

# Эффективный гамильтониан топологически защищенного кубита в геликоидальном кристалле

Р. А. Ниязов<sup>+\*1)</sup>, Д. Н. Аристов<sup>+\*\*×</sup>, В. Ю. Качоровский\*

<sup>+</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

\*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

× Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 20 июля 2023 г.

После переработки 25 июля 2023 г.

Принята к публикации 25 июля 2023 г.

Рассмотрена сверхрешетка, образованная туннельно связанными одинаковыми антиточками, периодически расположенными в двумерном топологическом изоляторе, помещенном в магнитное поле. Спектр сверхрешетки можно контролировать затворными электродами или меняя магнитный поток через антиточку. Показано, что на границе между двумя областями с разными потоками возникает топологически защищенный кубит, свойства которого зависят от скачка потока и могут управляться напряжением на затворах. Получен эффективный гамильтониан такого кубита, и проанализирована зависимость его свойств от основных параметров сверхрешетки: туннельной связи между антиточками и вероятности прыжков с переворотом спина.

DOI: 10.31857/S1234567823170123, EDN: kbpddk

**Введение.** Последнее десятилетие активно обсуждаются электрические и оптические свойства топологических изоляторов, т.е. материалов, объем которых является изолятором, а на границе существуют проводящие состояния [1, 2, 3]. Свойства этих состояний зависят от размерности материала. В двумерных топологических изоляторах на краю существуют геликоидальные краевые состояния (ГКС), переносящие бездиссипативный ток. Такие одномерные состояния характеризуются определенной киральностью, т.е. электроны с противоположным спином распространяются в противоположных направлениях. Обычный (немагнитный) беспорядок не может перевернуть спин электрона и именно благодаря этому свойству в таких каналах отсутствует рассеяние назад и диссипация.

Наиболее известная реализация двумерных топологических изоляторов – это квантовые ямы в соединениях на основе HgTe, топологические свойства которых были предсказаны теоретически [4, 5] и подтверждены серией экспериментов, включая измерения проводимости краевых состояний [6] и экспериментальные доказательства нелокального переноса [7–10].

Одним из новых и перспективных направлений

исследований является интерферометрия на основе ГКС. Наиболее интересные возможности возникают при наличии магнитного поля, которое привносит в проблему дополнительную физику, контролируя интерференцию за счет эффекта Ааронова–Бома (АБ). Этот эффект проявляется в объемных свойствах двумерных топологических изоляторов [11–15], а также в системах с ГКС и интерферометрах на их основе [15–21].

Обычно интерференция подавляется, когда температура,  $T$ , становится больше, чем расстояние между уровнями квантования в системе. Как было недавно теоретически продемонстрировано [18–21], это не так для АБ интерферометров на основе ГКС, где интерференция сохраняется даже для случая  $T \gg 2\pi v_F / (L_1 + L_2)$  (здесь  $L_{1,2}$  – длины плеч интерферометра, а  $v_F$  – скорость Ферми). Это означает, что интерференционные эффекты в системах на основе ГКС можно изучать при относительно высоких температурах, практически важных для различных приложений.

Одним из перспективных направлений дальнейших исследований является изучение метаматериалов на основе ГКС, таких как геликоидальные кристаллы. Такой кристалл можно создать путем химического травления отверстий через слой двумерного топологического материала. На краях таких отвер-

<sup>1)</sup>e-mail: r.niyazov@mail.ioffe.ru

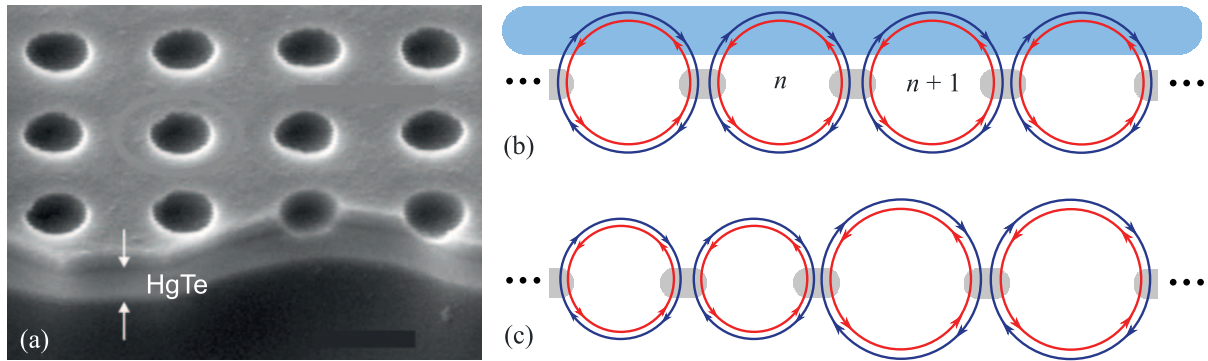


Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) Пример экспериментальной реализации геликоидального кристалла, взято из работы [22]. (b) – Одномерная цепочка геликоидальных колец, образованных ГКС (обозначены красным и синим цветом) соединенными туннельными или баллистическими контактами (обозначены серым цветом). Управляющий затвор приложен к верху кристалла (обозначен светло-голубым). (c) – Граница между двумя полубесконечными областями массива колец с разными радиусами, на которой происходит скачок потока и, как следствие, образование локализованного кубита

