

Правило сохранения электрической площади и применимость различных моделей распространения предельно коротких импульсов

А. В. Пахомов⁺¹⁾, Н. Н. Розанов^{+*1)}, М. В. Архипов^{+*1)}, Р. М. Архипов^{+*1)}

⁺ Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет, 198504 С.-Петербург, Россия

^{*} Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 30 ноября 2023 г.

После переработки 4 декабря 2023 г.

Принята к публикации 4 декабря 2023 г.

Рассмотрен вопрос о пределах применимости нескольких приближений, широко используемых для описания распространения предельно коротких импульсов в различных немагнитных средах. В качестве критерия допустимости их применения использовалось фундаментальное правило сохранения электрической площади импульса, которое является прямым следствием уравнений Максвелла в одномерном случае. Получены общие выражения для значений, которые может принимать электрическая площадь в разных средах. Показано, что многие теоретические модели вообще говоря не удовлетворяют правилу сохранения электрической площади, что указывает на ограниченную применимость данных моделей для корректного описания взаимодействия предельно коротких импульсов со средами. Таким образом, любые качественные и количественные результаты, полученные в рамках таких моделей, не могут считаться физически верными и значимыми.

DOI: 10.31857/S1234567824020058, EDN: rusbwo

Введение. В последние годы был достигнут серьезный прогресс в области генерации предельно коротких световых импульсов (ПКИ) фемтосекундной и даже аттосекундной длительности [1–5]. Основной интерес к получению таких импульсов обусловлен возможностью их применения для наблюдения и управления различными сверхбыстрыми процессами в веществе вплоть до динамики электронов в атомах и молекулах [6–8]. В то же время не меньший интерес представляет также изучение природы и основных закономерностей нелинейно-оптических явлений на таких временных масштабах [9–11]. Дело в том, что, как показали многочисленные исследования, для столь коротких световых импульсов сам характер протекания различных процессов нелинейного взаимодействия света с веществом, таких как, например, генерация оптических гармоник [12, 13], ионизация атомов [14, 15], когерентные Раби-осцилляции [16, 17] или нерезонансное возбуждение квантовых систем [18–20], претерпевает принципиальные изменения.

Одним из ключевых следствий необычных свойств физики ПКИ является необходимость введения ряда новых физических величин, которые не имели бы заметного практического смысла для

длинных импульсов, содержащих множество циклов оптических колебаний, но которые начинают играть важную роль в случае ПКИ. Одной из таких величин является электрическая площадь импульса, определяемая следующим выражением:

$$\bar{S}_E(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') dt'. \quad (1)$$

Электрическая площадь импульса (1) оказывается важнейшей величиной для описания свойств униполярных полуволновых импульсов, которые представляют собой естественный предел сокращения длительности импульса при уменьшении числа содержащихся в нем оптических колебаний при заданной центральной частоте. В частности, значение интеграла (1) определяет величину механического импульса, который ПКИ передает при воздействии на заряженную частицу, а также является ключевым параметром, который количественно определяет воздействие ПКИ на квантовые системы в случае, когда длительность возбуждающего импульса короче периодов резонансных переходов в системе [18–21].

Кроме этого, электрическая площадь импульса (1) обладает важным свойством ее безвихревого характера в любой немагнитной среде:

$$\text{rot } \bar{S}_E(\vec{r}) = 0, \quad (2)$$

¹⁾ e-mail: antpakhom@gmail.com; nnrosanov@mail.ru; mikhail.v.archipov@gmail.com; archipovrostislav@gmail.com

которое напрямую следует из уравнений Максвелла [22–24]:

$$\operatorname{rot} \bar{E}(\bar{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}(\bar{r}, t)}{\partial t}.$$

В простейшем одномерном случае, когда линейно поляризованные световые импульсы с плоским волновым фронтом распространяются вдоль оси z , уравнение (2) сводится к следующему простому виду [22–24]:

$$\frac{dS_E}{dz} = 0, \quad \text{т.е.} \quad S_E(z) = \text{const.} \quad (3)$$

Уравнение (3) таким образом представляет собой фундаментальное правило, заключающееся в сохранении электрической площади поля в пространстве (в одномерном случае). Выполнение правила сохранения (3) было подтверждено во множестве работ по распространению ПКИ в различных средах, включая линейную проводящую среду [25] и среды с резонансной [24, 26] или квадратичной нелинейностью [27–31]. В силу своего фундаментального характера правило сохранения электрической площади (3) может быть использовано для проверки корректности разных приближений, применяемых при описании распространения ПКИ в различных средах.

