Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.6, стр.321 - 324 25 марта 1992 г.

ПОЧТИ АБСОЛЮТНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ АТОМОВ ГЕЛИЯ ПОЛЕМ ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ ВОЛН

В.А.Алексеев, Д.Д.Крылова

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
117924, Москва

Поступила в редакцию 6 февраля 1992 г.

Найдена асимптотически точная функция распределения по скоростям атомов, охлаждаемых резонансным световым полем методом когерентного захвата населенностей. Показано, что появляющаяся в функции распределения узкая структура при увеличении времени взаимодействия с полем стремится к δ-функции.

Предложенная и реализованная в [1] схема охлаждения атомов гелия в метастабильном состоянии 2^3S_1 при его взаимодействии на переходе $2^3S_1 - 2\,^3P_1$ с полем встречных волн с ортогональными круговыми поляризациями принципиально отличается от схемы [2] глубиной охлаждения и слабой зависимостью эффективности отстройки от резонанса. Выполненный в [3] численный расчет в общих чертах установил количественные закономерности механизма, однако, естественно не позволяет точно установить предельные характеристики функции распределения атомов по скоростям (волновым векторам).

В настоящей статье построена точная аналитическая теория этого явления и найдена асимптотически точная (при больших временах взаимодействия) функция распределения.

Обозначив состояния $2\,^3S_1(M_j = 1, \vec{p}) = |1, \vec{p}>$, $2\,^3S_1(M_j = -1, \vec{p}) = |2, \vec{p}>$, $2\,^3P_1(M_j = 0, \vec{p}) = |0, \vec{p}>$, где M_j - проекция магнитного момента, $\vec{p}$ - волновой вектор, квантовым образом описывающий движение атома как целого [4,5], можно написать систему уравнений для шести элементов матрицы плотности $\sigma(1,\vec{p};1,\vec{p}')$, $\sigma(2,\vec{p};2,\vec{p}')$, $\sigma(1,\vec{p};2,\vec{p}')$, $\sigma(0,\vec{p};0,\vec{p}')$, $\sigma(0,\vec{p};1,\vec{p}')$, $\sigma(0,\vec{p};2,\vec{p}')$ [3], описывающих эволюцию состояния атома при его взаимодействии с полем. Полагая $\left(\frac{dE}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{8\Gamma^2} = \kappa^2 \ll 1$, где $|d_{10}| = |d_{20}| = d$ - матричный элемент дипольного момента, E - амплитуда поля и 2Γ - радиационная ширина верхнего уровня, из этой системы уравнений можно исключить три быстро затухающих элемента $\sigma(0,\vec{p};0,\vec{p}')$, $\sigma(0,\vec{p};1,\vec{p}')$, и $\sigma(0,\vec{p};2,\vec{p}')$. После этого система уравнений, описывающих эволюцию нижних состояний, принимает вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}(\vec{p})}{\partial t} = I[-M(\vec{p})\sigma_{11}(\vec{p}) + L(\vec{p})\sigma_{12}(\vec{p}) + L^*(\vec{p})\sigma_{12}^*(\vec{p}) + \frac{1}{2}A(\vec{p}+\vec{k})]$$

$$\frac{\partial\sigma_{22}(\vec{p})}{\partial t} = I[-M(-\vec{p})\sigma_{22}(\vec{p}) + L^*(-\vec{p})\sigma_{12}(\vec{p}) + L(-\vec{p})\sigma_{12}^*(\vec{p}) + \frac{1}{2}A(\vec{p}-\vec{k})], \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}(\vec{p})}{\partial t} = -i2\frac{\hbar}{m}\vec{k}\vec{p}\sigma_{12}(\vec{p}) + I[L(\vec{p})\sigma_{11}(\vec{p}) + L^*(-\vec{p})\sigma_{22}(\vec{p}) - N(\vec{p})\sigma_{12}(\vec{p})].$$