стей возникают ГКС, связанные между собой туннельно или электрически. Недавно уже сообщалось о первых экспериментальных реализациях систем периодически расположенных дырок в структурах на основе HgTe/CdTe [22, 23]. Изучались магнетотранспортные свойства периодических массивов таких дырок. Расстояние между дырками было достаточно велико, так что туннелирование между ГКС даже в топологической фазе было невозможно. Аналогичные структуры с более коротким расстоянием между вытравленными отверстиями и, следовательно, более сильной туннельной связью между ГКС, соответствующими соседним отверстиям, могли бы демонстрировать туннельный транспорт. Более того, туннельные барьеры между отверстиями можно контролировать с помощью затворных электродов. Таким образом, можно изготовить одно- или двумерный массив ГКС с туннельной связью. Такая система представляет собой геликоидальный кристалл.

Простейшая реализация такого кристалла, а именно, одномерный периодический массив близко расположенных одинаковых вытравленных отверстий [24] была недавно рассмотрена теоретически. Мы показали, что зонная структура кристалла может управляться как затворными электродами, так и внешним магнитным полем, изменяя магнитный поток через антиточку.

Было продемонстрировано, что изменение магнитного поля позволяет создавать в спектре точки Дирака. Такие точки появляются при особых значениях поля, соответствующих целому или полуцелому кванту магнитного потока через отверстие. Отклонение потока от специальных значений приводит к возникновению щелей, т.е. генерации конечной массы дираковских фермионов. В таком кристалле мож-

но создавать разного рода дефекты, например, вставляя в кристалл одну антиточку другого размера, через которую проходит магнитный поток, отличный от потока через другие точки. Можно также соединить две области с разными размерами антиточек, чтобы на границе возник скачок потока (см. рис. 1). Также скачок потока (СкП) можно создать, прикладывая неоднородное магнитное поле к массиву одинаковых точек. Как мы покажем ниже, СкП приводит к возникновению двукратно вырожденных топологически защищенных состояний типа Волкова–Панкратова [25]. Вырождение можно снять, изменив магнитное поле или, что еще важнее, чисто электрическим путем, изменив потенциалы затворов. Это означает формирование топологически защищенного кубита, которым можно манипулировать с помощью затворных электродов.

Целью настоящей работы является вывод эффективного гамильтониана, описывающего данный кубит и анализ зависимости свойств кубита от ключевых параметров сверхрешетки: туннельной связи между антиточками и вероятности туннельных прыжков с переворотом спина.

**Модель.** Мы изучаем одномерный массив антиточек (вытравленных отверстий) на поверхности двумерного спин-холловского изолятора (см. рис. 1a). На границах отверстий существуют ГКС, в целом образуя цепочку из одинаковых геликоидальных колец с длиной окружности  $L = L_1 + L_2$ , соединенных последовательно (см. рис. 1b); для простоты мы будем считать  $L_1 = L_2$ . Каждое кольцо содержит электроны, движущиеся по часовой стрелке и против часовой стрелки с энергией  $E$ , и импульсом  $k = E/v_F$ , со спинами, противоположными в каждой точке. К массиву приложено однородное магнитное

поле, которое создает поток  $\Phi$  в каждом кольце. В этой статье, мы ограничимся рассмотрением невзаимодействующей системы. Интересные задачи, которые возникают при учете электрон-электронного взаимодействия, будут сформулированы в заключении работы.

Предположим, что  $X$ -переход между двумя соседними кольцами с четырьмя каналами рассеяния описывается матрицей рассеяния общего вида (с точностью до несущественных фаз)  $\hat{S}$ , сохраняющей симметрию относительно обращения времени [26, 27]:

$$C'_\alpha = S_{\alpha\beta} C_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4; \quad (1)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & t & f & ir^* \\ t & 0 & ir & f \\ -f & ir & 0 & t \\ ir^* & -f & t & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $C'_\alpha$  и  $C_\beta$  – амплитуды исходящей и входящей волн соответственно, а действительные амплитуды  $t = \cos \alpha$ ,  $f = \sin \alpha \sin \beta$ ,  $r = \sin \alpha \cos \beta e^{i\nu/2}$  удовлетворяют условию  $t^2 + |r|^2 + f^2 = 1$ . Строго говоря, амплитуды  $t$  и  $f$  могут быть выбраны комплекснозначными, но их фаза выпадает из дисперсионных соотношений, обсуждаемых ниже, и может быть опущена, см. обсуждение в [24].

Физически, амплитуды  $r$  и  $f$  описывают перескоки между кольцами в состоянии с одинаковой и противоположной проекциями спина соответственно. Параметр  $\alpha$  связан с полной вероятностью такого скачка:  $|r|^2 + f^2 = \sin^2 \alpha$ . Иными словами, угол  $\alpha$  отвечает за туннельную связь между кольцами, и при  $\alpha = 0$  кольца независимы. Для туннельного контакта ( $\alpha \ll 1$ ), величина  $\alpha$ , в основном, определяется расстоянием туннелирования. Случай баллистического (или металлического) контакта, когда кольца сильно связаны, соответствует  $\alpha \approx \pi/2$ . Угол  $2\beta$  – это угол между осями квантования спина в различных спиральных состояниях [28], а элементы  $r$  и  $f$  пропорциональны перекрытию спинов в ГКС в соседних антиточках. Соответственно,  $\beta$  отвечает за вероятность спин-флип перескоков между кольцами. При  $\beta = 0$ , амплитуда  $f$  также обращается в ноль и, как следствие, процессы с переворотом спина отсутствуют.

