Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.6, стр.309 - 312 25 марта 1992 г.

РЕНОРМГРУППОВОЙ ПОТОК НА АФФИННО-ВИРАСОРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СПОРАДИЧЕСКИЕ КОНФОРМНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики

113556, Москва

Поступила в редакцию 22 ноября 1991 г.

После переработки 12 февраля 1992 г.

Предложена и частично исследована точно решаемая модель, воплощающая упрощенный вариант программы Герасимова-Лебедева-Морозова построения полной теории струны.

Недавно предложенная программа Герасимова-Лебедева-Морозова (ГЛМ) [1,2] построения полной теории струны (то есть вне массовой поверхности) трактует струнную теорию как некоторую динамическую теорию на подходящем конфигурационном пространстве, которое включает все $2d$-конформные теории поля (CFT) в качестве "особых точек", а также все интегрируемые модели, обеспечивающие связность конфигурационного пространства (то есть ренормгрупповую (RG) интерполяцию между двумя CFT, являющимися фиксированными точками RG-потока) и, кроме того, возможно, q-деформации CFT и интегрируемых моделей, которые необходимо включить из соображений полноты теории.

1. Нашей целью является построение простой модели, на которой основные идеи ГЛМ-программы допускали бы явную конструктивную реализацию. Остановимся в этой связи на тех пунктах ГЛМ-программы, которые найдут отражение в нашей модели. (Мы несколько отступаем от авторской формулировки ГЛМ-программы с целью приспособить общие положения к конкретной модели). а) Конфигурационное пространство включает некоторый (а не весь, как у ГЛМ) набор CFT, который обозначим через $\mathcal{C}$. б) Для некоторого поднабора из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ пар CFT строится RG-поток, соединяющий пары CFT, при этом модели, лежащие на RG-траектории включаются в конфигурационное пространство. в) Осуществляется теоретико-полевой предел по числу полей ($SU(\infty) - WZNW$), что наделяет пространство модулей (в пространстве мишеней) структурой универсального грассманова многообразия и приводит к

появлению алгебры двойных петель. г) Формулируется динамический принцип на конфигурационном пространстве моделей, причем действие является функционалом на некотором эффективном пространстве петель, возникающем путем "стягивания" двукратных петель по КМ-петлям. д) Стохастическое квантование построенной динамической системы на конфигурационном пространстве в рамках стабилизационной процедуры Гринсайта-Галперна-Маринари-Паризи [3,4]. е) Квантовые деформации (q-деформации) моделей, расширяющие конфигурационное пространство.

В данной статье мы рассмотрим задачу восстановления конфигурационного пространства согласно указанной выше процедуре по аффинно-вирасоровским (AV) моделям [5-8] специального вида [9], допускающим спорадические маргинальные деформации (впервые обнаруженные в [7]), пространством модулей (в пространстве мишеней) которых являются грассмановы многообразия.

2.Начнем с перечисления AV-моделей, которые в нашей конструкции будут являться аналогами классических вакуумных решений (CFT) полной теории струны. Как показано в [9], решения аффинно-вирасоровского управляющего уравнения [5,7]

$$t^{ab} = 2kt^{ac}\eta_{cd}t^{db} - t^{cd}t^{ef}f^{a}_{ce}f^{b}_{df} - t^{cd}f^{f}_{ce}f^{(a}_{df}t^{b)e} \tag{1}$$

для "тензора инерции" t_{ab}, определяющего вид тензора энергии-импульса

$$T(z) = t^{ab}(J_aJ_b)(z), \tag{2}$$

построенного на алгебре токов $\mathcal{G}^k$:

$$J_a(x)J_b(z) = \frac{k\eta_{ab}}{(x-z)^2} + \frac{if^c_{ab}J_c(z)}{(x-z)} + \text{reg}.t, \tag{3}$$

допускают многопараметрические маргинальные деформации при некоторых специальных выборах алгебры токов $\mathcal{G}^k$. Выделим два специальных анзаца, а именно, корневой на $SU(N)^1$:

$$T(z) = \sum_{\alpha\in\Phi_+} S_\alpha(E^\alpha E^{-\alpha} + E^{-\alpha}E^\alpha)(z) \tag{4}$$

