

К вопросу об электрической площади электромагнитного импульса

А. В. Богацкая, А. М. Попов¹⁾

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июля 2023 г.

После переработки 17 июля 2023 г.

Принята к публикации 20 июля 2023 г.

Анализируется распространение ультракоротких электромагнитных импульсов с ненулевой электрической площадью в плазменных средах. В рамках приближения однонаправленного распространения электромагнитного импульса в одномерной геометрии получено уравнение для его площади. Показано, что эта площадь не является инвариантом движения и может как уменьшаться, так и увеличиваться в процессе распространения импульса в зависимости от свойств плазменной среды.

DOI: 10.31857/S1234567823160115, EDN: iwkcfl

Введение. Прогресс техники генерации ультракоротких импульсов в различных частотных диапазонах [1–6] сделал вновь актуальным вопрос о возможности получения (квази)униполярных импульсов, или импульсов с ненулевой электрической площадью. Электрическая площадь импульса, как интеграл от электрического поля по времени

$$S_T(\mathbf{r}) = \int E(\mathbf{r}, t) dt \quad (1)$$

была впервые введена в [7]. Ненулевое значение электрической площади импульса означает наличие у импульса статической компоненты электрического поля, что приводит к однонаправленному воздействию таких импульсов на заряженные частицы и может быть использовано в ряде практических приложений, в частности спектроскопии ударного-импульсного воздействия на микрообъекты [8–10]. Действительно, для достаточно короткого импульса интеграл (1) определяет импульс, переданный системе (например, электрону в атоме, молекуле, или квантовой точке), величина которого определяет ее последующую динамику [8, 11, 12]. С другой стороны, (квази)униполярные импульсы обладают большой спектральной шириной, что может быть использовано в задачах широкополосной спектроскопии [13].

Различные способы генерации (квази)униполярных импульсов анализировались в [14–23].

Особый интерес в задаче распространения (квази)униполярных импульсов в различных (в том числе диссипативных) средах вызывает также

возможность использования площади импульса (1), как интеграла движения, сформулированная в [24]. Такую возможность, очевидно, можно обсуждать только в приближении одномерной геометрии. Действительно, в трехмерной, 3D, геометрии дифракционное расплывание пучка быстро “вымывает” из него низкочастотные компоненты, что достаточно быстро превращает униполярный импульс в биполярный даже при распространении в вакууме. В качестве примера на рис. 1 приведены результаты

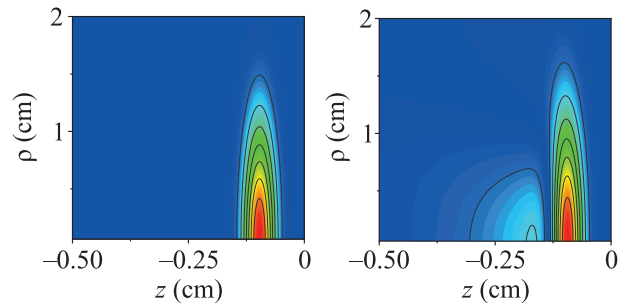


Рис. 1. (Цветной онлайн) 3D пространственные распределения абсолютных значений электрического поля в импульсе: начальное распределение (а), после распространения на длине 3 см (б). Линии уровня нормированы на максимальное значение электрического поля в импульсе

расчета движения униполярного импульса в вакууме и превращения его в биполярный с образованием длинного “хвоста” противоположной полярности по отношению к лидирующему пику. Начальный импульс в (ρ, z) -геометрии характеризуется гауссовым распределением

¹⁾e-mail: alexander.m.popo@gmail.com

$$E(z, \rho, 0) = E_0 \times \exp(-(\rho/\rho_0)^2) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(z/z_0)^2\right), \quad (2)$$

где параметры ρ_0 и z_0 выбраны как $\rho_0 = 1.0$ см, $z_0 = 0.025$ см. Пространственный размер z_0 фактически определяет длительность импульса $\tau_p = 2z_0/c \approx 1.67$ пс, что, в свою очередь, определяет его спектральную ширину $\Delta\Omega \sim 2\pi/\tau_p \sim 4 \cdot 10^{12}$ с⁻¹. При этом расчеты показали, что площадь импульса быстро убывает в процессе распространения и на удалении $L = 3$ см от начальной точки падает примерно вдвое.

