Письма в ЖЭТФ, том 118, вып. 2, с. 131 – 134

pq-дуальность: набор примеров

З. Закирова[+*1)], *В. Лунев*[+1)], *Н. Белобородов*[+1)]

[+]*Казанский государственный энергетический университет, 420066 Казань, Россия*

[*]*Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2023 г.
После переработки 22 июня 2023 г.
Принята к публикации 22 июня 2023 г.

Мы детально рассматриваем ряд двухчастичных примеров pq-дуальности Руджентарса и строим дуальные гамильтонианы. Специальный интерес представляет модель синус-Гордона.

DOI: 10.31857/S1234567823140112, EDN: gzqwce

1. Введение. Понятие pq-дуальности было введено С. Рудженеарсом [1] при описании многочастичных систем семейства Калоджеро–Рудженеарса. Позднее эта дуальность применялась в теории Зайберга–Виттена для построения дважды эллиптических систем, описывающих низкоэнергетический предел шестимерной суперсимметричной калибровочной теории, содержащей материю в присоединенном представлении [2, 3]. На самом деле, дважды эллиптические системы были построены только в простейшем случае систем с одной степенью свободы, а вопрос построения N-частничных систем до сих пор остается открытым.

Позднее в [4] был сформулирован более общий подход к pq-дуальности, который позволяет работать с ней как с любой интегрируемой N-частичной системой. Однако до настоящего момента имеется только очень ограниченный набор примеров дуальных систем. В этом письме мы расширим этот набор. Начав в качестве разминки с хорошо известного примера тригонометрической системы Рудженеарса, где дуальность, собственно, и была впервые обнаружена С. Рудженеарсом [1] (хотя и совершенно другим способом), мы далее изучим случай двухчастичной цепочки Тоды, как непериодической (система Лиувилля), так и периодической (система синус-Гордона). Этот последний случай особо интересен, поскольку мы до сих пор не знаем гамильтонианы систем, дуальных эллиптическим системам Калоджеро и Рудженеарса, а периодическая система Тоды обладает скрытой эллиптичностью и получается из эллиптической системы Калоджеро в иноземцевском пределе [5]. Эта скрытая эллиптичность проявляет себя в дуальном тодовском гамильтониане, который задается эллиптической функцией Якоби, причем эллиптический модуль зависит от координат системы. Поскольку периодическая система Тоды проще, чем эллиптическая модель Калоджеро, вероятно, в этом случае будет проще получить дуальные гамильтонианы и с числом частиц $N > 2$.

Подчеркнем, что построение N-частичных дважды эллиптических систем является совершенно нетривиальной задачей. Конечно, можно построить систему, в которой как импульсы, так и координаты будут лежать на торе, однако дважды эллиптическая система, по определению [2], самодуальна – и самодуальность является тем самым крайне нетривиальным свойством. Как пример, можно указать двухчастичную систему, предложенную Х. Браденом и Т. Холловудом [6], которая была позднее обобщена на N-частичную систему П. Коротеевым и Ш. Шакировым [7]. Эта система эллиптична как по импульсам, так и по координатам, но не самодуальна. Более того, как было показано в [8], эта система (на квантовом уровне) не отвечает правильному преобразованию дуальности даже в случае, когда одна из эллиптичностей вырождена: для получения правильного дуального гамильтониана требуется проделать некоторое дополнительное преобразование. Это не должно вызывать удивление – гамильтониан даже двухчастичной самодуальной системы [2] гораздо сложнее гамильтониана, предложенного в [6, 7].

В данной заметке мы рассматриваем только случай классической дуальности, хотя квантовая pq-дуальность даже естественнее, и, возможно, лучше начинать с квантового случая, переходя к классической pq-дуальности в квазиклассическом пределе. Тем не менее, классический случай сам по себе также преставляет ценность.