Фаза  $\nu$  является чрезвычайно важным параметром, от которого зависит качественная картина спектра. Принципиально важно, что этим параметром можно управлять чисто электрически, меняя напряжение на затворах [24].

Далее вводится матрица переноса,  $\hat{T}$ , описываю-

щая переход от  $n$ -й к  $(n+1)$ -й ячейке спирального кристалла:

$$\hat{T} = \hat{P}\hat{T}_0 \quad (3)$$

где  $T_0$  и  $P$  описывают переходы через контакт и кольцо соответственно. Матрица контакта,  $T_0$ , соответствует матрице  $\hat{S}$  и выражает амплитуды волновой функции в  $(n+1)$ -м кольце (сразу после контакта) через амплитуды в  $n$ -м кольце (непосредственно перед контактом). Матрица

$$\hat{P} = \text{diag}[e^{i\varphi_b}, e^{-i\varphi_a}, e^{i\varphi_a}, e^{-i\varphi_b}], \quad (4)$$

содержит фазы, приобретаемые внутри кольца при переходе от левого контакта к правому:

$$\varphi_a = \frac{\varepsilon}{2} - \pi\phi, \quad \varphi_b = \frac{\varepsilon}{2} + \pi\phi, \quad (5)$$

где мы ввели безразмерную энергию и безразмерный поток:

$$\varepsilon = \frac{EL}{v_F} = kL, \quad \phi = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (6)$$

где  $\Phi_0$  – квант потока.

**Общее дисперсионное уравнение.** Зонная структура кристалла определяется из соотношения, связывающего амплитуды на  $n$ -м кольце с амплитудами на  $(n+1)$ -м кольце  $\psi_{n+1} = \hat{T}\psi_n = e^{iq}\psi_n$ . Это приводит к уравнению:

$$\det[\hat{1}e^{iq} - \hat{T}] = 0, \quad (7)$$

где  $\hat{1}$  – это  $4 \times 4$  единичная матрица. Результирующее дисперсионное уравнение  $\varepsilon(q)$  может быть найдено в неявной форме:

$$\begin{aligned} & (\cos \beta \sin(\varepsilon/2 + \pi\phi) + \sin \alpha \cos(q - \nu/2)) \times \\ & \times (\cos \beta \sin(\varepsilon/2 - \pi\phi) + \sin \alpha \cos(q + \nu/2)) + \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha \cos 2\pi\phi - \sin^2 \alpha \cos \nu - \cos \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

**Дираковские точки.** Наиболее интересное свойство уравнения (8) – наличие дираковских точек в зависимости  $\varepsilon(q)$ . Такие точки появляются при целых и полуцелых значениях безразмерного потока. Дираковские точки появляются в окрестности целых значений  $q/\pi$  для целых  $\phi$  и полуцелых значений  $q/\pi$  – для полуцелых  $\phi$ . Сначала обсудим спектр для случая близкого к целому значению потока. Положение дираковских точек можно представить в виде:  $\varepsilon_{\text{DP}} = 2\pi n - 2(-1)^{n+m+p}\Theta$ ,  $\phi_{\text{DP}} = p$ ,  $q_{\text{DP}} = \pi m$ . Здесь  $n, p$  – целые числа,  $m = (-1, 0)$ , а  $\Theta = \arcsin[\sin \alpha \cos \beta \cos(\nu/2)]$ . Для слабой туннельной связи величина  $\Theta$  мала:  $\Theta \propto \alpha \ll 1$ .

В окрестности дираковских точек спектр можно записать в виде [24]:

$$\delta\varepsilon = \pm\sqrt{(A\delta q + B\delta\phi)^2 + C^2(\delta\phi)^2}, \quad (9)$$

где  $\delta\varepsilon$ ,  $\delta q$ , и  $\delta\phi$  отсчитываются от значений  $\varepsilon_{\text{ДР}}$ ,  $q_{\text{ДР}}$  и  $\phi_{\text{ДР}}$ , соответственно. Как следует из этого уравнения, щель в спектре определяется выражением

$$\Delta_{\text{ДР}} = 2C|\delta\phi|. \quad (10)$$

Коэффициенты  $B$  и  $C$  одинаковы для всех дираковских точек, тогда как  $A$  имеет разный знак, но одинаковые абсолютные значения:  $A = 2(-1)^{n+m+p} \sin\alpha \sin\xi / \cos\Theta$ ,  $B = 2\pi \cos\beta \sin(v/2) / \sin\xi$ ,  $C = 2\pi \cos\alpha \sin\beta / (\sin\xi \cos\Theta)$ , и  $\xi = \arccos[\cos\beta \cos(v/2)]$ .

Заметим, что  $A \rightarrow 0$  для  $\alpha \rightarrow 0$ , таким образом отражая существование плоских зон в этом пределе. О дираковских точках имеет смысл говорить, если ширина зоны больше величины дираковской щели,  $A \gg \Delta_{\text{ДР}}$ .