Здесь $\sigma_{11}(\vec{p}) = \sigma(1,\vec{p}+\vec{k};1,\vec{p}+\vec{k})$, $\sigma_{22}(\vec{p}) = \sigma(2,\vec{p}-\vec{k};2,\vec{p}-\vec{k})$, $\sigma_{12}(\vec{p}) = \sigma(1,\vec{p}+\vec{k};2,\vec{p}-\vec{k})$, $k = \omega/c$ - волновой вектор света, $I = (dE/\hbar)^2/4$, $L(\vec{p}) = [i(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar}{m}\vec{k}\vec{p} - \frac{\delta}{2}) - \Gamma]^{-1}$, ω_0 - частота перехода, $M(\vec{p}) = -[L(\vec{p}) + L^*(\vec{p})]$, $N(\vec{p}) = -[L(\vec{p}) + L^*(-\vec{p})]$, $\delta = \hbar\vec{k}^2/m$ - сдвиг отдачи. Интегральный член прихода A, отражающий влияние спонтанного излучения записывался в виде, аналогичном [6,7] и после исключения $\sigma(0,\vec{p};0,\vec{p})$ равен

$$A(\vec{p}) = \frac{1}{4\pi}\int dO_{\vec{s}}[M(\vec{p}+\vec{s})\sigma_{11}(\vec{p}+\vec{s}) + M(-\vec{p}-\vec{s},)\sigma_{22}(\vec{p}+\vec{s})+$$

$$+N(\vec{p}+\vec{s})\sigma_{12}(\vec{p}+\vec{s}) + N^*(\vec{p}+\vec{s})\sigma_{12}^*(\vec{p}+\vec{s})]; \quad |\vec{s}| = \omega/c.$$

В момент включения поля при $t=0$ матрица плотности является равновесной: $\sigma_{12}(\vec{p}) = 0$, $\sigma_{11}(\vec{p}) = W(\vec{p}+\vec{k})$, $\sigma_{22}(\vec{p}) = W(\vec{p}-\vec{k})$, где $W(\vec{p})$ - равновесная функция распределения по волновым векторам, которую в состояниях 1 и 2 мы предполагаем одинаковой.

Из уравнений (1) видно, что значения $\sigma_{11}(\vec{p}) = \sigma_{22}(\vec{p}) = -\sigma_{12}(\vec{p}) = D\delta(p)W(p_\perp)$, где D - постоянная, а p - проекция $\vec{p}$ вдоль $\vec{k}$, обращают в ноль их правую часть, то есть являются решением, соответствующим указанному в [1] когерентному состоянию, не взаимодействующему с полем. Поэтому ясно, что для описания решений (1) при больших, но конечных временах, можно искать матрицу плотности в виде $\sigma(\vec{p}) = W(p_\perp)\rho(p)$. После этого удобно перейти к фурье-образу по p-компоненте волнового вектора и выполнить преобразование Лапласа по времени:

$$F_{ik}(x,\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ixp}\rho_{ik}(p).$$

Воспользовавшись также вытекающими из (1) и начальных условий свойствами симметрии $\rho_{11}(p) = \rho_{22}(-p)$, $\rho_{12}(p) = \rho_{12}^*(-p)$, из которых следует $F_{11}(x,\lambda) = F_{22}^*(x,\lambda)$, $F_{12}^*(x,\lambda) = F_{12}(x,\lambda)$, а также полагая отстройку от резонанса равной нулю $\omega-\omega_0-\delta/2=0$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\kappa^2[\hat{K}_-(u+f)+\hat{K}_+\varphi] - \frac{\lambda}{2\Gamma}\varphi; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\kappa^2[\hat{K}_+(u+f)+\hat{K}_-\varphi] - \frac{\lambda}{2\Gamma}f; \qquad (2)$$

$$2\kappa^2(1-G)[\hat{K}_+(u+f)+\hat{K}_-\varphi] + \frac{\lambda}{\Gamma}u = \bar{W}(z)/\Gamma.$$

Здесь $z = k\Gamma x/\delta$, $f(z) = \frac{1}{2}[F_{12}(z,\lambda)+F_{12}(-z,\lambda)]$, $\varphi(z) = \frac{1}{2}[F_{12}(z,\lambda)-F_{12}(-z,\lambda)]$, $u(z) = \mathrm{Re}F_{11}(z,\lambda)$, $G(z) = \frac{\sin(\epsilon z)}{\epsilon z}$, $\epsilon = \frac{2\delta}{\Gamma}$, мнимая часть $F_{11}(z,\lambda)$ при больших z убывает пропорционально $\sin^2(\epsilon z)/(\epsilon z)$ и для дальнейшего не играет роли, функция $\bar{W}(x)$ является фурье-образом функции распределения при $t=0$

$$\bar{W}(x) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp}W(p+k)dp = \cos(kx)\int_{-\infty}^{\infty} W(q)e^{ixq}dq,$$