[1)]e-mail: zolya_zakirova@mail.ru;
vladislavlunev138@gmail.com; nichegoloch567@gmail.com

2. Преобразование дуальности в системах с одной степенью свободы. Мы начнем с объяснения того, что такое pq-дуальность. Дуальность, по определению, это отображение из набора гамильтонианов $H_i(p,q|g)$, где g – константа связи, в набор дуальных гамильтонианов $H_i^D(p,q|g)$ заданный следующим антиканоническим преобразованием переменных $\{p_i,q_i\} \to \{P_i,Q_i\}$:

$$\begin{cases} H_i(p_i,q_i|g) &= H_i^{(0)}(Q_i) \\ \\ \sum_i dp_i \wedge dq_i &= -\sum_i dP_i \wedge dQ_i \end{cases} \tag{1}$$

и мы рассматриваем интегрируемую систему со свойством $H_i(p,q;0) = H_i^{(0)}(p)$. Это определение означает, что гамильтонианы $H_i^{(0)}(Q_i)$ описывают свободную систему. В этом определении имеется произвол – например, можно добавить к P_i произвольные функции Q_i.

Тогда набор дуальных гамильтонианов определен как

$$H_i^D(P_i,Q_i|g) = H_i^{D,(0)}(q_i). \tag{2}$$

Не очень существенно, как выбрать $H_i^{D,(0)}$, поскольку функции гамильтонианов остаются гамильтонианами, однако их надо выбрать так, чтобы H_i^D были хорошо определенными (однозначными) функциями на симплектическом многобразии.

Если дуальные гамильтонианы могут быть выбраны совпадающими с первоначальными, система называется самодуальной. Требование *анти*каноничности преобразования $\{p_i,q_i\} \to \{P_i,Q_i\}$ возникает потому, что при $g=0$ гамильтониан свободной системы $H_i^{(0)}(p_i)$ равен $H_i^{(0)}(Q_i)$, т.е. $p_i = Q_i$. Можно, конечно, определить новую координату каноническим преобразованием, переставив Q_i и P_i, но тогда система Руджeнаарса перестает быть самодуальной.

В качестве простого примера рассмотрим гамильтониан (это называется рациональной моделью Калоджеро)

$$H(p,q;g) = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2q^2} \tag{3}$$

и

$$H_0(p) = \frac{p^2}{2}. \tag{4}$$

Введем теперь новые переменные P, Q такие, что

$$H(p,q;g) = H_0(Q). \tag{5}$$

Преобразование $(p,q) \longrightarrow (P,Q)$, по определению, антиканоническое. Поэтому имеется два условия на две новые переменные P и Q. На самом деле, антиканонической преобразование определено неоднозначно – к P можно добавить произвольную функцию Q.

В этих новых переменных можно ввести новый свободный гамильтониан H_0^D, зависящий только от q, и определить H^D, называемый дуальным гамильтонианом:

$$H^D(P,Q;g) := H_0^D(q). \tag{6}$$

К примеру, для гамильтониана (3) и уравнения (5), антиканоническое преобразование с простейшим выбором переменной P дает

$$Q^2 = p^2 + \frac{g}{q^2}, P^2 = q^2 - \frac{g}{Q^2}.$$

Действительно, скобка Пуассона

$$\{P,Q\} = \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} = \\ = -\frac{g^2}{(p^2q^2+g)^2} - \frac{p^2q^2q(2g+p^2q^2)}{(p^2q^2+g)^2} = -1, \tag{8}$$

как и должно быть для антиканонического преобразования. Выберем теперь $H_0^D(q) = \frac{q^2}{2}$ и заметим, что

$$H^D(P,Q) = \frac{P^2}{2} + \frac{g}{2Q^2} = H(P,Q). \tag{9}$$

Таким образом, у нас имеется самодуальный гамильтониан, и система самодуальна.

Простейший способ иметь дело с антиканоническим преобразованием – переписать его в виде

$$dP \wedge dQ = -dp \wedge dq. \tag{10}$$

Тогда из (5)

$$\frac{\partial H_0(Q)}{\partial Q}dQ = \frac{\partial H(p,q;g)}{\partial p}dp + \frac{\partial H(p,q;g)}{\partial q}dq \tag{11}$$

и из (6)

$$\frac{\partial H_0^D(q)}{\partial q}dq = \frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial P}dP + \frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial Q}dQ. \tag{12}$$

Умножая левую часть (11) на правую часть (12) и наоборот и используя, что $dQ \wedge dQ = dP \wedge dP = 0$, получим

$$\frac{\partial H_0(Q)}{\partial Q}\cdot\frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial P} = \frac{\partial H_0^D(q)}{\partial q}\cdot\frac{\partial H(p,q;g)}{\partial p}. \tag{13}$$

Это уравнение вместе с (5) и (6) дает три уравнения на три неизвестных переменных P, Q и $H^D(P,Q;q)$. Однако любое решение этих уравнений допускает добавление произвольной функции Q к P.