Другая ситуация реализуется в одномерном случае: любая функция от запаздывающего (опережающего) аргумента $\zeta = z \mp ct$ (здесь c – скорость распространения волны) является решением волнового уравнения второго порядка. Очевидно, в такой ситуации площадь импульса (1), которую мы в дальнейшем будем называть временной площадью с точностью до постоянной величины, равной скорости распространения волны, совпадает с пространственной площадью импульса

$$S_z(t) = \int E(z, t) dz, \quad (3)$$

введенной в [21, 22], и не меняется в процессе распространения импульса. Отметим, что похожий режим распространения импульса с сохраняющейся площадью может быть также реализован в волноводе, обладающим неодносвязной внутренней областью (например, цилиндрический коаксиал с идеально проводящими стенками) [25]. Действительно, в таком волноводе помимо обычных ТЕ и ТМ волн, характеризующихся определенными законами дисперсии и низкочастотной отсечкой по частоте, оказывается возможным еще распространение так называемой главной волны, частота которой не ограничена никакими условиями, а частотная дисперсия отсутствует [26]. Это позволяет обеспечить распространение в таком волноводе импульсов с произвольным частотным спектром, в том числе имеющим статическую компоненту.

Вопрос о сохранении площади импульса при его движении в произвольной среде является более сложным. Как пространственная, так и временная площади импульса легко могут быть рассчитаны по известному решению волнового уравнения. Однако в ряде случаев оказывается возможным получить уравнения непосредственно для площади импульса, что существенно упрощает анализ процесса распространения (квази)униполярных импульсов в пространстве.

В данной работе мы ограничимся анализом эволюции временной и пространственной площадей импульса при распространении униполярного импульса в плазменных средах в одномерной геометрии. В рамках приближения однонаправленного распространения импульса получено общее уравнение для его площади (как пространственной, так и временной). Полученные решения этого уравнения могут быть использованы для анализа импульсного возбуждения различных систем. Также показано, что электрическая площадь импульса, вообще говоря, не является интегралом движения.

Приближение однонаправленного распространения импульсов. Мы будем исходить из волнового уравнения для линейно поляризованного электрического поля волны, распространяющейся в среде:

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь $j = j(E)$ – токи (поляризации или проводимости), индуцированные в среде распространяющимся импульсом. Мы полагаем задачу нерелятивистской, а среду немагнитной, поэтому вкладом магнитного поля в наведенные токи пренебрегаем. Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E(z, t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (5)$$

В отсутствие токов (вакуум) имеем решение, например, в виде импульса, распространяющегося в положительном направлении оси z :

$$E(z, t) = f(z - ct), \quad (6)$$

где f – произвольная функция. Тогда в приближении малых токов, индуцируемых в среде, правая часть в уравнении (5) почти равна нулю. Поэтому $\left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\right) \cong 0$, а, следовательно, $\left(\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\right) \cong -2 \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$. В результате имеем приближенное уравнение

$$\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E \approx -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (7)$$

откуда, выполняя интегрирование по времени и полагая константу интегрирования равной нулю, имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E(z, t) = -\frac{2\pi}{c} j(z, t). \quad (8)$$

Уравнение (8) и есть уравнение однонаправленного распространения электромагнитного импульса, полученное ранее в [27–29]. Умножая уравнение (8) на

величину напряженности поля $E(z, t)$, получим соотношение

$$c \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{E^2(z, t)}{4\pi} = -j(z, t)E(z, t). \quad (9)$$

Уравнение (9) фактически дает закон сохранения энергии: в левой части стоит изменение плотности энергии поля волны, а в правой – джоулево энерговыделение.

Общее выражение для тока, индуцированного в пространственно однородной среде, может быть записано в виде

$$j(z, t) = \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}(\tau) E(z, t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

где $\tilde{\sigma}$ – функция отклика. Для простейшей модели плазмы, как электронного газа с плотностью n_e , испытывающего упругие столкновения с частотой ν_{tr} , эта функция отклика записывается в виде [30]

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \frac{e^2 n_e}{m} \exp(-\nu_{tr} \tau), \quad (11)$$

здесь m , e – масса и заряд электрона. Функция отклика (11) связана с высокочастотной проводимостью плазмы

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m(\nu_{tr} - i\omega)} \quad (12)$$

через фурье-преобразование.

