Письма в ЖЭТФ, том 55, вып. 5, стр. 293 — 296 10 марта 1992 г.

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МНОГОЦЕПОЧЕЧНАЯ КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ

А.Е.Боровик, А.А.Звягин, В.Ю.Попков, Ю.М.Стржемечный

Физико-технический институт низких температур АН Украины
310164, Харьков

Поступила в редакцию 5 февраля 1992 г.

Квантовым методом обратной задачи рассеяния получены точные результаты для новой многоиндексной магнитной системы. Найдены решения уравнения Янга-Бакстера, проведен анализ выражения для энергии основного состояния.

В связи с открытием металлооксидных сверхпроводников [1], резко вырос интерес к двумерным квантовым системам. Большинство двумерных квантовых систем теоретически изучается при помощи различных модификаций метода среднего поля, вариационных или других приближенных методов [2]. Однако в двумерных системах приближенные методы могут давать даже качественно неверные результаты. Поэтому любые, пусть и не очнь близкие к реальности двумерные квантовые модели, представляют особый интерес. В настоящее время большая часть точных решений двумерных моделей статистической механики и одномерных квантовых моделей получены при помощи построения коммутирующих трансфер-матриц. Существует несколько двумерных квантовых моделей (например, [3,4]), для которых построены коммутирующие трансфер-матрицы. В настоящей статье мы предлагаем точно решаемую двумерную спиновую квантовую модель, в которой взаимодействие между ближайшими цепочками в плоскости представляет собой взаимодействие между узлами, лежащими внутри первой координационной сферы. В работе мы выписываем выражения для трансфер-матрицы и энергии основного состояния, а также уравнения алгебраического анзаца Бете.

Ниже мы исследуем поведение N спиновых цепочек ($s = 1/2$) с гамильтонианом вида:

$$H = -(1/2)\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\{(\sigma^{+}_{n,m}\sigma^{-}_{n,m+1}\exp(4i\phi(\sigma^{z}_{n-1,m}-\sigma^{z}_{n+1,m}))+\text{h.c.})+$$
$$+2\Delta^{(n)}\sigma^{z}_{n,m}\sigma^{z}_{n,m+1}+2h\sigma^{z}_{n,m}\}, \tag{1}$$

где $\Delta^{(n)}$ - константы обменной анизотропии для каждой цепочки; $\sigma^{\pm}_{n,m}=\sigma^{x}_{n,m}\pm$ $\pm i\sigma^{y}_{n,m}$ и $\sigma^{x}_{n,m},\sigma^{y}_{n,m},\sigma^{z}_{n,m}$ есть спиновые x-, y-, и z-проекции соответственно для m-го узла n-той цепочки; ϕ - константа взаимодействия между спиновыми цепочками в плоскости; h - магнитное поле.

Модифицированные для многоиндексного случая преобразования типа Иордана-Вигнера [5] связывают спиновую систему с системой фермионов, гамильтониан которой имеет вид:

$$H = -(1/2)\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\{(a^{+}_{n,m+1}a_{n,m}\exp(4i\phi(a^{+}_{n+1,m}a_{n+1,m}-a^{+}_{n-1,m}a_{n-1,m}))+$$
$$+\text{h.c.})+2\Delta^{(n)}(1-2a^{+}_{n,m}a_{n,m})(1-2a^{+}_{n,m+1}a_{n,m+1})+2h(1-2a^{+}_{n,m}a_{n,m})\}. \tag{2}$$

Тем самым найдено также точное решение двумерной системы взаимодействующих бесспиновых фермионов.

Для цепочки со "свободными концами" существует унитарное калибровочное преобразование, которое сводит гамильтониан (1) к гамильтониану N невзаимодействующих спиновых цепочек. Для периодических граничных условий такого унитарного преобразования не существует. Следовательно, в нашей модели взаимодействие между спиновыми цепочками проявится в основном в поправках конечного размера. Это взаимодействие приводит к эффектам, аналогичным эффекту Ааронова-Бома и имеет квантовую природу [6]. Поправки конечного размера особенно существенны для мезоскопических систем. В последнее время эти поправки исследовались в ряде теоретических работ с использованием метода квантовой обратной задачи [7,8].