При  $\beta = 0$ , геликоидальные каналы не связаны друг с другом. В этом случае,  $C = 0$  и спектр приобретает вид

$$\delta\varepsilon = |A\delta q + B\delta\phi|. \quad (11)$$

Следовательно, в этом частном случае мы имеем бесщелевой спектр для любого значения  $\delta\phi$ .

Спектр для случая почти полужелтых значений потока  $\phi$  имеет другой набор дираковских точек:  $\varepsilon_{\text{ДР}} = 2\pi(n + \frac{1}{2}) - 2(-1)^{n+m+p}\Theta$ ,  $\phi_{\text{ДР}} = m + 1/2$ ,  $q_{\text{ДР}} = \pi p + \pi/2$ . Уравнение (9) остается верным в этом случае с заменой  $v \rightarrow v + \pi$  в коэффициентах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и в определениях  $\Theta$  и  $\xi$ . При малых  $v \ll 1$  выражения для коэффициентов в (9) упрощаются,  $A \simeq 2(-1)^{n+m+p} \sin\alpha$ ,  $B \simeq 2\pi \cos\beta$ ,  $C \simeq 2\pi \cos\alpha \sin\beta$ ,  $2\Theta \simeq -v \sin\alpha \cos\beta$ .

**Эффективный гамильтониан для дираковской точки.** Возможно, самый простой способ получить эффективный гамильтониан вблизи точек Дирака – это “возвести в квадрат” дисперсионное соотношение. А именно, вместо (7) мы рассматриваем матрицу перехода ко второму соседу,  $\psi_{n+2} = \hat{T}^2\psi_n = e^{2iq}\psi_n$ , что приводит к уравнению

$$\det[\hat{1}e^{i2q} - \hat{T}^2(\varepsilon)] = 0. \quad (12)$$

Для конкретности рассмотрим  $\phi \simeq 1/2$ , когда положения точек Дирака даются  $q_{\text{ДР}} = \pm\pi/2$ , так что  $e^{2iq_{\text{ДР}}} = -1$ . Можно проверить, что  $\hat{T}^2 = -\hat{1}$  также и для  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ДР}}$ , хотя  $\hat{T}$  при этом не диагональна. Это свойство упрощает разложение вблизи точек Дирака:  $q = \pm\pi/2 + \delta q$ ,  $\varepsilon = \pi + \delta\varepsilon$ ,  $\phi = 1/2 + \delta\phi$ ,  $v = \delta v$

( $\delta\phi \ll 1$ ,  $\delta q \ll 1$ ,  $\delta v \ll 1$ ). Зависимость от энергии в (12) содержится в матрице  $\hat{P}$ , которая входит в определение  $\hat{T}$ . Разлагая эту матрицу по  $\delta\varepsilon$  вплоть до второго порядка малости, напишем

$$\hat{P} = \hat{P}_\pi(1 - \hat{I}\delta\varepsilon/2 - \delta\varepsilon^2/8). \quad (13)$$

Здесь  $\hat{P}_\pi = \hat{P}(\varepsilon = \pi)$  и  $\hat{I} = \text{diag}[-i, i, -i, i]$ .

Для того, чтобы получить эффективный гамильтониан, описывающий кристалл в окрестности дираковской точки, мы в качестве первого шага разложим выражение под детерминантом в (12) по  $\delta\varepsilon$  вплоть до второго порядка малости:

$$(\hat{M}_0 + \hat{M}_1\delta\varepsilon + \hat{M}_2\delta\varepsilon^2)\psi_n = 0, \quad (14)$$

где

$$\hat{M}_0 = (P_\pi T_0)^2 - e^{2iq},$$

$$\hat{M}_1 = -\frac{1}{2}P_\pi(\hat{T}_0\hat{I} + \hat{I}T_0)P_\pi T_0, \quad (15)$$

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{4}\hat{P}_\pi\hat{I}(T_0\hat{I} + \hat{I}T_0)P_\pi T_0.$$

При выводе мы использовали, что  $[\hat{I}, \hat{P}_\pi] = 0$ . Уравнение (14) переписывается в виде

$$(\hat{1}\delta\varepsilon + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0 + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2\delta\varepsilon^2)\psi_n = 0. \quad (16)$$

Домножая слева на  $(\hat{1} - \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2\delta\varepsilon)$  и отбрасывая слагаемые  $\sim \delta\varepsilon^3$ , получим  $((\hat{1} - \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)\delta\varepsilon + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)\psi_n = 0$ . Это можно представить в виде уравнения Шредингера

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon\psi_n &= -(\hat{1} - \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)^{-1}\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0\psi_n \simeq \\ &\simeq -(\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0 + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2(\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)^2)\psi_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Следующий шаг – провести разложение по  $\delta\phi$ ,  $\delta q$  и  $\delta v$ . Как несложно увидеть, матрица  $\hat{M}_0$  тождественно обращается в ноль при  $\delta\phi = \delta q = \delta v = 0$ . Поэтому,  $\delta\varepsilon$  мало. В дальнейшем мы будем считать, что  $\delta\varepsilon \lesssim \delta\phi \sim \delta q \sim \delta v$ . Тогда последний член в (17) мал и в первом порядке малости его можно отбросить.