В данной работе мы покажем, какие значения может принимать константа в правой части равенства (3) при распространении импульсов в немагнитных средах как со связанными, так и со свободными зарядами. На основе полученных соотношений будет проанализирован ряд приближенных теоретических моделей, широко используемых для описания взаимодействия ПКИ с разными средами, на их совместимость с правилом сохранения электрической площади (3). Будет показано, что для некоторых приближений и типов оптических сред наблюдается нарушение правила сохранения (3), что свидетельствует об ограниченной применимости таких приближенных моделей и о возможности получения нефизичных результатов при их некритичном использовании.

Общие соотношения для значений электрической площади. Рассмотрим ситуацию, когда линейно поляризованные световые импульсы с плоским волновым фронтом распространяются вдоль оси z . Тогда пространственно-временная динамика электрического поля описывается посредством одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial j}{\partial t} \right), \quad (4)$$

где $P(z, t)$ – макроскопическая поляризация, отвечающая связанным зарядам в среде, $j(z, t)$ – плот-

ность тока свободных зарядов. Подобное одномерное рассмотрение вообще говоря справедливо лишь на расстояниях от слоя среды, не превышающих дифракционную длину. Кроме этого, одномерная модель также описывает распространение импульсов в коаксиальных волноводах, в которых отсутствуют частоты отсечки и потому реализуется эффективно одномерное распространение субцикловых импульсов, включая униполярные [32].

Полное поле $E(z, t)$ в волновом уравнении (4) удобно представить как сумму исходного падающего на среду импульса и поля, излучаемого средой. Для поля, излучаемого слоем среды, расположенным между координатами z_1 и z_2 , в работе [33] было получено следующее общее выражение:

$$E_{\text{emit}}(z, t) = -\frac{2\pi}{c} \int_{z_1}^{z_2} \left[j \left(z', t - \frac{|z - z'|}{c} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} \left(z', t - \frac{|z - z'|}{c} \right) \right] dz'. \quad (5)$$

Из уравнения (5) в свою очередь легко получить выражение для электрической площади поля (1), излучаемого всем слоем среды:

$$S_{\text{emit}}(z) = -\frac{2\pi}{c} \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} j \left(z', t - \frac{|z - z'|}{c} \right) dt - \frac{2\pi}{c} \int_{z_1}^{z_2} [P(z', t = +\infty) - P(z', t = -\infty)] dz'. \quad (6)$$

В случае слоя диэлектрической среды без свободных зарядов в выражениях (5)–(6) первое слагаемое обращается в нуль $j(z, t) = 0$, тогда как для слоя металла или плазмы, где отсутствуют связанные заряды, в нуль обращается макроскопическая поляризация $P(z, t) = 0$.

Анализ выражения (6) позволяет установить ряд важных следствий. Во-первых, отметим, что уравнение (5) описывает излучение от слоя среды как вправо, так и влево. При этом излучение в обоих направлениях идентично лишь в случае бесконечно тонкого слоя среды, а для слоя конечной толщины вследствие характера интерференции излучения от разных частей среды поля, излучаемые слоем вправо и влево, будут отличаться. Однако, несмотря на это, их электрические площади, которые даются выражением (6), будут равны. Этот результат возникает вследствие бесконечных пределов интегрирования по времени в выражении (1), вследствие чего все

временные задержки между излучением от разных частей среды при расчете электрической площади не играют никакой роли. Таким образом, выражение (6) представляет собой электрическую площадь и для излучения слоя среды вправо, и для излучения влево.

Предположим далее, что ПКИ распространяются в диэлектрической среде, где отсутствуют свободные заряды, так что $j(z, t) = 0$. Будем считать, что до прохождения импульса среда находится в равновесном состоянии без макроскопической поляризации, а также возвращается в это исходное состояние после прохождения импульса вследствие наличия неизбежной релаксации макроскопической поляризации. Тогда подынтегральное выражение во втором слагаемом в правой части (6) обращается в нуль:

$$S_{\text{emit}}(z) = \quad (7)$$

$$= -\frac{2\pi}{c} \int_{z_1}^{z_2} [P(z', t = +\infty) - P(z', t = -\infty)] dz' = 0.$$

Таким образом, электрическая площадь поля, излучаемого слоем диэлектрической среды или любой частью этого слоя, оказывается равна нулю. Стоит отметить, что данный вывод носит общий характер и справедлив безотносительно конкретных характеристик падающего на среду импульса или последовательности импульсов, а также вне зависимости от параметров самого диэлектрика.