и диагональный на $SO(N)^2$:

$$T(z) = \sum_{i<j}^{N} U_{ij}(X^{ij}X^{ij})(z), \tag{5}$$

имеющие при $S_{\hat{l}_i - \hat{l}_j} = U_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_\mu R^\mu_i R^\mu_j$ в качестве пространства модулей маргинальных деформаций грассманово многообразие $G_c(\mathrm{R}^{N-1}) = V_c(\mathrm{R}^{N-1})/O(c)$, где c - центральный заряд алгебры Вирасоро и многообразие Штифеля запараметризовано посредством репера R^μ_i, удовлетворяющего условиям: $\sum_i R^\mu_i R^\nu_i = \delta^{\mu\nu}$ и $\sum_i R^m_i = 0$. Итак, в нашем распоряжении имеется два класса неабелевых AV-моделей: $\mathcal{C}^1$ на $SU(N)^1$ и $\mathcal{C}^2$ на $SO(N)^2$.

3. Получим обобщенное уравнение Книжника-Замолодчикова (КЗ) для анзаца вида (2). Пусть τ^a - генераторы $\mathcal{G}$ в представлении со старшим весом λ и Φ_β-поля, преобразующиеся по этому представлению. Нетрудно убедиться в том, что при выполнении условия (1) поле $J^\beta_\alpha(z) = t_{ab}((\tau^a)^\beta_\alpha J^b(z) + J^a(z)(\tau^b)^\beta_\alpha)$ является током, то есть примарным полем спина 1. Далее, используя связи на корреляторы, следующие из существования нулевого вектора

$$|\chi> = (L_{-1} - J_{-1})|\Phi>,$$

и применяя тождество Уорда, находим следующее обобщение уравнения КЗ:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} - 2\sum_{j=1}^{n}{}^{(i)}\frac{t_{ab}\tau_i^a \otimes \tau_j^b}{z_i - z_j} < \Phi_1(z_1)...\Phi_n(z_n) >= 0. \qquad (6)$$

Аномальные размерности $\Delta(\lambda)$ для полей Φ_α находятся из решения матричного уравнения на собственные значения:

$$\det \| t_{ab}(\tau^a\tau^b)^\alpha_\beta - \Delta(\lambda)\delta^\alpha_\beta \| = 0. \qquad (7)$$

4. Исследуем структуру гильбертова пространства моделей и найдем спектр аномальных размерностей. В случае $\mathcal{C}^1$ интегрируемыми являются все фундаментальные представления $SU(N)$ со старшими весами $\omega_1, ..., \omega_{N-1}$. Аномальные размерности во всех представлениях, вообще говоря, полностью расщеплены и непрерывным образом зависят от параметров деформации:

$$\Delta_A(\omega_J) = \frac{1}{2}\sum_\mu (\sum_{i\in A} R_i^\mu)(\sum_{j\in A} R_j^\mu), \qquad (8)$$

где A - поднабор индексов $A \subset \{1, ..., N\} : \#A = J$. Гильбертово пространство содержит N секторов, включая вакуум $|0>$. Сектор, соответствующий ω_J порожден J - частичными фермионными композитами $(\psi^+_{i_1}...\psi^+_{i_J})(z)$ с несовпадающими индексами и имеет размерность $\begin{pmatrix} N \\ J \end{pmatrix}$.

В случае $\mathcal{C}^2$ имеется два класса интегрируемых представлений, первый из которых аналогичен вышеприведенному с той лишь разницей, что отсутствуют "сопряженные" представления, а второй содержит спинорные представления со старшими весами $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(1, 1, ..., \pm 1)$ для $SO(2n)$ и $\sigma = \frac{1}{2}(1, 1, ..., 1)$ для $SO(2n+1)$. Замечательным свойством этих представлений является независимость их аномальных размерностей от параметров деформации R_i^μ. Действительно, генераторы $SO(N)$ в спинорном представлении имеют вид

$$t_{ij} = \frac{i}{4}[\gamma_i\gamma_j],$$

что при подстановке в анзац (5) дает: $\Delta(\sigma) = \frac{c}{16}$.