*Первый порядок по  $\delta\phi$ ,  $\delta v$ ,  $\delta q$  and  $\delta\varepsilon$ .* Сначала мы проведем вычисления в линейном порядке по  $\delta\phi$ ,  $\delta v$ ,  $\delta q$  и  $\delta\varepsilon$ . В этом порядке имеем,

$$(\hat{1}\delta\varepsilon + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)\psi_n = 0. \quad (18)$$

Заметим, что матрица  $\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0$  не эрмитова, но может быть приведена к эрмитовой форме преобразованием подобия  $\hat{R}$ . Возникающий после такого преобразования эрмитов оператор

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(1)} = -\hat{R}^{-1}\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0\hat{R} \quad (19)$$

обладает тем же законом дисперсии (в окрестности дираковской точки) и имеет смысл эффективного гамильтониана.

Выбор матрицы  $\hat{R}$  неоднозначен и заслуживает отдельного комментария. Опуская простые технические детали, мы изложим общую идею. Для начала можно найти матрицу, диагонализующую  $\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0$  в простейшем случае  $\delta\phi = 0$ . При этом диагонализующая матрица  $R_*$  может быть без ограничения общности умножена справа на диагональную матрицу  $\hat{C} = \text{diag}[c_1, c_2, c_3, c_4]$ , с произвольными коэффициентами  $c_i$ . Без ограничения общности, можно потребовать условия  $c_1 c_2 c_3 c_4 = 1$  и параметризовать  $\hat{C}$  в следующем виде  $\hat{C} = \text{diag}[ac, ac^{-1}, a^{-1}c', a^{-1}c'^{-1}]$ . Действуя теперь матрицей  $R_*$  на  $\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0$  при  $\delta\phi \neq 0$ , мы получаем блочную матрицу,

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Гамильтонианы  $\mathcal{H}_{1,2}$  недиагональны (в меру  $\delta\phi$ ) и, вообще говоря, не являются эрмитовыми, но могут быть приведены к эрмитовому виду при определенных  $c, c'$ . Таким образом, анализ в рамках низшего порядка оставляет произвол в виде произвольного коэффициента  $a$ . Как будет видно из анализа более высоких порядков, естественно выбрать  $|a| = 1$  и подобрать удобным образом фазу этого коэффициента.

Соответствующая матрица подобия принимает вид:

$$R = \begin{pmatrix} -i\tau^\alpha\tau^\beta & i & -\tau^\beta & \tau^\alpha \\ 1 & \tau^\alpha\tau^\beta & -i\tau^\alpha & -i\tau^\beta \\ \tau^\alpha & \tau^\beta & -i & -i\tau^\alpha\tau^\beta \\ -i\tau^\beta & i\tau^\alpha & -\tau^\alpha\tau^\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\tau^\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \tau^\beta = \tan\frac{\beta}{2},$$

а блоки эффективного гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \delta v \sin \alpha \cos \beta \sigma_0 + 2\pi\delta\phi \cos \alpha \sin \beta \sigma_1 + \\ &+ (2\pi\delta\phi \cos \beta + 2\delta q \sin \alpha) \sigma_3, \\ \mathcal{H}_2 &= -\delta v \sin \alpha \cos \beta \sigma_0 + 2\pi\delta\phi \cos \alpha \sin \beta \sigma_1 + \\ &+ (2\pi\delta\phi \cos \beta - 2\delta q \sin \alpha) \sigma_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\sigma_{1,3}$  – матрицы Паули, а  $\sigma_0$  – единичная матрица. Эти формулы согласуются с уравнением (9) выше.

Блок  $\mathcal{H}_2$  гамильтониана можно получить из  $\mathcal{H}_1$  заменой  $\delta q \rightarrow -\delta q$  и  $\delta v \rightarrow -\delta v$  (или  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ). Член с  $\delta v$  может быть поглощен сдвигом энергии в каждом из двух блоков:

$$E_1 = -E_2 = -W, \quad (23)$$

где

$$W = \delta v \cos \beta \sin \alpha. \quad (24)$$

Поэтому мы можем обсудить только блок  $\mathcal{H}_1$ . Малый сдвиг волнового вектора,  $\delta q \ll 1$ , можно представить как движение электрона вдоль массива колец,  $\delta q = -id/dx$ , где  $x$  – координата вдоль этого массива в единицах диаметра кольца,  $L/\pi$ . Делая перемасштабирование этой безразмерной координаты:  $2 \sin \alpha \bar{x} = x$ , находим  $2 \sin \alpha \delta q = -i \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ . Наконец,  $\bar{\mathcal{H}}_1$  становится гамильтонианом массивной дираковской частицы:

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\phi} - i \frac{\partial}{\partial \bar{x}} & h \\ h & -\bar{\phi} + i \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $\bar{\phi} = 2\pi\delta\phi \cos \beta$  и  $h = 2\pi\delta\phi \sin \beta \cos \alpha$ . Дисперсия такого гамильтониана для плоской волны  $e^{i\bar{q}\bar{x}}$  определяется выражением  $E^2 = (\bar{q} + \bar{\phi})^2 + h^2$ , где

$$\bar{q} = 2 \sin \alpha \delta q = -i \frac{d}{d\bar{x}}. \quad (26)$$

Второй порядок по  $\delta\phi, \delta v, \delta q$  and  $\delta\epsilon$ . Разложим теперь уравнение (12) до второго порядка по  $\delta\phi, \delta q$  и  $\delta\epsilon$ . Для этого используем следующие выражения:

$$\det[\delta\epsilon + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0 + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2(\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)^2] = 0, \quad (27)$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -R^{-1}(\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0 + \hat{M}_1^{-1}\hat{M}_2(\hat{M}_1^{-1}\hat{M}_0)^2)R. \quad (28)$$

