Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.5, стр.261 - 264 10 марта 1992 г.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА В РАЗМЕРНОСТИ $d = 4n$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППЫ

А.Д.Попов

Институт ядерных исследований

141980, Дубна

Поступила в редакцию 10 февраля 1992 г.

Для калибровочных полей произвольной полупростой группы Ли G уравнения Янга–Миллса в пространстве $\mathbb{R}^{4n}$ редуцированы к системе уравнений, распадающейся на известные уравнения Нама и линейные уравнения для скалярного поля φ.

1. Решения уравнений Янга–Миллса (ЯМ) в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^8$ были недавно использованы при получении солитонных решений теории гетеротических струн [1]. Поэтому нахождение решений ЯМ в $\mathbb{R}^{4n}$ важно для изучения непертурбативных эффектов в теории струн.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{4n}$ с метрикой δ_{ab} рассмотрим калибровочные поля A_a полупростой группы Ли G с напряженностью $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a + [A_a, A_b]$, $a, b, ... = 1, ..., 4n$, $n = 1, 2, ...$. Уравнения ЯМ для A_a имеют вид

$$\partial_a F_{ab} + [A_a, F_{ab}] = 0. \tag{1}$$

Уравнения (1) в $\mathbb{R}^{4n}$ рассматривались в работах [2,3]. В [2,3] было показано, что известный анзац Корригана–Фэрли–'т Хофта–Вилчека (КФТВ) [4] для калибровочных полей группы $SU(2)$ обобщается на размерность $d = 4n$. Мы обобщим этот анзац на калибровочные поля *произвольной* полупростой группы Ли G и опишем соответствующие новые классы решений уравнений ЯМ в пространстве $\mathbb{R}^{4n}$.

2. В $\mathbb{R}^{4n}$ всегда можно задать три постоянных антисимметричных тензора J^1_{ab}, J^2_{ab} и J^3_{ab}, компоненты которых удовлетворяют соотношениям [5]:

$$J^\alpha_{ac} J^\beta_{bc} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{ab} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma_{ab}. \tag{2}$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - структурные константы группы $SU(2)$, $\alpha, \beta, ... = 1, 2, 3$.

Рассмотрим для A_a следующий анзац:

$$A_a = -J^\alpha_{ac} T_\alpha(\varphi)\partial_c\varphi, \tag{3}$$

где постоянные J^α_{ac} удовлетворяют (2), φ - произвольная функция от координат $x^a \in |\mathrm{R}^{4n}$, $\partial_c := \partial/\partial x^c$. Функции T_α зависят от φ и принимают значения в алгебре Ли $\mathcal{G}$ калибровочной группы G, то есть являются матричными. Анзац (3) обобщает КФТВ-анзац [4] на размерность $d = 4n$ и произвольную группу G. При $d = 4$ анзац (3) переходит в анзац работ [6,7].

Подставим (3) в определение F_{ab}. Получаем

$$F_{ab} = J^\alpha_{ac}\{T_\alpha \partial_b \partial_c \varphi + \dot{T}_\alpha \partial_b \varphi \partial_c \varphi\} - J^\alpha_{bc}\{T_\alpha \partial_a \partial_c \varphi + \dot{T} \partial_a \varphi \partial_c \varphi\} + \\ + J^\alpha_{ac} J^\beta_{be} [T_\alpha, T_\beta] \partial_c \varphi \, \partial_e \varphi, \tag{4}$$

где $\dot{T}_\alpha := dT_\alpha/d\varphi$. Используя (2), нетрудно показать, что

$$\partial_a F_{ab} + [A_a, F_{ab}] = T_\alpha j^\alpha_{ab} \partial_a(\Box\varphi) + [\dot{T}_\alpha, T_\alpha] \partial_c \varphi \, \partial_c \varphi \, \partial_b \varphi + \\ (\ddot{T}_\alpha - [T_\beta, [T_\alpha, T_\beta]]) J^\alpha_{ab} \, \partial_a \varphi \, \partial_c \varphi \, \partial_c \varphi + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\epsilon_{\beta\gamma\delta} \dot{T}_\delta + \\ + [T_\beta, T_\gamma]) J^\alpha_{ca} \, \partial_a \varphi \, \partial_c \partial_b \varphi - 2(\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{T}_\gamma + [T_\alpha, T_\beta]) J^\alpha_{ac} J^\beta_{be} \, \partial_a \varphi \, \partial_c \partial_e \varphi + \\ + \dot{T}_\alpha \partial_a \varphi \{2 J^\alpha_{ac} \, \partial_c \partial_b \varphi - 2 J^\alpha_{bc} \, \partial_c \partial_a \varphi + 2\epsilon^\alpha_{\beta\gamma} J^\beta_{ac} J^\gamma_{be} \, \partial_c \partial_e \varphi + J^\alpha_{ab} \Box \varphi\}. \tag{5}$$

где $\Box := \partial_c \partial_c$.

