловушках, двумерные системы с малой электронной плотностью, описываемые 2D моделью Хаббарда с сильным локальным притяжением на узле и сильным диагональным беспорядком. Образование капель также характерно для коллапсирующих экситонных [62] и плазмонных систем с притягательным знаком экситон–экситонного и плазмон–плазмонного взаимодействия, а также для металлического водорода в экспериментах с ударными волнами вблизи границы фазового перехода первого рода между жидкой и кристаллической фазами. Полученные в обзоре результаты могут быть полезны для приложений в сверхпроводящей наноэлектронике и реализации сверхпроводящих кубитов в гранулированных средах.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку в рамках гранта # 20-02-00015.

М. Ю. Каган благодарен программе поддержки фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

1. A. P. Menushenkov, K. V. Klementev, A. V. Kuznetsov, and M. Yu. Kagan, ЖЭТФ **120**, 700 (2001).
2. A. P. Menushenkov, A. V. Kuznetsov, K. V. Klementiev, and M. Yu. Kagan, J. Supercond. Nov. Magn. **29**, 701 (2016).
3. M. Yu. Kagan, K. I. Kugel, and A. L. Rakhmanov, Phys. Rep. **916**, 1 (2021).
4. М. Ю. Каган, Е. А. Мазур, ЖЭТФ **159**, 696 (2021).
5. E. A. Mazur, R. Sh. Ikhsanov, and M. Yu. Kagan, J. Phys. Conf. Ser. **2036**, 012019 (2021).
6. Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **97**, 030401 (2006).
7. W. Ong, C. Cheng, I. Arakelyan, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **114**, 110403 (2015).
8. E. A. Burovski, R. Sh. Ikhsanov, A. A. Kuznetsov, and M. Yu. Kagan, J. Phys. Conf. Ser. **1163**, 012046 (2019).
9. P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. Rev. A **135**, 550 (1964).
10. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
11. E. A. Kuznetsov, M. Yu. Kagan, and A. V. Turlapov, Phys. Rev. A **101**, 041612 (2020).
12. Е. А. Кузнецов, М. Ю. Каган, ТМФ **202**, 458 (2020).
13. Е. А. Кузнецов, М. Ю. Каган, ЖЭТФ **159**, 794 (2021).
14. Л. П. Питаевский, УФН **178**, 633 (2008).
15. E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
16. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1971).
17. С. И. Анисимов, Ю. И. Лысиков, ПММ **34**, 926 (1970).
18. В. П. Ермаков, *Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Из лекций по интегрированию дифференциальных уравнений* Универ. тип., Киев (1880).
19. K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Science **298**, 2179 (2002).
20. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов. Радиофизика **14**, 1353 (1971).
21. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).
22. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
23. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
24. Е. Г. Бровман, Ю. Каган, А. Холас, В. В. Пушкарев, Письма в ЖЭТФ **18**, 269 (1973).
25. G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino, R. J. Brecha, and M. Inguscio, Science **297**, 2240 (2002).
26. S. T. Chui and V. N. Ryzhov, Phys. Rev. A **69**, 043607 (2004).
27. S. T. Chui, V. N. Ryzhov, and E. E. Tareyeva, Письма в ЖЭТФ **80**, 305 (2004).
28. M. Yu. Kagan, I. V. Brodsky, D. V. Efremov, and A. V. Klaptsov, Phys. Rev. A **70**, 023407 (2004).

29. М. Ю. Каган, А. В. Клапцов, И. В. Бродский, R. Combescot, X. Leyronas, УФН **176**, 1105 (2006).
30. A. V. Turlapov and M. Yu. Kagan, J. Phys. Condens. Matter **29**, 383004 (2019).
31. М. Ю. Каган, А. В. Турлапов, УФН **189**, 225 (2019).
32. I. F. Barbur, H. Kadan, F. Schmit, M. Wenzel, and T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **116**, 215301 (2016).
33. V. M. Silkin, A. Balassis, P. M. Eschenique, and E. V. Chulkov, Phys. Rev. B **80**, 054521 (2009).
34. М. Ю. Каган, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, УФН **185**, 785 (2015).
35. Р. Ш. Ихсанов, Е. А. Мазур, М. Ю. Каган, Изв. Уфимского научного центра РАН **1**, 49 (2023).
36. R. Szczesniak, Acta Phys. Pol. A **109**, 179 (2006).
37. A. P. Durajski, Sci. Rep. **6**, 38570 (2016).
38. Н. А. Кудряшов, А. А. Кутуков, Е. А. Мазур, Письма в ЖЭТФ **104**, 488 (2016).
39. I. A. Kruglov, D. V. Semenok, H. Song, R. Szcześniak, I. A. Wrona, R. Akashi, E. M. M. Davari, D. Duan, C. Tian, A. G. Kvashnin, and A. R. Oganov, Phys. Rev. B **101**, 024508 (2020).
40. O. V. Dolgov, R. K. Kremer, J. Kortus, A. A. Golubov, and S. V. Shulga, Phys. Rev. B **72**, 024504 (2005).
41. Z. Zhang, T. Cui, M. J. Hutcheon, A. M. Shipley, H. Song, M. Du, V. Z. Kresin, D. Duan, C. J. Pickard, and Y. Yao, Phys. Rev. Lett. **128**, 047001 (2022).
42. P. B. Allen and R. C. A. Dynes, Phys. Rev. B **12**, 905 (1975).
43. F. Marsiglio and J. P. Carbotte, in *Superconductivity. Conventional and Unconventional Superconductors*, Springer: Berlin (2008), v. 1, p. 73.
44. J. P. Carbotte, Rev. Mod. Phys **62**, 1027 (1990).
45. Е. Г. Бровман, Ю. Каган, А. Холас, ЖЭТФ **61**, 2429 (1972).
46. M. Yu. Kagan, Письма в ЖЭТФ **103**, 822 (2016).
47. M. Yu. Kagan and A. Bianconi, Condens. Matter **4**, 51 (2019).
48. M. Houtput, J. Tempere, and I. F. Silvera, Phys. Rev. B **100**, 134106 (2019).
49. И. М. Халатников, *Введение в теорию сверхтекучести*, Наука, М. (1965).
50. M. D. Knudson, M. P. Desjarlais, A. Becker, R. W. Lemke, K. R. Cochrane, M. E. Savage, D. E. Bliss, T. R. Mattsson, and R. Redmer, Science **348**, 1455 (2015).
51. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
52. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, and S. V. Aksenov, Phys. Rev. B **95**, 035411 (2017).
53. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, and S. V. Aksenov, JMMM **440**, 15 (2017).
54. М. Ю. Каган, С. В. Аксенов, Письма в ЖЭТФ **107**, 512 (2018).
55. В. В. Вальков, М. С. Шустин, С. В. Аксенов, А. О. Злотников, А. Д. Федосеев, В. А. Мицкан, М. Ю. Каган, УФН **192**, 3 (2022).
56. S. V. Aksenov, M. Yu. Kagan, and V. V. Val'kov, J. Phys. Condens. Matt **31**, 225301 (2019).
57. С. В. Аксенов, М. Ю. Каган, Письма в ЖЭТФ **111**, 391 (2020).
58. U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
59. E. Majorana, Nuovo Cimento **5**, 171 (1937).
60. A. Yu. Kitaev, УФН **171**, прил. к **10**, 131 (2001).
61. S. V. Aksenov, J. Phys. Condens. Matter **34**, 255301 (2022).
62. Л. В. Келдыш, УФН **187**, 1273 (2017).