Поправки к  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  бывают двух типов: поправки к  $\bar{\mathcal{H}}_1$  и  $\bar{\mathcal{H}}_2$ , которые не приводят к антипересечению и могут быть здесь опущены, а также блочно-внедиагональные поправки, которые даются формулой

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{V} \\ \hat{V}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

С описанной выше точностью мы находим

$$\begin{aligned} \hat{V} &= (\delta q^2 - \pi^2 \delta\phi^2 \sin^2 \beta) \sin 2\alpha \hat{\sigma}_3 + \\ &+ \pi^2 \delta\phi^2 \sin \alpha \sin 2\beta \hat{\sigma}_1, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) – матрицы Паули.

**Скачки потока в кристалле: топологически защищенные локализованные состояния.** Обсудим теперь локализованные состояния вблизи СкП. Предположим, что имеются две полубесконечные области массива с разным значением потока (см. рис. 1с). В первой области при  $x < 0$  поток меньше  $1/2$ ,  $\phi = 1/2 - \delta\phi$ , а во второй, при  $x > 0$ , имеют  $\phi = 1/2 + \delta\phi$ . Задача полностью аналогична рассмотренной в работе [25]. Тогда на границе раздела

двух областей возникают два (поскольку гамильтониан имеет два блока) вырожденных локализованных состояния типа Волкова–Панкратова:

$$\begin{aligned} \psi_1^{\text{loc}} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(|h|+i|\bar{\phi}|)|\bar{x}|}, \\ \psi_2^{\text{loc}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-(|h|-i|\bar{\phi}|)|\bar{x}|}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что мы опустили префактор  $(-1)^n = \exp(\pm i\pi x)$  в обеих функциях, что соответствует упомянутому сдвигу  $\delta q = q \pm \pi/2$  выше. Мы видим, что длины локализации этих локализованных состояний равны

$$L_{\text{loc}} = L \frac{\tan \alpha}{\pi^2 \delta \phi \sin \beta}. \quad (32)$$

При выводе мы предположили, что  $L_{\text{loc}} \gg L$ . При  $\delta v = 0$ , энергия, соответствующая этим вырожденным состояниям, лежит точно в середине дираковской щели, как и в задаче, обсуждаемой в [25].

Полученные выше локализованные топологически защищенные состояния образуют двухуровневую систему, или кубит. Энергетические уровни этой системы зависят от параметра  $\delta v$ , управляющего асимметрией системы вверх-вниз. Изменяя  $\delta v$  электродами затвора, можно манипулировать уровнями энергии  $E_1 = E_1(\delta v)$  и  $E_2 = E_2(\delta v)$ , которые пересекаются друг с другом при  $\delta v = 0$ . В этой точке уровни двукратно вырождены в низшем приближении по  $\delta \phi$ ,  $\delta q$ .

В следующем разделе мы покажем, что на самом деле, между этими уровнями имеется антипересечение, так что возникает “отталкивание уровней” из-за поправок к эффективному гамильтониану, см. (30).

**Эффективный гамильтониан кубита.** Проецируя  $H_{\text{eff}}^{(1)} + H_{\text{eff}}^{(2)}$  на два локализованных состояния, ур. (31), мы получаем гамильтониан кубита, образованного  $\psi_1^{\text{loc}}$  и  $\psi_2^{\text{loc}}$ :

$$\mathcal{H}_{\text{qubit}} = \begin{pmatrix} W & \Delta \\ \Delta^* & -W \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Здесь  $W$  линейно зависит от  $\delta v$  согласно уравнению (24),  $\Delta = \Delta_x - i\Delta_y = 2\pi\delta\phi^2 \cot \alpha \sin \beta (i \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta)$ . Соответствующие энергетические уровни даются выражением

$$E_{\text{qubit}}^{\pm} = \pm \sqrt{W^2 + |\Delta|^2}, \quad (34)$$

где

$$|\Delta| = 2\pi^2 \delta \phi^2 \sin \beta \cos \alpha \sqrt{\cot^2 \alpha + \sin^2 \beta}. \quad (35)$$

Уровни кубита изображены на рис. 2. Расстояние между уровнями зависит от туннельной связи между антиточками, контролируемой параметром  $\alpha$ , и