Обратимся теперь к правилу сохранения электрической площади в виде (3). Пусть слой диэлектрика имеет конечную толщину, исходный падающий на среду импульс имеет площадь $S_{E,\text{initial}}$, излучаемое средой в обратном направлении поле (т.е. отраженное) имеет электрическую площадь $S_{E,\text{backward}}$, а прошедшее сквозь слой диэлектрика поле имеет электрическую площадь $S_{E,\text{forward}}$. Поскольку со стороны падения исходного импульса через каждую точку пространства сначала проходит исходный импульс, а затем через некоторое время – отраженное поле, то правило сохранения электрической площади (3) принимает следующий вид:

$$S_{E,\text{initial}} + S_{E,\text{backward}} = S_{E,\text{forward}}. \quad (8)$$

Полученное соотношение (8) справедливо и для любой точки внутри слоя диэлектрика при соответствующем переобозначении слагаемых, если переписать его в виде:

$$\begin{aligned} S_{E,\text{initial}} + S_{E,\text{backward}}(z) + S_{E,\text{forward}}(z) = \\ = S_E(z) = \text{const}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так, под вторым слагаемым в левой части (9) тогда стоит понимать электрическую площадь совокупного излучения назад от той части слоя, что расположена дальше по направлению распространения исходного импульса относительно данной точки. В то же время третье слагаемое в левой части (9) теперь является электрической площадью совокупного излучения вперед от той части слоя, что расположена раньше по направлению распространения исходного импульса относительно данной точки. Отметим, что первое слагаемое в левой части (9), т.е. электрическая площадь исходного импульса, по определению является константой и не зависит от координаты z в отличие от двух других слагаемых.

Поле, излучаемое от слоя диэлектрика или любой частью этого слоя как вперед, так и назад, согласно равенству (7) всегда имеет нулевую электрическую площадь. Следовательно, для любой диэлектрической среды в уравнении (9) получаем:

$$S_{E,\text{backward}}(z) = S_{E,\text{forward}}(z) \equiv 0. \quad (10)$$

Соответственно, уравнение (9), выражающее правило сохранения электрической площади, принимает следующий вид:

$$S_E(z) = \text{const} = S_{E,\text{initial}}. \quad (11)$$

Таким образом, электрическая площадь как функция координаты в пространстве может принимать в качестве своего постоянного значения любую величину, равную электрической площади исходного падающего на диэлектрическую среду импульса. Отметим, что полученные выражения (7), (10), (11) справедливы лишь для диэлектрической среды, в которой имеются только связанные заряды, но не будут выполняться в случае наличия в среде свободных зарядов, т.е. если в правой части (5)–(6) $j(z, t) \neq 0$. В последующих главах полученные соотношения (6)–(11) будут применены для анализа корректности нескольких приближенных подходов для теоретического описания распространения ПКИ в различных линейных и нелинейных средах.

Для иллюстрации полученного соотношения (11) рассмотрим прохождение униполярного полуволнового импульса через слой двухуровневой среды. Отклик двухуровневой среды описывается стандартными уравнениями для динамики матрицы плотности среды [34]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{12}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\rho_{12}(z, t)}{T_2} + \\ + i\omega_{12}\rho_{12}(z, t) - \frac{i}{\hbar}d_{12}E(z, t)n(z, t), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = -\frac{n(z, t) - n_0(z)}{T_1} + \frac{4}{\hbar} d_{12} E(z, t) \text{Im} \rho_{12}(z, t),$$

$$P(z, t) = 2N_0 d_{12} \text{Re} \rho_{12}, \quad (12)$$

где E – напряженность электрического поля, P – наведенная макроскопическая поляризация среды, ρ_{12} – недиагональный элемент матрицы плотности двухуровневой среды, $n = \rho_{11} - \rho_{12}$ – разность населенностей уровней двухуровневой среды, d_{12} – дипольный момент резонансного перехода, ω_{12} – частота резонансного перехода среды, N_0 – объемная концентрация активных центров, n_0 – равновесная разность населенностей уровней в отсутствие электрического поля ($n_0 = 1$ для поглощающей среды), T_1 – время жизни верхнего уровня, T_2 – время фазовой релаксации в среде, c – скорость света в вакууме, \hbar – приведенная постоянная Планка.

Система уравнений (12) решалась численно совместно с волновым уравнением (4) в отсутствие токов свободных зарядов $j(z, t) = 0$. В расчетах была рассмотрена ситуация, когда на оптически толстый слой двухуровневой среды нормально падает униполярный полцикловый импульс ненулевой площади (1), а именно, импульс гауссовой формы:

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-t^2/\tau^2} \quad (13)$$

с амплитудой E_0 и длительностью τ . Результаты проведенных численных расчетов приведены на рис. 1. Здесь в качестве варьируемых параметров были выбраны амплитуда исходного импульса E_0 и объемная концентрация частиц N_0 . Толщина слоя среды была выбрана на порядок больше длины волны резонансного перехода. Как видно из рис. 1, при всех рассмотренных значениях параметров выполняется правило сохранения электрической площади в пространстве (3). Более того, полученные постоянные значения электрической площади во всех случаях оказываются в точности равны электрической площади исходного падающего импульса (13) (соответствующие значения показаны на оси ординат на рис. 1 крестиками). Таким образом, результаты проведенного численного моделирования в точности согласуются с полученными выше общими аналитическими результатами, выражаемыми формулами (10)–(11).