Как было отмечено ранее, условием применимости полученного уравнения (8) является малость наведенных токов по сравнению со скоростью изменения поля, например,

$$j \ll \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|. \quad (13)$$

Оценим наведенный ток j как $j = \sigma E$, σ – проводимость плазмы. Тогда, полагая, что $\partial E / \partial t \sim \omega E$, из (13) получим

$$\frac{2\pi\sigma}{\omega} \ll 1. \quad (14)$$

Вспоминая общую связь между диэлектрической проницаемостью и проводимостью, $\varepsilon = 1 + i4\pi\sigma/\omega$, получаем, что условие (14) означает $|\varepsilon - 1| \ll 1$. Заметим, однако, что условие (14) не может быть использовано для анализа применимости приближения для униполярных импульсов, имеющих ненулевую статическую компоненту. В этом случае оценим $\partial E / \partial t \sim E/\tau_p$, τ_p – длительность импульса. Тогда приближение однонаправленного распространения справедливо, если

$$\alpha = 2\pi\sigma\tau_p \ll 1. \quad (15)$$

Уравнения для временной и пространственной площадей импульса и их решения.

Общее уравнение (8) позволяет легко получить уравнения для пространственной и временной площадей импульса. Так, интегрируя (8) по пространственной координате и учитывая, что на конечных временах импульс локализован в ограниченной области пространства, т.е. $E(+\infty, t) = E(-\infty, t) = 0$, получим интегральное уравнение для эволюции во времени пространственной площади импульса, распространяющегося в пространственно однородной плазме:

$$\frac{dS_Z(t)}{dt} + 2\pi \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}(\tau) S_Z(t - \tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

Для временной площади импульса получается несколько иначе. Интегрируя уравнение (8) по времени, получаем

$$\frac{dS_T(z)}{dz} = -\frac{2\pi}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}(\tau) E(z, t - \tau) d\tau, \quad (17)$$

откуда, меняя местами очередность интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \frac{dS_T(z)}{dz} &= -\frac{2\pi}{c} \int_0^{+\infty} d\tau \tilde{\sigma}(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t - \tau) dt = \\ &= S_T(z) \frac{2\pi}{c} \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет общее решение для произвольной функции отклика:

$$S_T(z) = S_T(z = 0) \exp \left(-\frac{2\pi}{c} z \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}(\tau) d\tau \right). \quad (19)$$

Например, для модели плазмы, описываемой в рамках (11), решение (19) дает

$$S_T(z) = S_T(z = 0) \exp \left(-\frac{2\pi\sigma_0}{c} z \right). \quad (20)$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{e^2 n_e}{m\nu_{tr}}$ – статическая проводимость плазмы. Как видно, в результате диссипации энергии площадь импульса убывает во времени. При этом, с учетом (15), выражение (20) справедливо, если площадь импульса мало меняется на длине распространения, равной пространственной длительности импульса $l = c\tau_p$. Действительно, длина релаксации площади импульса есть $L = \frac{c}{2\pi\sigma_0} = l/\alpha \gg l$.

Отметим также, что в рассматриваемом случае временная площадь импульса может быть вычислена

и для пространственно неоднородной плазмы, например, с изменяющейся по z электронной плотностью. В этом случае

$$S_T(z) = S_T(z=0) \exp\left(-\frac{2\pi}{c} \int_0^z \sigma_0(z) dz\right). \quad (21)$$

Остановимся теперь на анализе площади импульса, распространяющегося в неравновесной плазме, созданной в газе фемтосекундным лазерным импульсом УФ диапазона частот. Такую плазму в [31] было предложено использовать как среду для усиления электромагнитных импульсов терагерцового диапазона частот, а также для получения униполярных импульсов пикосекундной длительности [21, 22]. При этом режим усиления оказывается возможен, если для атомов (молекул) газовой среды существует интервал энергий, в котором транспортное сечение рассеяния растет с увеличением энергии, причем положение пика электронов, возникающих при многофотонной ионизации, находится внутри этого интервала. Наличие минимума Рамзауэра в транспортном сечении рассеяния легко обеспечивает такую ситуацию при ионизации тяжелых инертных газов излучением эксимерных лазеров: например, при трехфотонной ионизации атомов ксенона излучением эксимерного KrF лазера положение фотоэлектронного пика соответствует энергии $E_0 \cong 2.87$ эВ, т.е. как раз примерно в середине интервала энергий с возрастающим сечением. Функция отклика $\tilde{\sigma}(\tau)$ в такой плазме была получена в [30] в рамках кинетической теории, основанной на уравнении Больцмана:

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \frac{4\pi e^2 n_e}{3m} \int \nu^3 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \nu}\right) \exp(-\nu_{tr}(\nu)\tau) d\nu, \quad (22)$$

где функция распределения электронов по абсолютному значению скорости (ФРЭС) $f_0(\nu)$ нормирована согласно условию

$$4\pi \int f_0(\nu) \nu^2 d\nu = 1. \quad (23)$$

Выражение (21) справедливо для стационарной по времени ФРЭС. Это условие хорошо выполнено для атомов инертных газов, поскольку релаксация ФРЭС происходит на временах $\sim (M/2m)\nu_{tr}^{-1}$ (M – масса атома), в то время как время памяти отклика в (9), (10) составляет несколько ν_{tr}^{-1} . В молекулярных газах, например, в азоте, или воздухе, ситуация оказывается более сложной: быстрая релаксация ФРЭС на колебательных возбуждениях молекул азота приводит к необходимости учитывать ее нестационарность в (22) (более подробно см. [30]).

Отметим, что именно интервал скоростей с положительной производной по скорости от ФРЭС может обеспечить отрицательное значение функции отклика и реализацию режима усиления. В предположении δ -образного пика в спектре фотоэлектронов $f_0(\nu) \sim \delta(\nu - \nu^*)$ выражение (22) легко преобразуется к виду:

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \frac{e^2 n_e}{m} \exp(-\nu_0 \tau) \left(1 - \frac{1}{3} \nu^* \tau \frac{d\nu_{tr}}{d\nu} \Big|_{\nu=\nu^*}\right). \quad (24)$$

Здесь $\nu^* = \sqrt{2E_0/m}$ – скорость электронов, соответствующая энергии пика E_0 , а $\nu_0 = \nu_{tr}(\nu^*)$ – значение транспортной частоты при скорости электрона равной ν^* . Для ксенона в области растущего сечения [30] $\sigma_{tr}(\nu) \sim \nu^4$. Поэтому $\nu_{tr}(\nu) = \nu_0(\nu/\nu^*)^\alpha$, $\alpha = 5$. Для аргона [32] $\alpha = 3$ (линейный с энергией рост сечения). Для рассматриваемых степенных зависимостей из (23) имеем:

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \frac{e^2 n_e}{m} \exp(-\nu_0 \tau) \left(1 - \frac{\alpha}{3} \nu_0 \tau\right). \quad (25)$$

Эти зависимости для плазмы ксенона и аргона приведены на рис. 2.

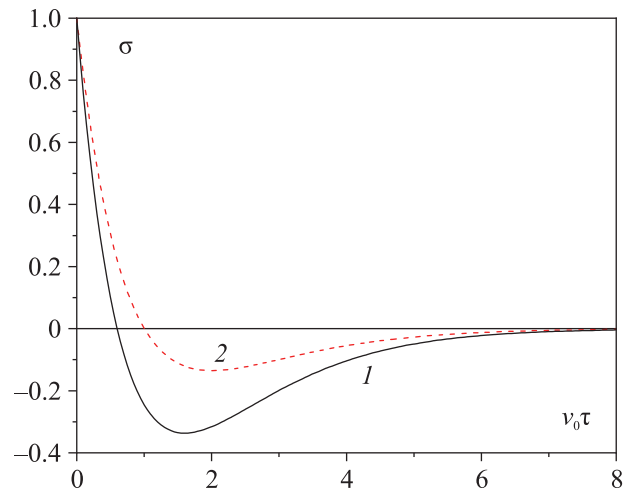


Рис. 2. (Цветной онлайн) Функции отклика для плазмы ксенона, $\alpha = 5$ (1) и аргона, $\alpha = 3$ (2)

Использование уравнения (18) дает возможность определить значение временной площади импульса в рассматриваемом режиме. Поскольку

$$\int_0^\infty \tilde{\sigma}(\tau) d\tau = \frac{e^2 n_e}{m\nu_0} \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right), \quad (26)$$