результат действия оператора $\hat{K}$ имеет вид

$$\hat{K}_\pm\eta = \int_{-\infty}^{z} e^{-|z-z'|}\eta(z')dz' \pm \int_z^{+\infty} e^{-|z-z'|}\eta(z')dz'.$$

Узкая относительно p часть матрицы плотности ρ при больших временах взаимодействия определяется поведением функций $F_{ik}(z,\lambda)$ или определяемых (2) функций u, f и φ при больших z и малых λ. Распределение по волновым векторам связано с функцией $u(z,\lambda)$, которая при больших z имеет вид ($\bar{W}(z)\simeq 0$, $G(z)\simeq 0$)

$$u = -2\kappa^2 \Gamma Q/\lambda, \quad Q = \hat{K}_+(u+f) + \hat{K}_-\varphi. \tag{3}$$

Используя соотношения $(\hat{K}_+\eta)' = -\hat{K}_-\eta$, $(\hat{K}_-\eta)' = -\hat{K}_+\eta + 2\eta$, из (2) легко получить уравнения для функций $\psi = Q - f/\kappa^2$ и $g = Q + f/\kappa^2$:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = a\psi + bg; \quad \frac{d^2 g}{dz^2} = c\psi + dg - 4\bar{W}/\lambda, \tag{4}$$

где

$$a = -\kappa^2 + \lambda\kappa^2/(2\Gamma) - \lambda/(4\Gamma) + \lambda^2/(8\Gamma^2),$$

$$b = -\kappa^2 - \lambda\kappa^2/(2\Gamma) - \lambda/(4\Gamma) - \lambda^2/(8\Gamma^2)$$

$$c = \frac{4\Gamma\kappa^2}{\lambda}(1-G) + 1 + \kappa^2 + \lambda/(4\Gamma) + \lambda\kappa^2/(2\Gamma) - \lambda^2/(8\Gamma^2),$$

$$d = \frac{4\Gamma\kappa^2}{\lambda}(1-G) + 1 - 3\kappa^2 + \lambda/(4\Gamma) - \lambda\kappa^2/(2\Gamma) + \lambda^2/(8\Gamma^2).$$

Из (4) получается уравнение четвертого порядка для ψ, которое при малых λ имеет вид

$$-\lambda S(z)\psi^{(4)} + \psi^{(2)} - \frac{2\lambda\kappa^2}{\Gamma}(1 + 2G\kappa^2\Gamma S)\psi = -4\kappa^2 S\bar{W},$$

$S = [\lambda + 4\Gamma\kappa^2(1-G)]^{-1}$. Поскольку при малых z функция $1 - G = \frac{2}{3}\frac{\delta^2}{\Gamma^2}z^2$, из эквивалентной записи этого уравнения

$$\psi = -\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\beta}|z-z'|}S(z')[-4\kappa^2\bar{W}(z') + 4\lambda\kappa^4 G\psi(z') + \lambda\psi^{(4)}(z')]dz' \tag{5}$$

$$\beta = 2\lambda\kappa^2/\Gamma$$

видно, что при $\lambda \to 0$ и $z \to \infty$ решение имеет вид $\psi = \frac{C}{\lambda}e^{-\sqrt{\beta}|z|}$, причем константа C определяется из (5) при $\lambda = 0$ и равна (напомним, что $\bar{W}(0) = 1$ и $G(0) = 1$) $C = \left[\frac{2\delta}{\pi\sqrt{3}\Gamma} + \kappa^2\right]^{-1}$. Далее из (4) видно, что при $z \to \infty$ функция g равна $g(z) = C_1/\lambda e^{-\sqrt{\beta}|z|}$, $C_1 + C = -\frac{\lambda}{\Gamma}C$, $Q = -\frac{C}{2\Gamma}e^{-\sqrt{\beta}|z|}$, и, наконец, при больших z и малых λ

$$u(z,\lambda) = \frac{1}{\lambda}D\exp[-\sqrt{2\lambda\kappa^2/\Gamma}|z|], \quad D = \left[1 + \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\frac{\delta}{\Gamma\kappa^2}\right]^{-1}. \tag{6}$$