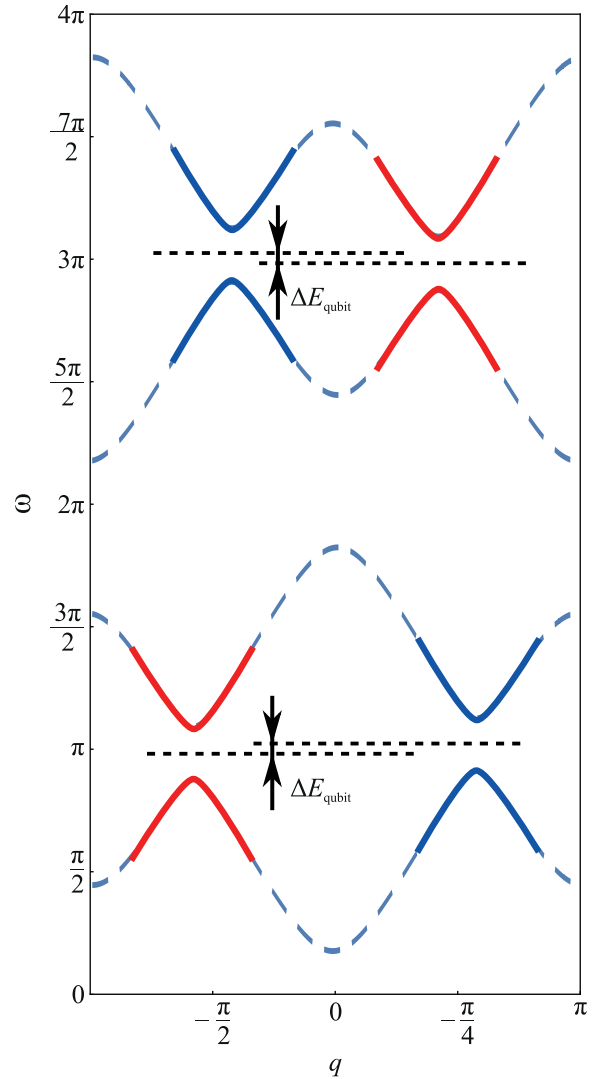


Рис. 2. (Цветной онлайн) Дисперсия низколежащих зон геликоидального кристалла. Вертикальное расстояние между дираковскими точками контролируется параметром  $v$ . Пунктирные линии показывают положение локализованных уровней, которые возникают при наличии скачка потока в кристалле.  $\Delta E_{\text{qubit}} = E_{\text{qubit}}^+ - E_{\text{qubit}}^-$ , см. уравнение (34)

от вероятности туннельного прыжка с переворотом спина, которая зависит от  $\beta$ . Видно, что в отсутствие спин-флип процессов, т.е. при  $\beta = 0$ , мы имеем

$\Delta = 0$ . Заметим также, что в пределе малых  $\alpha$  выражение (35) можно представить в виде

$$|\Delta| \propto |\delta\phi| \Delta_{\text{ДР}}/A, \quad (36)$$

откуда видно, что стационарный кубит существует при  $|\delta\phi| < A \propto \alpha$ . В противном случае,  $|\delta\phi| \geq A$ , уровни кубита переходят в сплошной спектр,  $|\Delta| \geq \Delta_{\text{ДР}}$ , т.е. становятся резонансами и распадаются за конечное время. Таким образом, для существования стационарного кубита туннельная связь между антиоточками должна быть не слишком маленькой.

Кубит эквивалентен спину  $1/2$  в “магнитном поле”

$$\mathbf{V}_{\text{qubit}} = (\Delta_x, \Delta_y, W). \quad (37)$$

Самое главное, что “магнитное поле”  $\mathbf{V}_{\text{qubit}}$  на самом деле зависит от напряжения на затворе и может управляться чисто электрическим способом. Заметим также, что такие кубиты существуют во всех зонах, так что при высокой температуре в температурном окне находится ансамбль кубитов, числом  $\sim TL/v_F$ . Этими кубитами можно когерентно управлять с помощью вентиля и магнитного поля.

**Выводы.** В настоящей работе, мы построили теорию перестраиваемого кристалла, образованного периодическим набором одинаковых отверстий в двумерном топологическом изоляторе. Мы продемонстрировали, что туннельным транспортом через такой массив можно управлять как магнитным полем, так и чисто электрическим путем, используя различные конфигурации электродов затвора.

Мы вывели эффективный гамильтониан, описывающий топологически защищенные локализованные состояния, возникающие около СкП в таком кристалле. Конкретно, мы показали, что на границе между областями с разными радиусами колец (или между двумя областями с разным магнитным полем), возникают два локализованных состояния, которые образуют кубит, помещенный в эффективное “магнитное поле”  $\mathbf{V}_{\text{qubit}}$ , см. уравнение (37). Принципиально важно, что эффективное поле зависит от напряжения на затворе, так что состоянием кубита можно управлять чисто электрически.

В кристалле с несколькими границами между разными областями возникают пространственно разделенные кубиты. Меняя (адиабатически или резко) внешние параметры, например, напряжение на затворе, от которого зависит  $\mathbf{V}_{\text{qubit}}$ , можно контролировать одиночный кубит и создавать запутанные состояния с участием кубитов, находящиеся на разных границах. Более того, даже на одной границе может возникнуть ансамбль из  $N \sim TL/v_F$  топологически защищенных кубитов при относительно высоких

температурах,  $T \gg v_F/L$ , когда температурное окно охватывает много зон кристалла и, следовательно, включает множество массивных конусов Дирака. Анализ квантовых вычислений ансамблем энергетически разделенных кубитов в интерферометре АБ был представлен в нашей недавней работе [19]. Обобщение результатов [19] на геликоидальный кристалл является интересной задачей для дальнейшего развития интерферометрии на основе ГКС.