Распространение предельно коротких импульсов в двухуровневой среде. Мы начнем наше рассмотрение с приближенных моделей когерентного распространения ПКИ в резонансной оптической среде. В простейшем, но в то же время наиболее важном с методической точки зрения случае среда описывается в рамках двухуровневой модели. Такая ситуация была впервые подробно исследована

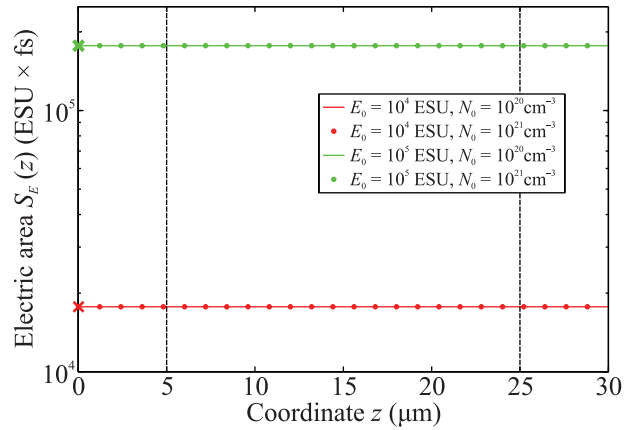


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пространственная зависимость электрической площади (1) при прохождении униполярного полциклового импульса гауссовой формы (13) через слой двухуровневой среды. Толщина слоя среды $L = 20$ мкм, параметры среды $d_{12} = 10$ Д, $\omega_{12} = 10^{15}$ с $^{-1}$, $n_0 = 1$, $T_1 = 100$ фс, $T_2 = 20$ фс, длительность падающего импульса $\tau = 1$ фс. Амплитуда падающего импульса E_0 и объемная концентрация резонансных центров N_0 выступали в качестве свободных параметров. Крестиками соответствующих цветов по оси ординат обозначены значения электрической площади исходного падающего импульса (13) для всех рассмотренных наборов параметров. Черные вертикальные линии показывают границы слоя среды

в работах Э.М. Беленова и А.В. Назаркина [35–37], где изучалось распространение предельно коротких импульсов (ПКИ) в усиливающей или поглощающей резонансной двухуровневой среде в пределе длительностей импульсов τ , много меньших периода резонансного перехода среды, т.е.:

$$\omega_{12}\tau \ll 1.$$

В данном предельном случае для пространственно-временной динамики электрического поля в среде было получено уравнение синус-Гордона следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha \sin \Psi, \quad (14)$$

где используется следующая величина:

$$\Psi(z, t) = \frac{2d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t E(z, t') dt',$$

т.е. интеграл по времени от электрического поля с конечным верхним пределом. Здесь d_{12} – дипольный момент резонансного перехода в двухуровневой среде, α – коэффициент пропорциональности:

$$\alpha = \frac{8\pi\omega_{12}N_0d_{12}^2n_0}{\hbar c^2},$$

знак которого зависит от того, является ли среда усиливающей или поглощающей.

Рассмотрим теперь в уравнении синус-Гордона (14) предельный переход $t \rightarrow +\infty$. Будем считать, что мы имеем дело с ограниченными во времени электромагнитными импульсами, так что электрическое поле всюду обращается в ноль при $t \rightarrow +\infty$. Такое полное затухание поля в любой реальной среде обеспечивается неизбежно присутствующими в ней механизмами диссипации, приводящими к постепенному затуханию поля с течением времени. Поскольку электрическое поле обращается в ноль при $t \rightarrow +\infty$, то производная по времени от $\Psi(z, t)$ и, соответственно, второе слагаемое в левой части уравнения (14) также обращаются в ноль. Величина $\Psi(z, t)$ в таком пределе переходит в электрическую площадь импульса (с точностью до постоянного множителя), а уравнение (14) принимает вид:

$$\frac{d^2 S_E}{dz^2} = \frac{\hbar \alpha}{2d_{12}} \sin \frac{2d_{12} S_E}{\hbar}. \quad (15)$$

Сравнение правила сохранения электрической площади импульса (3) и уравнения синус-Гордона для электрической площади импульса в форме (15) показывает, что эти уравнения совместимы, только если правая часть в уравнении (15) обращается в ноль, т.е. при:

$$\frac{2d_{12}}{\hbar} S_E(z) = \text{const} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \quad (16)$$

т.е. только если электрическая площадь импульса постоянна в пространстве и кратна величине π (в единицах $\hbar/2d_{12}$). Однако, согласно полученному ранее выражению (11) значение константы в уравнении (3) может принимать произвольное значение в диэлектрической среде. Действительно, уравнения Максвелла в общем виде не накладывают никаких ограничений на возможные значения электрической площади импульса и, в частности, никак не подразумевают квантования этой величины. Наоборот, уравнения Максвелла допускают существование и устойчивое распространение в пространстве со скоростью света любых униполярных импульсов вне зависимости от величины их электрической площади [38–40].