Уравнения ЯМ (1) выполняются, если выполняются следующие уравнения:

$$2 J^\alpha_{ac} \, \partial_c \partial_b \varphi - 2 J^\alpha_{bc} \, \partial_c \partial_a \varphi + 2\epsilon^\alpha_{\beta\gamma} \, J^\beta_{ac} J^\gamma_{be} \, \partial_c \partial_e \varphi + J^\alpha_{ab} \Box \varphi = 0, \tag{6а}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{T}_\gamma + [T_\alpha, T_\beta] = 0. \tag{6б}$$

Действительно, если продифференцировать уравнения (6а) по x^a, то получим $J^\alpha_{bc} \, \partial_c(\Box\varphi) = 0$. Легко видеть, что $[\dot{T}_\alpha, T_\alpha] = 0$ в силу (6б) и тождества Якоби для матриц T_α. Если же продифференцировать (6б) по φ и снова использовать (6б), то получим $\ddot{T}_\alpha - [T_\beta, [T_\alpha, T_\beta]] = 0$. Следовательно, если выполняются уравнения (6), то правая часть (5) обратится в нуль и уравнения ЯМ выполняются.

3. Для того, чтобы найти решения уравнений (6а), заменим индексы $a, b, \ldots$ на двойные индексы (μi), $(\nu i), \ldots$, где $\mu, \nu, \ldots = 1, \ldots, 4$, $i, j, \ldots = 1, \ldots, n$. Тензоры $J^\alpha_{(\mu i)(\nu j)}$ $(= J^\alpha_{ab})$ можно выбрать в следующем виде:

$$J^\alpha_{(\mu i)(\nu j)} = \delta_{ij} \eta^\alpha_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где $\eta^\alpha_{\mu\nu}$ - известные тензоры 'т Хофта. По определению (см., например, [8]) $\eta^\alpha_{\beta\gamma} = \epsilon^\alpha_{\beta\gamma}$, $\eta^\alpha_{\mu 4} = -\eta^\alpha_{4\mu} = \delta^\alpha_\mu$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$. Тензоры $\eta^\alpha_{\mu\nu}$ удовлетворяют тождествам [8]:

$$\eta^\alpha_{\mu\lambda} \, \eta^\beta_{\nu\lambda} = \delta^{\alpha\beta} \, \delta_{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, \eta^\gamma_{\mu\nu}, \tag{8а}$$

$$\epsilon^\alpha_{\beta\gamma} \eta^\beta_{\mu\lambda} \eta^\gamma_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\nu} \, \eta^\alpha_{\lambda\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \, \eta^\alpha_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\nu} \, \eta^\alpha_{\mu\sigma} + \delta_{\lambda\sigma} \, \eta^\alpha_{\mu\nu}. \tag{8б}$$

Нетрудно убедиться, что тензоры (7) удовлетворяют (2) в силу тождеств (8а).

Подставим (7) в уравнения (6а) и используем тождества (8). Получим уравнения

$$2\eta^\alpha_{\mu\lambda}(\partial_{\lambda i} \partial_{\nu j} \varphi - \partial_{\lambda j} \partial_{\nu i} \varphi) - 2\eta^\alpha_{\nu\lambda}(\partial_{\lambda j} \partial_{\mu i} \varphi - \partial_{\lambda i} \partial_{\mu j} \varphi) + \\ + \delta_{\mu\nu} \eta^\alpha_{\lambda\sigma}(\partial_{\lambda i} \partial_{\sigma j} \varphi - \partial_{\lambda j} \partial_{\sigma i} \varphi) + \eta^\alpha_{\mu\nu}(2\partial_{\lambda i} \partial_{\lambda j} \varphi + \delta_{ij} \Box \varphi) = 0, \tag{9}$$

где $\partial_{\lambda i} := \partial/\partial x^{\lambda i}$. Легко видеть, что (9) эквивалентны уравнениям

$$\partial_{\mu i} \partial_{\nu j} \varphi = \partial_{\mu j} \partial_{\nu i} \varphi, \quad \partial_{\lambda i} \partial_{\lambda j} \varphi = 0, \tag{10}$$

где μ и ν принимают любые значения от 1 до 4, а i и j принимают любые значения от 1 до n. Заметим, что из (10) следует $\Box\varphi = \sum_{j=1}^{n} \partial_{\lambda j}\partial_{\lambda j}\varphi = 0$.

4. Уравнения (10) возникают при построении метрик на гиперкэлеровых многообразиях размерности $4n$ [5]. При этом общее решение уравнений (10) можно записать в виде контурного интеграла по вспомогательной комплексной переменной ζ от некоторой голоморфной функции (см. [5]). В частности для пространства $\mathbb{R}^8$ явный вид общего решения φ в терминах контурного интеграла был выписан Уордом [2]. Однако в таком виде решение малопригодно для приложений. Поэтому мы приведем три достаточно общих решения в явном виде.

Пример 1. Простейшим решением является функция

$$\varphi = p_a x^a = p_{\mu i} x^{\mu i}, \tag{11}$$

где p_a - постоянный вектор в $\mathbb{R}^{4n}$.