Таким образом, мы видим, что $\mathcal{C}^1$ и $\mathcal{C}^2$ AV-модели являются аналогами компактификаций бозонной струны на тор ($\mathcal{C}^1$) и орбифолд ($\mathcal{C}^2$). При этом спинорные поля, имеющие фиксированные аномальные размерности, являются аналогами полей твиста орбифолдизированных компактификаций. Кроме того, пространство модулей AV-моделей $G_c(\mathrm{R}^{N-1})$ является компактным аналогом пространства модулей бозонных компактификаций [10].

5. Получим теперь точное решение ренормгрупповых уравнений для AV-моделей со спорадическими деформациями, следуя прескрипции [4]. Рассмотрим для определенности класс $\mathcal{C}^1$. В качестве UV фиксированной точки возьмем точку в AVS, лежащую на многообразии $SU(N)^1$ AV-моделей с центральным зарядом c. Можно показать, что структурные функции S_α из (4) представимы на RG-траектории в виде следующего анзаца:

$$S_{\hat{e}_i - \hat{e}_j}(\tau) = R_i^\mu R_j^\nu g_{\mu\nu}(\tau), \qquad (9)$$

где для метрики c-плоскостей $g_{\mu\nu}$ имеется RG-уравнение

$$\frac{dg_{\mu\nu}(\tau)}{d\tau} = \beta_{\mu\nu}(\{g\}) \qquad (10)$$

с β-функцией

$$\beta_{\mu\nu}(\{g\}) = -g_{\mu\nu} + g_{\mu\kappa} g_{\lambda\nu} \delta^{\kappa\lambda} \tag{11}$$

и начальными условиями

$$g_{\mu\nu}(-\infty) = \delta_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Решение RG-уравнений имеет вид:

$$g_{\mu\nu}(\tau) = \delta_{\mu\nu} f_\mu(\tau), \tag{13}$$

где

$$f_\mu(\tau) = \begin{cases} 1, & \mu \leq c-1 \\ (1+e^\tau)^{-1}, & \mu = c \end{cases}.$$

Таким образом, IR фиксированная точка лежит на многообразии $G_{c-1}(\mathrm{R}^{N-1})$.

6. Остановимся на явлении RG-эволюции аномальных размерностей. На RG-траектории аномальные размерности полей Φ_α являются функцией RG-времени τ. Матрица аномальных размерностей имеет вид:

$$\hat{\Delta}(\tau, \lambda) = t_{ab}(\tau)(\tau^a \tau^b).$$

В частности, для моделей класса $\mathcal{C}^1$:

$$\Delta_A(\tau, \omega_J) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\sum_{i \in A} R_i^\mu)(\sum_{j \in A} R_j^\nu) \tag{14}$$

и для спинорных представлений моделей класса $\mathcal{C}^2$:

$$16\Delta(\tau, \sigma) = c - 1 + \frac{1}{1+e^\tau}. \tag{15}$$

Таким образом, построено связное конфигурационное пространство AV-моделей, являющееся упрощенным аналогом конфигурационного пространства полной теории струны. Оставшаяся часть ГЛМ-программы состоит в построении $N \to \infty$ предела, корректность которого следует из существования естественной топологии индуктивного предела, которой может быть наделено конфигурационное пространство, кроме того, необходимо включить q-деформации и осуществить обобщение на произвольную риманову поверхность $\sum_g$, препятствий к которому нет в силу локальности AV-конструкции.

Формулировку динамического принципа на AV-конфигурационном пространстве мы рассмотрим в отдельной публикации.

1. A.Gerasimov et al., Int. J. Mod. Phys. A **6**, 977 (1991).
2. A.Yu.Morozov, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1525 (1991).
3. J.Greensite and M.B.Halpern, Nucl. Phys. B **242**, 167 (1984).
4. A.Giveon et al., Nucl. Phys. B **357**, 655 (1991).
5. M.B.Halpern and E.Kiritsis, Mod. Phys. Lett. A **4**, 1373 (1989); erratum ibid., 1797,
6. M.B.Halpern et al., Int J. Mod. Phys. A **5**, 2275 (1990).
7. A.Yu.Morozov et al., Ibid., 803.
8. A.Yu.Morozov et al., Ibid, 2953.
9. А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик, ЯФ **53**, 1464 (1991).
10. K.S.Narain, M.K.Sarmadi and E.Witten, Nucl. Phys. B **279**, 369 (1987).