3. Тригонометрическая система Рудженаарса. В качестве менее тривиального примера рассмотрим двухчастичную гиперболическую систему Рудженаарса. С этого момента мы работаем в системе центра масс с взаимодействующими гамильтонианами, зависящими только от разностей координат. Поэтому в двухчастичном случае можно выбрать $p = p_1 = -p_2$ и $q = q_1 - q_2$, и гамильтониан системы Рудженаарса принимает вид

$$H = \frac{\sinh(q+g)}{\sinh q} e^p + \frac{\sinh(q-g)}{\sinh q} e^{-p},$$

$$H_0^D(q) = 2\cosh q. \tag{14}$$

В этом случае $H(p,q;0) = H_0(p) = e^p + e^{-p}$, тогда $H_0(Q) = e^Q + e^{-Q} = 2\cosh Q$. Из (5) получается

$$2\cosh Q = \frac{\sinh(q+g)}{\sinh q} e^p + \frac{\sinh(q-g)}{\sinh q} e^{-p}.$$

Напишем уравнение (13), учтя $H^D(P,Q;g) = 2\cosh q$:

$$\sinh Q \cdot \frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial P} = \sinh q \cdot \frac{\partial H(p,q;g)}{\partial p}. \tag{15}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 - H^2 = 4 \cdot \frac{\sinh(q+g)\sinh(q-g)}{\sinh^2 q}.$$

Тогда уравнение (15) принимает вид

$$\sinh Q \cdot \frac{\partial H^D}{\partial P} = \sqrt{H^2 \sinh^2 q - 4\sinh(q+g)\sinh(q-g)}$$

с ветвью квадратного корня, выбранной подходящим образом.

Это уравнение после преобразований переписывается как интеграл

$$\int^{H^D} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - k^2}} = P, \quad k^2 = 4 \cdot \frac{\sinh^2 Q - \sinh^2 g}{\sinh^2 Q}.$$

Производя интегрирование, находим

$$P = \ln |H^D + \sqrt{(H^D)^2 - k^2}|, \tag{16}$$

и можно добавлять произвольную функцию Q к P. Из (16) можно получить

$$2H^D = e^P + k^2 e^{-P}$$

и, переписывая k^2 как

$$k^2 = 4 \cdot \frac{\sinh(Q+g)\sinh(Q-g)}{\sinh^2 Q}$$

и делая сдвижку $P \to P + \ln \frac{2\sinh(Q+g)}{\sinh Q}$, окончательно получаем

$$H^D = \frac{\sinh(Q+g)}{\sinh Q} e^P + \frac{\sinh(Q-g)}{\sinh Q} e^{-P}. \tag{17}$$

Таким образом, формулы (14) и (17) воспроизводят знаменитый результат С. Рудженаарса [1], что гиперболическая система Рудженаарса самодуальна.

4. Непериодическая цепочка Тоды. Рассмотрим теперь новый пример дуальных систем – непериодическую цепочку Тоды, которая в двухчастичном случае задается гамильтонианом

$$H(p,q;g) = \frac{p^2}{2} + g e^q, \quad H_0^D(q) = e^q. \tag{18}$$

Когда $g = 0$, гамильтониан свободной системы $H(p,q;0) = H_0(p) = \frac{p^2}{2}$, т.е. $H_0(Q) = \frac{Q^2}{2}$. Тогда из (5)

$$Q^2 = p^2 + 2g e^q. \tag{19}$$

В соответствии с формулой (6), дуальный гамильтониан $H^D(P,Q;g) = e^q$, и из (13) получается

$$Q \cdot \frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial P} = p e^q$$

или

$$Q \cdot \frac{\partial H^D}{\partial P} = H^D \cdot \sqrt{Q^2 - 2gH^D}$$

опять с подходящим выбором ветви корня.