Основным объектом в квантовом методе обратной задачи рассеяния является локальный L-оператор. Для нашего случая N спиновых цепочек он имеет вид:

$$\mathbb{L}_m(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{n=1}^{N}} \tilde{L}_n^m(\lambda^{(n)})$$

$$\tilde{L}_n^m(\lambda^{(n)}) = \exp(i\phi\sigma^z_{O,m}\sigma^z_{n+1,m}) L_n^m(\lambda^{(n)}) \exp(-i\phi\sigma^z_{O,m}\sigma^z_{n-1,m});$$

$$L_n^m(\lambda^{(n)}) = w_1(\lambda^{(n)})\sigma^x_{O,n}\sigma^x_{m,n} + w_2(\lambda^{(n)})\sigma^y_{O,n}\sigma^y_{m,n} +$$

$$+ w_3(\lambda^{(n)})\sigma^z_{O,n}\sigma^z_{m,n} + w_4(\lambda^{(n)});$$

где m - номер узла; n - номер цепочки; O - обозначает вспомогательное подпространство. Функции $w_k(\lambda)$ являются решением уравнения Янга-Бакстера (см. [10]):

$$\mathbb{R}(\lambda-\mu)(\mathbb{L}(\lambda)\otimes\mathbb{L}(\mu)) = (\mathbb{L}(\mu)\otimes\mathbb{L}(\lambda))\mathbb{R}(\lambda-\mu);$$

$$\mathbb{R}(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{n=1}^{N}} P_{O,n;m,n}\mathbb{L}(\lambda),$$

$P_{i;k}$ - оператор перестановки в подпространствах i и k;

$$w_1(\lambda) = w_2(\lambda) = \sin(2\eta)/(2\sin(\lambda+\eta));$$

$$w_{3,4}(\lambda) = (1 \pm \sin(\lambda-\eta))/(2\sin(\lambda+\eta)).$$

Уравнение Янга-Бакстера является необходимым и достаточным условием коммутативности трансфер-матриц с несовпадающими аргументами. В нашем случае трансфер-матрица имеет вид:

$$\mathbb{T}(\lambda) = \mathrm{Trace} \overrightarrow{\prod_{n=1}^{N}} \overrightarrow{\prod_{m=1}^{M}} \tilde{L}_n^m(\lambda). \tag{3}$$

След в (3) берется по вспомогательному подпространству, M - число узлов. Эта коммутативность позволяет нам найти полный набор сохраняющихся операторов, которые коммутируют с трансфер-матрицей $\mathbb{T}(\lambda)$. В частности, гамильтониан (1) является логарифмической производной при $\lambda^{(n)} = \eta^{(n)}$, где $\cos(2\eta^{(n)}) = \Delta^{(n)}$.

Пользуясь стандартной процедурой [9], мы находим собственные значения трансфер-матрицы G:

$$G=\prod_{n=1}^{N}\exp[2i\phi(\nu_{n-1}-\nu_{n+1})]\prod_{k_n=1}^{\nu_n}\frac{\sin(\lambda_{k_n}^{(n)}-\lambda^{(n)}+\eta^{(n)})}{\sin(\lambda_{k_n}^{(n)}-\lambda^{(n)}-\eta^{(n)})}+$$

$$+\exp[-2i\phi(\nu_{n-1}-\nu_{n+1})]\frac{\sin^M(\lambda^{(n)}+\eta^{(n)})}{\sin^M(\lambda^{(n)}-\eta^{(n)})}\prod_{k_n=1}^{\nu_n}\frac{\sin(\lambda^{(n)}-\lambda_{k_n}^{(n)}+\eta^{(n)})}{\sin(\lambda^{(n)}-\lambda_{k_n}^{(n)}-\eta^{(n)})}.$$

Квантовые числа $\lambda_{k_n}^{(n)}$ определяются из системы уравнений:

$$\exp[4i\phi(\nu_{n-1}-\nu_{n+1})]\left(\frac{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}+\eta^{(n)})}{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}-\eta^{(n)})}\right)^M=\prod_{\substack{i_n=1\\ i_n\neq j_n}}^{\nu_n}\frac{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}-\lambda_{i_n}^{(n)}+2\eta^{(n)})}{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}-\lambda_{i_n}^{(n)}-2\eta^{(n)})}. \qquad (4)$$

В (4) ν_n есть число спинов вниз в n-той цепочке; $\nu_{N+1}=\nu_O=M/2$. Здесь необходимо отметить, что индекс (n) указывает на то, что константы внутрицепочечного взаимодействия для разных подрешеток в общем случае не совпадают.

Для гамильтониана (1) можно легко получить собственное значение состояния, в котором в n-той цепочке имеется ν_n спинов вниз:

$$E=\sum_{n=1}^{N}\left\{-\frac{M}{2}(\Delta^{(n)}+h)+h\nu_n+\sum_{j=1}^{\nu_n}\left[2\Delta^{(n)}-\frac{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}+\eta^{(n)})}{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}-\eta^{(n)})}-\frac{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}-\eta^{(n)})}{\sin(\lambda_{j_n}^{(n)}+\eta^{(n)})}\right]\right\}. \qquad (5)$$

Для того, чтобы найти энергию основного состояния E_O необходимо найти квантовые числа $\lambda_{k_n}^{(n)}$ из (4) для данных ν_n, подставить в выражение (5) и проминимизировать E_O по ν_n. В общем случае выполнение этой программы в аналитическом виде пока не удается. Но в некоторых предельных случаях мы нашли выражение для энергии основного состояния.