Пример 2. Положим по определению $X_\mu = x_{\mu i} p_i$, $p_i = \mathrm{const}$. Пусть функция φ зависит только от X_μ, то есть $\varphi = \varphi(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Нетрудно убедиться, что уравнения (10) сводятся в этом случае к уравнению Лапласа по "коллективным" координатам X_μ : $\partial^2\varphi/\partial X_\mu \partial X_\mu = 0$. В качестве решения можно выбрать, например,

$$\varphi = 1 + \sum_{I=1}^{q} \frac{B_I^2}{(X_\mu - C_\mu^I)(X_\mu - C_\mu^I)}, \tag{12}$$

где B_I, $C_\mu^I = \mathrm{const}$, q - любое натуральное число.

Пример 3. Пусть функция φ_i зависит только от координат $x_{\mu i}$ с номером i : $\varphi_i = \varphi_i(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i})$. Положим

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \tag{13}$$

Подставим (13) в (10). Легко видеть, что (10) сводятся к уравнениям Лапласа на φ_i по координатам $x_{\mu i}$: $\partial_{\lambda i}\partial_{\lambda i}\varphi_i = 0$, где по индексу i суммирования нет. Следовательно, взяв любые n функций φ_i, удовлетворяющие уравнениям Лапласа, мы получим решение (13) уравнений (10) (и (6а)).

Подчеркнем, что соответствующие (13) калибровочные поля *не являются* прямой суммой n решений в четырехмерных подпространствах, так как $T_\alpha(\varphi)$ нетривиально зависят от φ и не разлагаются на прямую сумму n матриц.

5. Уравнения (6б) называют уравнениями Нама [9,10]. Эти уравнения уже возникали при построении решений уравнений ЯМ в $\mathbb{R}^4$ [11,12,6,7] и модели киральных полей в $\mathbb{R}^2$ [13]. Уравнения Нама имеют представление типа Лакса со спектральным параметром [9,10,13], и в терминах тэта-функций можно выписать общее решение уравнений (6б) для любой полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ (см. обсуждение в [9,10,13]). Частный класс решений этих уравнений можно получить редукцией к уравнениям цепочки Тода. Явный вид анзацев для $T_\alpha(\varphi)$, решения и их обсуждение можно найти в [10,6,7,12]. Таким образом, всякое решение системы уравнений (6) дает решение (3) уравнений ЯМ в $\mathbb{R}^{4n}$.

Заметим, что анзац (3) связан с существованием в пространстве $\mathbb{R}^{4n}$ трех тензоров J^α_{ab} *(кватернионная структура)*. Аналогичные анзацы, связанные с *октонионной структурой*, позволяют получить иные решения уравнений Янга–Миллса в пространствах $\mathbb{R}^7$ и $\mathbb{R}^8$ [14].

1. A.Strominger, Nucl. Phys. B **343**, 167 (1990); J.A.Harvey and A.Strominger, Phys. Rev. Lett. **66**, 549 (1991); C.G.Callan, J.A. Harvey and A.Strominger, Nucl. Phys. B **359**, 611 (1991).

2. R.S.Ward, Nucl Phys. B **236**, 381 (1984).

3. E.Corrigan, P.Goddard and A.Kent, Commun. Math. Phys. **100**, 1 (1985).

4. E.Corrigan and D.Fairlie, Phys. Lett. B **67**, 69 (1977); G. 't Hooft, unpublished; F.Wilczek, In: Quark Confinement and Field Theory, Wiley, New York, 1977, p.211.

5. N.J.Hitchin, A.Karlhede, U.Lindström and M.Roček, Commun. Math. Phys. **108**, 535 (1987); A. Karlhede, U.Lindström and M.Roček, Commun. Math. Phys. **108**, 529 (1987); U.Lindström and M.Roček, Commun. Math. Phys. **115**, 21 (1988); H.Pedersen and Y.S.Poon, Commun. Math. Phys. **117**, 569 (1988).

6. А.Д.Попов, Письма в ЖЭТФ, **54**, 71 (1991).

7. А.Д.Попов, ТМФ, **89**, 402 (1991).

8. M.K.Prasad, Phys. D **1**, 167 (1980).

9. N.J.Hitchin, Commun. Math. Phys. **89**, 145 (1983); S.K.Donaldson, Commun. Math Phys. **96**, 387 (1984); J. Hartubise, Commun. Math. Phys. **100**, 191 (1985); **120**, 613 (1989).

10. R.S.Ward, Phys. Lett. A **112**, 3 (1985).

11. Т.А.Иванова, УМН **46**, 149 (1991).

12. T.A.Ivanova and A.D.Popov, Lett. Math. Phys. **23**, 29 (1991).

13. А.Д.Попов, Письма в ЖЭТФ **54**, 128 (1991).

14. A.D.Popov, Europhys. Lett. **17**, 23 (1992); T.A.Ivanova and A.D.Popov, Lett. Math. Phys., in press.