Причина такого возникающего противоречия в данном случае кроется в отбрасывании всех релаксационных членов в уравнениях для отклика двухуровневой резонансной среды в процессе вывода уравнения (14). Вследствие этого, в таких условиях устойчиво распространяться в двухуровневой среде могут лишь такие импульсы, на заднем фронте которых наведенная поляризация среды в точности возвращается к своему начальному нулевому значению, т.е.

если правая часть (15) обращается в ноль. В то же время сохранение всех релаксационных слагаемых в уравнениях для отклика среды позволило бы избежать появления искусственного квантования электрической площади согласно выражению (16). Отметим также, что в пренебрежении процессами релаксации в среде осцилляторы среды, возбужденные даже очень коротким импульсом, могут колебаться неограниченно долго, непрерывно испуская электромагнитные волны, что нарушало бы еще и закон сохранения энергии.

Стоит заметить, что уравнение (15), хотя и является более простым, чем уравнение синус-Гордона (14), и позволяет легко найти пространственно-однородные решения для электрической площади (16), не подходит для численного моделирования. Действительно, для нахождения определенного частного решения уравнения (15) необходимо задание начальных условий в какой-то точке пространства. Для этого, однако, недостаточно знать только лишь площадь исходного падающего на среду импульса. Действительно, с той стороны от среды, откуда падает исходный импульс, через каждую точку сначала проходит падающий импульс, а затем через некоторое время – отраженное поле. Таким образом, чтобы задать начальные условия для электрической площади в уравнении (15) в какой-либо точке, нам нужно заранее знать величину электрической площади отраженного (или прошедшего) поля. Однако, получить эти значения можно только лишь численным решением уравнения синус-Гордона (14) для напряженности электрического поля. Следовательно, для нахождения электрической площади $S_E(z)$ неизбежно требуется решать общее уравнение синус-Гордона (14).

На рисунке 2 приведены результаты численного моделирования прохождения униполярного полуволнового импульса (13) через слой двухуровневой среды в рамках уравнения синус-Гордона (14). Как видно из рис. 2, хотя электрическая площадь поля и оказывается постоянной в пространстве, она принимает только дискретные значения в соответствии с выражением (16). При этом конкретное значение электрической площади поля определяется значением электрической площади исходного падающего полуволнового импульса (13). Точнее говоря, для каждого из решений (16) имеется некоторый интервал значений электрической площади исходного импульса (13), в пределах которого электрическая площадь $S_E(z)$ сходится именно к данному решению из дискретного набора (16). Важно подчеркнуть, что, как проиллюстрировано на рис. 2, получаемое значение электрической площади поля в пространстве

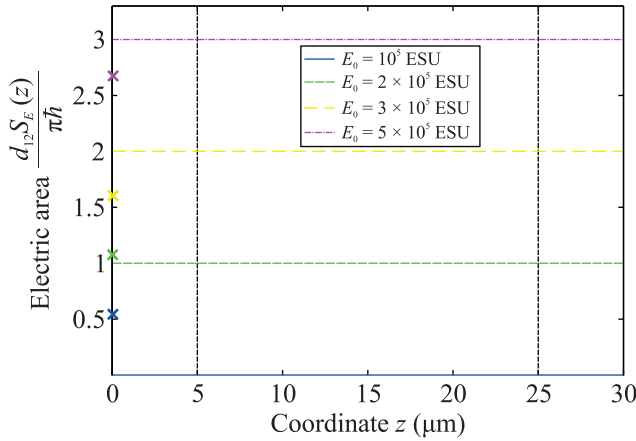


Рис. 2. (Цветной онлайн) Пространственная зависимость электрической площади (1) при прохождении униполярного полубициклового импульса гауссовой формы (13) через слой двухуровневой среды, описываемом уравнением синус-Гордона (14). Толщина слоя среды $L = 20$ мкм, параметры среды $d_{12} = 10$ Д, $\omega_{12} = 10^{15}$ с $^{-1}$, $N_0 = 10^{19}$ см $^{-3}$, $n_0 = 1$, длительность падающего импульса $\tau = 1$ фс. Амплитуда падающего импульса E_0 выступала в качестве свободного параметра. Крестиками по оси ординат обозначены значения электрической площади исходного падающего импульса (13) для соответствующих значений его амплитуды E_0 . Черные вертикальные линии показывают границы слоя среды

в общем случае значительно отличается от электрической площади исходного падающего импульса, что противоречит точному аналитическому решению (11).