Так для $\Delta^{(n)}=0$, что соответствует свободным фермионам, энергия основного состояния равна

$$E=-\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{2\sin(\pi\nu_n/M)\cos[(4\phi(\nu_{n-1}-\nu_{n+1})+\pi)/M]}{\sin(\pi/M)}-2h\nu_n\right\}. \qquad (6)$$

Из выражения (6) видно, что главный член разложения энергии по $1/M$ не зависит от константы взаимодействия ϕ между подрешетками в отсутствие магнитного поля. Как и ожидалось, это взаимодействие дает вклад порядка $1/M$. Например, при $N=2$ и $h=0$ мы имеем:

$$E_O\approx-(4M/\pi)+(2/M)\{(\pi/3)+(2\phi)^2[1-(2\pi)^2]/\pi[1+(4\phi)^2]\}.$$

При h отличном от нуля, ситуация более интересная, поскольку уже в главном по $1/M$ члене может содержаться зависимость от ϕ. Например, для случая двух цепочек энергия основного состояния имеет вид:

$$E_O\approx-2M\{[2\sin(\pi x)\cos(4\phi(x-1/2))/\pi]-2hx\},$$

где x определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi\cos(\pi x)\cos(4\phi(x-1/2))-4\phi\sin(\pi x)\sin(4\phi(x-1/2))=h.$$

При $\Delta^{(n)} \to \infty$, очевидно, что система вырождается в N независимых изинговских подсистем, энергия основного состояния в этом случае выглядит тривиально.

При $-1 < \Delta^{(n)} < 1$ можно воспользоваться результатами работы [8] для поправки порядка $1/M$ при "скрученных" граничных условиях:

$$E = \sum_{n=1}^{N} \left\{ M\epsilon_{\infty}^{n} - \frac{\pi v_F^{(n)}}{6M} \left[1 - \frac{3(\nu_n - \mu_n(h)M)^2}{\zeta_n^2(\Lambda)} - 3\zeta_n^2(\Lambda)(4\phi/\pi)^2(\nu_{n-1} - \nu_{n+1})^2 \right] \right\},$$

где ϵ_{∞}^{n} - энергии основного состояния для каждой цепочки при $\nu_n = M/2$ [11]; $\mu_n(h) = \nu_n/M$ в пределе $M \to \infty$; $v_F^{(n)}$ - скорости Ферми и $\zeta_n(\Lambda)$ - есть "одетые" заряды, вычисленные по аналогии с [8]. Здесь следует отметить, что в случае тороидальных граничных условий $\nu_{N+1} = \nu_1$ поведение системы тривиально: все $\nu_n = M/2$.

В недавней работе Ванг [12] предложил обобщение преобразований Иордана-Вигнера для двумерной квантовой спиновой системы. Вид взаимодействия между ферми-частицами в соседних цепочках в гамильтониане (2) настоящей работы, подобен гамильтониану (3) работы [12], поскольку в обоих случаях взаимодействие приводит к тому, что показатели фазовых множителей зависят от чисел заполнения узлов в соседних цепочках (узельных намагниченностей подрешеток).

Таким образом, в настоящей статье методом квантовой обратной задачи рассеяния изучен новый класс точно решаемых квантовых моделей, которые эффективно двумерны. Эти модели представляют собой бесконечный набор спиновых цепочек с нетривиальным взаимодействием между ближайшими. Каждая из этих цепочек в отсутствие межцепочечного взаимодействия является точно интегрируемой. В нулевом магнитном поле взаимодействие между цепочками вносит вклад в энергию порядка $1/M$. Ненулевое магнитное поле может привести к существенной зависимости главного члена в выражении для энергии основного состояния от константы межцепочечного взаимодействия.

1. J.G.Bednorz and K.A.Muller, Z.Phys. B 64, 189 (1986).
2. P.W.Anderson, Int J. of Modern Phys. B 4, 181 (1990).
3. A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. B 131, 121 (1983).
4. R.J.Baxter and G.R.W.Quispel, J. Stat. Phys. 58, 411 (1990).
5. B.S.Shastry, Phys. Rev. Lett. 56, 1529 (1986).
6. Y.Aharonov and D.Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
7. F.Woynarovich, H.P.Eckle and T.T.Truong, J. Phys. A: Math. Gen. 22, 4027 (1989).
8. H.-P.Eckle and C.J.Hamer, J. Phys. A: Math. Gen., 24, 191 (1991).
9. Л.А.Тахтаджян и Л.Д.Фаддеев, Успехи мат. наук, 34, 5 (1979).
10. Р.Бэкстер, Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
11. C.N.Yang and C.P.Yang, Phys. Rev. 150, 321 (1966).
12. Y.R.Wang, Phys. Rev. B. 43, 3786 (1991).