Интегрируя это уравнение с подходящим образом подобранной функцией Q, получаем

$$P = \ln \frac{Q - \sqrt{Q^2 - 2gH^D}}{Q + \sqrt{Q^2 - 2gH^D}}. \tag{20}$$

Следовательно, дуальный гамильтониан

$$H^D = \frac{Q^2}{2g\cosh^2(P/2)}. \tag{21}$$

Переменная P в терминах переменных p, q:

$$P = \ln \frac{\sqrt{p^2 + 2ge^q} - p}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} + p}. \tag{22}$$

Используя формулы (19), (22), можно проверить, что скобка Пуассона

$$\{P,Q\} = -\frac{2ge^q}{p^2 + 2ge^q} + \frac{gpe^q}{p^2 + 2ge^q} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} + p} - \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} + p}\right) =$$

$$= -\frac{2ge^q + p^2}{p^2 + 2ge^q} = -1.$$

5. Периодическая цепочка Тоды. Наконец, рассмотрим наиболее интересный пример периодической цепочки Тоды. Двухчастичный гамильтониан имеет вид

$$H(p,q;g)=\frac{p^2}{2}+g^2\cosh^2 q,\quad H_0^D(q)=\cosh q. \tag{23}$$

Следовательно, $H(p,q;0) = H_0(p) = \frac{p^2}{2}$, отсюда $H_0(Q)=\frac{Q^2}{2}$ и из (5)

$$Q^2=p^2+2g^2\cosh^2 q. \tag{24}$$

Уравнение (13) имеет вид

$$Q\cdot\frac{\partial H^D(P,Q;g)}{\partial P}=p\sinh q$$

или

$$Q\cdot\frac{\partial H^D}{\partial P}=\sqrt{Q^2-2g^2(H^D)^2}\cdot\sqrt{(H^D)^2-1}.$$

Здесь $\cosh q=H^D$, и нужно быть аккуратным с *двумя* ветвями корней. Отсюда получается интеграл

$$\int^{H^D}\frac{dz}{\sqrt{Q^2-2g^2z^2}\cdot\sqrt{z^2-1}}=\frac{P}{Q}.$$

Он может быть переписан в виде

$$\int^{H^D}\frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}\cdot\sqrt{1-z^2}}=iP,\quad k^2=\frac{2g^2}{Q^2}.$$

После замены переменных $z=\sin t$ получается интеграл

$$\int_0^{\arcsin H^D}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=iP,$$

который является эллиптическим интегралом, и мы фиксируем произвольную функцию Q, выбирая нижний предел интеграла. Теперь легко получить формулу для дуального гамильтониана H^D в виде функции Якоби $\mathrm{sn}(x|k)$, где k – эллиптический модуль [9]:

$$H^D=\mathrm{sn}\Big(iP\Big|\sqrt{2}gQ^{-1}\Big).$$

Удивительная черта этого дуального гамильтониана – появление эллиптической функции, несмотря на то, что гамильтониан Тоды (23) не содержит никакой эллиптичности. Более того, эллиптический модуль в H^D динамический, т.е. зависит от координаты. Причиной является то, что периодическая цепочка Тоды получается в иноземцевском пределе из эллиптической модели Калоджеро [5], и гамильтониан, дуальный эллиптической модели Калоджеро, также зависит от динамического эллиптического модуля [2].

Еще раз подчеркнем важность этого примера, поскольку он ухватывает основные черты эллиптической модели Калоджеро (дуальный гамильтониан является функцией Якоби с динамическим эллиптическим модулем [2]), но много проще. Это открывает возможность построения дуальных гамильтонианов, обладающих основными чертами эллиптического калоджеровского случая, с числом частиц $N>2$.

Мы благодарны А. Миронову за ценные обсуждения.

Эта работа была поддержана Российским научным фондом (грант # 23-41-00049).

1. S. N. M. Ruijsenaars, Comm. Math. Phys. **115**, 127 (1988).
2. H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, Nucl. Phys. B **573**, 553 (2000); hep-th/9906240.
3. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **475**, 71 (2000); hep-th/9912088; hepth/0001168.
4. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **524**, 217 (2002); hep-th/0107114.
5. V. Inozemtsev, Comm. Math. Phys. **121**, 629 (1989).
6. H. W. Braden and T. J. Hollowood, JHEP **0312**, 023 (2003); hep-th/0311024.
7. P. Koroteev and S. Shakirov, arXiv:1906.10354.
8. A. Mironov, A. Morozov, and Y. Zenkevich, Eur. Phys. J. C **81**, 461 (2021); arXiv:2103.02508.
9. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, MC Graw-Hill Book Company, Inc., London (1955), v. 3.