Таким образом, мы приходим к выводу, что уравнение синус-Гордона (14) не согласуется с фундаментальным правилом сохранения электрической площади импульса. Это значит, что уравнение синус-Гордона (14) может иметь лишь ограниченную область применимости и к любым вытекающим из него решениям необходимо вносить поправки, гарантирующие выполнение фундаментального правила сохранения электрической площади импульса.

Приближение однонаправленного распространения для ПКИ. Наиболее часто используемым приближением при описании распространения ультракоротких импульсов является приближение медленно меняющихся амплитуд (ПММА). Однако для ПКИ данное приближение становится заведомо неверным уже для импульсов, содержащих лишь несколько циклов колебаний, и тем более для субциклового импульсов.

В качестве возможной альтернативы, позволяющей упростить соответствующие теоретические мо-

дели для ПКИ, часто применяется приближение однонаправленного распространения [41, 42]. Данное приближение основано на пренебрежении обратно распространяющейся волной и подразумевает, что поле в среде движется лишь в направлении падающего импульса со скоростью, равной или близкой к соответствующей линейной скорости.

Как было показано авторами в работе [43], при распространении полубициклового униполярного импульса в рамках приближения однонаправленного распространения в плазме электрическая площадь импульса не сохраняется, а экспоненциально убывает при движении вглубь плазмы. В то же самое время при распространении полубициклового униполярного импульса в диэлектрической среде фундаментальное правило сохранения (3) остается справедливым даже в рамках приближения однонаправленного распространения [44].

Чтобы прояснить природу возникающих отклонений от правила сохранения (3), обратимся для начала к результатам, полученным в начале статьи для диэлектрической среды. А именно, как отмечено выше, излучение от слоя диэлектрика или любой части этого слоя как вперед, так и назад всегда имеет нулевую электрическую площадь согласно уравнению (7). Это означает, в частности, что электрическая площадь от той части поля, что идет в обратном направлении, равна нулю, см. равенство (10). Следовательно, если пренебречь наличием отраженной волны, то это не приведет к нарушению правила сохранения электрической площади (3). Таким образом, в случае распространения ПКИ в диэлектрической среде применение приближения однонаправленного распространения не вызывает отклонений от точного правила сохранения (3).

Рассмотрим теперь обратную ситуацию, когда ПКИ распространяется в плазме или металле, где нет связанных зарядов, т.е. $P(z, t) = 0$, и имеются только свободные заряды. В таком случае в выражении (6) остается лишь первый член, содержащий под знаком интеграла плотность тока свободных зарядов $j(z, t)$, причем этот интеграл в выражении (6) в общем случае не обращается в нуль. Таким образом, электрическая площадь поля, излучаемого слоем плазмы, оказывается отличной от нуля. Причину такой особенности можно понять напрямую из уравнения (6). Действительно, первое слагаемое в (6) фактически представляет собой суммарный заряд, прошедший через сечение слоя плазмы, ортогональное направлению поляризации падающего поля. В силу одномерного характера задачи, который предполагает неограниченно большие размеры слоя сре-

ды в поперечных измерениях, а также из-за наличия в среде свободных зарядов, такой суммарный заряд в общем случае получается ненулевым. Это означает, что происходит параллельный перенос заряда в поперечной плоскости, который в силу одномерного характера задачи не приводит к образованию где бы то ни было нескомпенсированных зарядов, но обуславливает ненулевое значение электрической площади излучаемого поля от слоя металла или плазмы. Стоит отметить, что данный результат справедлив не только для среды, где изначально имелись свободные заряды, но и в случае диэлектрической среды, в которой происходит ионизация и образование свободных зарядов под действием непосредственно самого падающего ПКИ.

При этом правило сохранения в форме (8) или (9), в том смысле, как обсуждалось выше для случая диэлектрической среды, по-прежнему справедливо. Однако в случае плазменной среды электрическая площадь отраженного поля $S_{E,backward}$, т.е. излучаемого слоем среды или частью этого слоя в обратном направлении, отлична от нуля. В результате согласно (8) и (9) электрическая площадь поля, прошедшего сквозь слой плазмы или часть этого слоя, оказывается отличной от площади исходного падающего на среду импульса (или серии импульсов) $S_{E,initial}$.