находим

$$\tilde{S}(z) = \tilde{S}_0 \exp\left(-\frac{2\pi\sigma_0}{c} z(1 - \alpha/3)\right). \quad (27)$$

Как видно, площадь импульса не является постоянной величиной: она может как убывать, так и возрасти по мере движения импульса. Так, увеличение площади импульса возможно при достаточно быстром возрастании транспортной частоты ν_{tr} со скоростью ($\alpha > 3$), в то время как в противоположном случае ($\alpha < 3$) площадь импульса будет убывать. Особая ситуация возникает при $\alpha = 3$ (такой случай может быть реализован как раз в аргоне): импульс распространяется в среде с заданной (неизменной) электрической площадью.

Полученные нами условия возрастания электрической площади импульса оказываются тождественными условиям усиления терагерцового (ТГц) сигнала в неравновесном фотоионизационном плазменном канале в инертных газах, сформулированным в [32].

В отличие от временной, пространственная площадь импульса $S_Z(t)$ может быть получена как решение интегрального уравнения (16) только для случая пространственно однородной плазмы. При выполнении условия (15) решение интегрального уравнения (16) записывается в виде

$$S_Z(t) = S_Z(t=0) \exp(-\gamma t), \quad (28)$$

где с точностью до малых членов порядка σ_0/ν_0 коэффициент γ есть $\gamma \approx 2\pi\sigma_0$ для отклика, заданного с помощью (11), и $\gamma \approx 2\pi\sigma_0(1 - \alpha/3)$ для отклика, заданного с помощью (25). Такое совпадение пространственной и временной площадей импульса не является случайным. Действительно, условие применимости приближения однонаправленного распространения фактически означает, что показатель преломления среды лишь немного отличается от единицы (см. (14) и (15)). Это означает, что импульс в плазменной среде распространяется почти со скоростью света в вакууме, что и приводит к одинаковому закону изменения площадей.

Заметим, что уравнения (16) и (18) всегда имеют также нулевые решения. В рамках предложенной модели, если начальный импульс характеризовался нулевой (пространственной или временной) площадью, такой же она и останется в процессе его распространения. Это означает, что сам процесс генерации (квази)униполярных не может быть рассмотрен в рамках рассматриваемой модели. Действительно, импульс, имеющий нулевую электрическую площадь, в процессе распространения может превратиться в (квази)униполярный в результате некоторого нелинейного процесса, когда начальный биполярный импульс, имеющий короткий и интенсивный всплеск поля одной направленности поля и длинный “хвост” с противоположной направленностью, проходит через среду,

в которой усиление определяется мгновенным значением напряженности поля в волне. Также может оказаться, что достаточно интенсивный биполярный импульс в процессе распространения изменяет свойства среды, так что усиливается лишь его передняя часть, в то время как задний фронт поглощается [22]. Свойства среды могут изменяться и безотносительно распространяющегося импульса, что также может приводить к формированию импульса с ненулевой площадью. Такая ситуация, например, возможна при распространении ТГц импульса в неравновесной фотоионизационной плазме азота, когда пичковый характер ФРЭС быстро деградирует в процессе возбуждения колебательных состояний молекулы азота, что приводит к потере усиления на длине распространяющегося ТГц импульса [21, 33].

Заключение. Таким образом, в работе в рамках одномерной модели однонаправленного распространения электромагнитных импульсов в стационарных плазменных средах получены уравнения для электрической площади (пространственной или временной) таких импульсов. Показано, что электрическая площадь таких импульсов не является постоянной величиной. Она может как уменьшаться, так и увеличиваться в процессе распространения и определяется функцией отклика плазменной среды. Полученные зависимости, описывающие убывание (возрастание) электрической площади импульса, тесно связаны с изменением энергии импульса при его движении в среде, которое может быть проанализировано с помощью уравнения (9).

Отметим также, что рассмотренный подход может быть использован и для анализа площади импульса, распространяющегося в неионизованных газовых средах. В этом случае функция отклика должна описывать возникающие в среде токи связанных электронов (токи поляризации).

Авторы выражают благодарность О. Г. Косаревой за полезные обсуждения результатов работы. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда # 22-22-00225.