Выполняя обратные преобразования Фурье и Лапласа, находим узкую часть функции распределения по волновым векторам

$$\rho_{11}(p) = \rho_{22}(p) = -\rho_{12}(p) = \frac{1}{2\pi i}D\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} d\lambda \frac{e^{t\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\frac{\frac{1}{\pi}\frac{\kappa}{\delta}k\sqrt{2\Gamma}}{p^2 + \lambda\frac{2\kappa^2\Gamma}{\delta^2}k^2}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\xi > 0, \quad \int \rho_{11}(p)dp = D.$$

Легко найти значения этой функции при малых и больших p. При $p \ll \Delta_0 = \frac{k\kappa}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma}{t}}$ значение $\rho_{11}(p) = D/(\pi\Delta_0)$, при $p \gg \Delta_0$ получаем $\rho_{11}(p) = \frac{D}{\pi}2\Delta_0/(\pi p^2)$.

В целом эта функция близка к лоренцевской $\rho_{11}(p) \simeq \frac{D}{\pi}\Delta(p)/(p^2+\Delta^2(p))$ с зависящей от p шириной $\Delta(p)$, изменяющейся от значения $\Delta = \Delta_0$ при $p = 0$ до $\Delta = \frac{2}{\pi}\Delta_0$ при $p \gg \Delta_0$. Средняя из этих двух величин $\frac{\pi+2}{2\pi}\Delta_0$ с большой точностью характеризует ширину узкой части функции распределения, примерно в 1,5 раза меньше ширины, полученной из качественных соображений в [3] и практически не отличается от ширины, полученной численным методом (рис. 8а в [3]).

Формулы (6) и (7) содержат в себе все главные особенности механизма охлаждения. Ширина распределения (7) ограничена только временем взаимодействия, так что узкая часть функции распределения стремится к δ-функции при $t \to \infty$. На практике эта ширина видимо ограничена лишь временем жизни τ нижнего $^3S_1$ состояния, которое, впрочем, очень велико ($\tau \simeq 7000$ с [8]), классическим описанием поля и, быть может, использованием нерелятивистского уравнения для матрицы плотности. Эффективность охлаждения (доля атомов, вовлеченных в процесс) определяется константой D, которая не зависит от начального (при $t = 0$) распределения; ширина этого распределения определяет лишь время t, при котором достигается асимптотика (6) и форму широкого по сравнению с (7) фона, интеграл которого равен $1 - D$. В условиях численного счета [3] (рис. 11в) $\kappa^2 = 0,05$, отношение δ/Γ для исследуемого перехода равно $\delta/\Gamma = 10^{-1}$ и по (6) получаем значение $D \approx 0,6$, которое на 0,2 меньше полученного численно в [3]. Как видно из (6), эффективность охлаждения D растет с увеличением интенсивности поля, то есть κ^2. Необходимо помнить, однако, что все рассмотрение проведено в предположении $\kappa^2 \ll 1$, а из качественных соображений очевидно, что величина D не может превышать значения, даваемого (6) при $\kappa^2 = 1$.

Интересной особенностью распределения (7) является расходимость всех моментов, то есть невозможность определения в том числе средней энергии. Естественно, это связано с тем, что при малых z (6) перестает быть применимым. Нахождение функции $u(z,\lambda)$ при малых z требует дополнительного рассмотрения и будет изложено в другом месте.

1. A.Aspect, E.Arimondo, R.Kaiser et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988).
2. T.Hänsch and A.Schawlow, Opt. Commun. **13**, 68 (1975).
3. A.Aspect, E.Arimondo, R.Kaiser et al., J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2112 (1989).
4. В.А.Алексеев, Т.Л.Андреева, И.И.Собельман, ЖЭТФ **62**, 614 (1972); ЖЭТФ **64**, 813 (1973).
5. В.А.Алексеев, Л.П.Яценко, ЖЭТФ **77**, 2254 (1979).
6. Ф.А.Воробьев, С.Г.Раутиан, Р.И.Соколовский, Оптика и спектроскопия **27**, 728 (1969).
7. В.А.Алексеев, Д.Д.Крылова, Квантовая электроника **14**, 2341 (1987).
8. А.А.Радциг, В.М.Смирнов, Параметры атомов и атомных ионов. М.: Энергоатомиздат, 1986, с.253.