Данный результат означает, что пренебрежение наличием отраженного поля при распространении ПКИ в плазме или металле неизбежно приводит к отклонению от точного правила сохранения электрической площади (3). Поскольку приближение однонаправленного распространения как раз и подразумевает неучет отраженной волны, мы приходим к выводу, что при описании одномерного распространения ПКИ в плазме или металле в рамках приближения однонаправленного распространения правило сохранения электрической площади (3) всегда будет нарушаться. Данный вывод согласуется с результатами работы [43] и последующим комментарием к ней [45] и вместе с тем объясняет причину полученного авторами в [43] якобы невыполнения правила сохранения (3).

Распространение ПКИ в линейной диспергирующей среде (плазме). Рассмотрим далее распространение ПКИ в линейной среде с сильной дисперсией. Мы будем исходить из результатов работы [46], где были исследованы некоторые точно решаемые модели взаимодействия ультракоротких импульсов, содержащих одно или несколько колебаний поля, с некоторыми классами диэлектриков и проводников. В качестве основной универсальной модели для описания нестационарных волновых про-

цессов в средах с дисперсией там используется одномерное уравнение Клейна–Фока–Гордона для распространения плоской линейно поляризованной волны в холодной, бесстолкновительной, однородной и полностью ионизированной газовой плазме. Плотность индуцированного тока $j(z, t)$ в такой плазме задается следующим уравнением:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\Omega^2}{4\pi} E, \quad (17)$$

где Ω – плазменная частота. После подстановки этого выражения в правую часть волнового уравнения (4) получаем:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} E. \quad (18)$$

Проинтегрируем теперь полученное уравнение (18) по времени в бесконечных пределах, считая что все процессы взаимодействия импульсов со средой ограничены во времени. Тогда электрическое поле и его производная по времени всюду обращаются в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$ так что из уравнения (18) получается следующее уравнение для пространственного распределения электрической площади $S_E(z)$:

$$\frac{d^2 S_E}{dz^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} S_E. \quad (19)$$

Общее решение уравнения (19) имеет вид:

$$S_E(z) = C_1 e^{\Omega z/c} + C_2 e^{-\Omega z/c}. \quad (20)$$

Выражение (20) очевидно противоречит правилу сохранения электрической площади (3), за исключением тривиального частного случая $C_1 = C_2 = 0$.

Приведенное выше рассмотрение вновь демонстрирует важность и пользу правила сохранения электрической площади (3). В данном случае расхождение вызвано некорректностью пренебрежения затуханием тока в диспергирующей среде. Действительно, учтем наличие столкновений в плазме добавлением в правую часть динамического уравнения (17) релаксационного слагаемого с эффективным коэффициентом релаксации γ :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\gamma j + \frac{\Omega^2}{4\pi} E, \quad (21)$$

в результате чего вместо уравнения (19) можно получить:

$$\frac{d^2 S_E}{dz^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^t e^{\gamma t'} E(t') dt' \Big|_{t \rightarrow +\infty} = 0. \quad (22)$$

Здесь выражение в правой части стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, так как в силу предполагаемой ограниченности падающих импульсов во времени интеграл по времени в последнем множителе стремится к некоторой конечной постоянной величине. Тогда общее решение уравнения (22) записывается в следующем простом виде:

$$S_E(z) = C_1 + C_2 z, \quad (23)$$

где необходимо положить $C_2 = 0$ во избежание не имеющего физического смысла неограниченного роста или убывания электрической площади в пространстве. Таким образом, мы в точности приходим к правилу сохранения электрической площади (3), что подтверждает принципиальную важность учета релаксационных процессов в диспергирующей среде для получения корректного описания распространения в ней ПКИ.

Для проверки полученных соотношений (22)–(23) было проведено совместное численное решение уравнений (4) и (21). В качестве исходного падающего импульса вновь использовался униполярный полуволновый импульс (13). Результаты численного моделирования при различных значениях коэффициента релаксации γ показаны на рис. 3. Видно, что правило

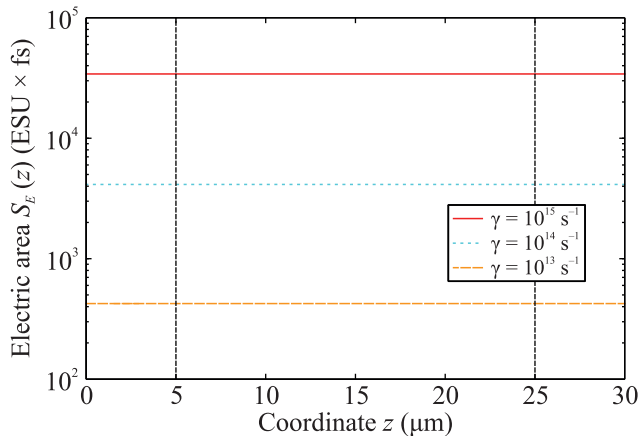


Рис. 3. (Цветной онлайн) Пространственная зависимость электрической площади (1) при прохождении униполярного полуволнового импульса гауссовой формы (13) через слой диспергирующей плазмы при различных значениях коэффициента релаксации γ . Толщина слоя среды $L = 20$ мкм, плазменная частота среды $\Omega = 3 \cdot 10^{14}$ с $^{-1}$, падающий импульс имел длительность $E_0 = 1$ фс и амплитуду $E_0 = 10^5$ ед. СГС

сохранения электрической площади (3) точно выполняется, в соответствии с выражением (23). При этом конкретная величина константы в правой части равенства (3) оказывается сильно зависящей от вели-

чины коэффициента релаксации γ , причем величина электрической площади быстро убывает по мере уменьшения релаксации в плазме.