1. T. Seifert, S. Jaiswal, M. Sajadi, G. Jakob, S. Winner, M. Wolf, M. Kläui, and T. Kampftrath, Appl. Phys. Lett. **110**, 252402 (2017).
2. T. Balčiūnas, D. Lorenc, M. Ivanov, O. Smirnova, A. M. Zheltikov, D. Dietze, K. Unterrainer, T. Rathje, G. G. Paulus, A. Baltuška, and S. Haessler, Opt. Express **23**, 15278 (2015).
3. D. Zhang, Y. Bai, Y. Zeng, Y. Ding, Zh. Li, Ch. Zhou, Y. Leng, L. Song, Y. Tian, and R. Li, IEEE Photon. J. **14**(1), 5910605 (2022).

4. Y. Shou, R. Hu, Z. Gong, J. Yu, J. Chen, G. Mourou, X. Yan, and W. Ma, *New J. Phys.* **23**, 053003 (2021).
5. J. Xu, B. Shen, X. Zhang, Y. Shi, L. Ji, L. Zhang, T. Xu, W. Wang, X. Zhao, and Z. Xu, *Sci. Rep.* **8**, 2669 (2018).
6. A. E. Lita, A. J. Miller, and S. W. Nam, *Opt. Express* **16**, 3032 (2008).
7. Е. Г. Бессонов, *ЖЭТФ* **80**, 852 (1981).
8. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **114**(3), 156 (2021).
9. R. Arkhipov, A. Pakhomov, M. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Opt. Lett.* **44**, 1202 (2019).
10. A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, and R. Arkhipov, *Phys. Rev. A* **105**, 043103 (2022).
11. N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, and R. Arkhipov, *Phys. Rev. A* **104**, 063101 (2021).
12. A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, and R. Arkhipov, *Phys. Rev. A* **105**, 043103 (2022).
13. M. Th. Hassan, T. T. Luu, A. Moulet, F. Scheiba, M. A. Silva-Toledo, Sh.-H. Chia, Ph. D. Keathley, Sh. Fang, O. D. Mucke, C. Manzoni, G. Cerullo, G. Cirimi, and F. X. Kärtner, *Nature Photon.* **14**, 629 (2020).
14. M. V. Arkhipov, R. M. Arkhipov, A. V. Pakhomov, I. V. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Opt. Lett.* **42**, 2189 (2017).
15. A. V. Pakhomov, R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. Demircan, U. Morgner, N. N. Rosanov, and I. Babushkin, *Sci. Rep.* **9**, 7444 (2019).
16. M. I. Bakunov, A. V. Maslov, and M. V. Tsarev, *Phys. Rev. A* **95**, 063817 (2017).
17. M. V. Tsarev and M. I. Bakunov, *Opt. Express* **27**, 5154 (2019).
18. V. V. Kozlov, N. N. Rosanov, C. D. Angelis, and S. Wabnitz, *Phys. Rev. A* **84**, 023818 (2011).
19. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, Н. Н. Розанов, *Квантовая электроника* **50**, 801 (2020).
20. М. В. Архипов, Р. М. Архипов, Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **129**, 1173 (2021).
21. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, *Phys. Rev. E* **104**, 025202 (2021).
22. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, *Plasma Sources Sci. Technol.* **30**, 085001 (2021).
23. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, П. А. Образцов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 10 (2023).
24. Н. Н. Розанов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, *УФН* **188**, 1347 (2018).
25. Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **127**, 960 (2019).
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982), с. 436.
27. M. Kolesik and J. V. Moloney, *Phys. Rev. E* **70**, 036604 (2004).
28. A. Couairon, O. G. Kosareva, N. A. Panov, D. E. Shipilo, V. A. Andreeva, V. Jukna, and F. Nesa, *Opt. Express* **23**, 31240 (2015).
29. S. V. Sazonov, *Laser Phys. Lett.* **18**, 105401 (2021).
30. A. V. Bogatskaya and A. M. Popov, *Laser Phys. Lett.* **16**, 066008 (2019).
31. А. В. Богацкая, А. М. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **97**(7), 453 (2013) [*JETP Lett.* **97**(7), 388 (2013)].
32. A. V. Bogatskaya, A. M. Popov, and I. V. Smetanin, *J. Rus. Las. Research* **35**(5), 437 (2014).
33. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, *Photonics* **10**(2), 113 (2023).