Наметим также ряд проблем, которые можно было бы рассмотреть в дальнейших исследованиях. Наиболее интересным представляется изучение роли электрон-электронного взаимодействия. Такое взаимодействие может привести к нескольким нетривиальным эффектам. Во-первых, при учете этого взаимодействия возможна реконструкция края [29] для некоторых моделей удерживающего потенциала на краю образца. В этом случае, при определенных предположениях относительно краевого потенциала, может возникнуть больше двух краевых проводящих состояний. Кроме того, взаимодействие приводит к перенормировке матрицы рассеяния, описывающей перескоки между соседними кольцами. Такая перенормировка может сильно менять параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие перескоки между соседними кольцами [27]. Наконец, межэлектронное взаимодействие приводит к дефазировке геликоидальных состояний. Было бы интересно прояснить, как такая дефазировка будет влиять на времена релаксации (так называемое время  $T_1$ ) и дефазировки (время  $T_2$ ) кубита. Ожидается, что при низких температурах,  $T \ll \Delta_{\text{ДР}}$ , скорость релаксации,  $T_1^{-1}$ , будет подавлена по аналогии со сверхпроводящим случаем, когда температура становится ниже сверхпроводящей щели [30], в отличие от дефазировки, определяющейся виртуальными процессами. Также интересно проанализировать эффекты, связанные с несовершенством кристалла, которые приводят к случайным компонентам в матрице переноса. На качественном уровне такие эффекты должны приводить к появлению конечной длины локализации. Соответствующий теоретический анализ должен быть аналогичен анализу локализации в одномерной бесспиновой цепочке со случайной матрицей перескока между узлами (см. [31, 32]). Анализ этих важных проблем выходит за рамки данной статьи и может быть рассмотрен в будущих исследованиях.

Таким образом, мы продемонстрировали возможность создания управляемых кубитов в геликоидальном кристалле. Наиболее интересные приложения полученных результатов в области квантовых вычислений появляются за счет возможности чи-

сто электрического высокотемпературного управления кубитами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда грант # 20-12-00147-П. Работа Р. А. Ниязова частично поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

1. B. Bernevig and T. Hughes, *Topological Insulators and Topological Superconductors*, Princeton University Press, Princeton (2013).
2. M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
3. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
4. C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).
5. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S. C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006).
6. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Science* **318**, 766 (2007).
7. A. Roth, C. Brüne, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Science* **325**, 294 (2009).
8. G. M. Gusev, Z. D. Kvon, O. A. Shegai, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, and J. C. Portal, *Phys. Rev. B* **84**, 121302 (2011).
9. C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, E. M. Hankiewicz, L. W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Nat. Phys.* **8**, 485 (2012).
10. A. Kononov, S. V. Egorov, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, and E. V. Deviatov, *JETP Lett.* **101**, 814 (2015).
11. H. Peng, K. Lai, D. Kong, S. Meister, Y. Chen, X. L. Qi, S. C. Zhang, Z. X. Shen, and Y. Cui, *Nat. Mater.* **9**, 225 (2010).
12. B. C. Lin, S. Wang, L. X. Wang, C. Z. Li, J. G. Li, D. Yu, and Z. M. Liao, *Phys. Rev. B* **95**, 235436 (2017).
13. J. H. Bardarson, P. W. Brouwer, and J. E. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 156803 (2010).
14. J. H. Bardarson and J. E. Moore, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 56501 (2013).
15. G. Gusev, Z. Kvon, O. Shegai, N. Mikhailov, and S. Dvoretzky, *Solid State Commun.* **205**, 4 (2015).
16. P. Delpierre, J. Li, and M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 246803 (2012).
17. F. Dolcini, *Phys. Rev. B* **83**, 165304 (2011).
18. R. A. Niyazov, D. N. Aristov, and V. Y. Kachorovskii, *Phys. Rev. B* **98**, 045418 (2018).
19. R. A. Niyazov, D. N. Aristov, and V. Y. Kachorovskii, *npj Computational Materials* **6**, 174 (2020).
20. R. A. Niyazov, D. N. Aristov, and V. Y. Kachorovskii, *Phys. Rev. B* **103**, 125428 (2021).
21. R. A. Niyazov, D. N. Aristov, and V. Y. Kachorovskii, *JETP Lett.* **113**, 689 (2021).
22. H. Maier, J. Ziegler, R. Fischer, D. Kozlov, Z. D. Kvon, N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, and D. Weiss, *Nat. Commun.* **8**, 2023 (2017).
23. J. Ziegler, *Quantum transport in HgTe topological insulator nanostructures*, Ph.D. thesis, University of Regensburg, Regensburg (2019).
24. R. A. Niyazov, D. N. Aristov, and V. Y. Kachorovskii, (2023), *Phys. Rev. B* **108**, 075424 (2023).
25. B. A. Volkov and O. A. Pankratov, *JETP Lett.* **42**, 178 (1985).
26. J. C. Y. Teo and C. L. Kane, *Phys. Rev. B* **79**, 235321 (2009).
27. D. N. Aristov and R. A. Niyazov, *Phys. Rev. B* **94**, 035429 (2016).
28. D. N. Aristov, I. V. Gornyi, D. G. Polyakov, and P. Wölffe, *Phys. Rev. B* **95**, 155447 (2017).
29. J. Wang, Y. Meir, and Y. Gefen, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 046801 (2017).
30. S. V. Maleyev, A. G. Yashenkin, and D. N. Aristov, *Phys. Rev. B* **50**, 13825 (1994).
31. V. I. Perel and D. G. Polyakov, *JETP* **59**, 204 (1984).
32. A. P. Dmitriev, *JETP* **68**, 132 (1989).