В то же самое время, численное решение уравнения (18) для бесстолкновительной плазмы (т.е. при нулевом коэффициенте релаксации γ) показывает, что при любых значениях параметров слоя плазмы и падающего импульса электрическая площадь всюду обращается в нуль, т.е. данное решение соответствует общему решению (20) в частном случае, когда $C_1 = C_2 = 0$. Причину такого поведения электрической площади можно понять из следующих общих соображений. Согласно общему решению волнового уравнения (5) слой плазмы продолжает излучать до тех пор, пока плотность токов свободных зарядов не обратится всюду в нуль, т.е. должно быть $j(z, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Однако, непосредственно интегрируя уравнение (17), легко получить, что:

$$j(z, t) = \frac{\Omega^2}{4\pi} \int_{-\infty}^t E(z, t') dt', \quad (24)$$

так что при $t \rightarrow +\infty$ плотность тока оказывается прямо пропорциональна значению электрической площади в данной точке. Тогда из уравнения (24) непосредственно следует, что обращение в нуль плотности тока влечет за собой и нулевое значение электрической площади во всем пространстве. Таким образом, хотя общее решение (20) и означает вообще говоря неоднородные по пространству решения для слоя плазмы без релаксации, но физически возможными в такой среде оказываются только решения с нулевой электрической площадью.

Представляет интерес также рассмотреть, как значение электрической площади (постоянное по координате), показанное на рис. 3, зависит от толщины слоя плазмы. Соответствующие результаты численного моделирования показаны на рис. 4 (в логарифмическом масштабе) при фиксированном значении коэффициента релаксации γ (красными кружками). Отметим, что значения электрической площади, показанные на рис. 3, равны, в частности, электрической площади импульса, прошедшего через слой плазмы. Действительно, со стороны от слоя плазмы, противоположной той, откуда падает исходный импульс (13), через каждую точку проходит только поле, прошедшее через весь слой плазмы. Следовательно, график на рис. 4 показывает в том числе зависимость электрической площади импульса, прошедшего сквозь слой плазмы, от толщины этого слоя.

Для зависимости электрической площади импульса, прошедшего сквозь слой плазмы, от толщи-

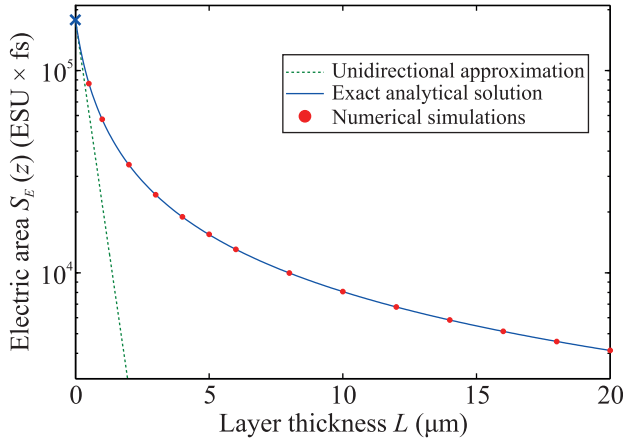


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость постоянного значения электрической площади в правой части равенства (3) от толщины слоя плазмы при прохождении через нее униполярного полуволнового импульса гауссовой формы (13): результаты численного моделирования (красные кружки) и точное аналитическое решение (27) (синяя сплошная линия). Зеленая пунктирная линия показывает приближенное аналитическое решение (28), полученное в работе [43] в рамках приближения однонаправленного распространения. Плазменная частота среды $\Omega = 3 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, коэффициент релаксации $\gamma = 10^{14} \text{ с}^{-1}$, падающий импульс имел длительность $\tau = 1 \text{ фс}$ и амплитуду $E_0 = 10^5 \text{ ед. СГС}$. Крестиком по оси ординат обозначено значение электрической площади исходного падающего импульса (13)

ны этого слоя, показанной на рис. 4, можно получить точное аналитическое описание. Для этого рассмотрим стандартную задачу о нормальном падении плоской волны частоты ω на плоскопараллельную пластинку толщины L из материала с показателем преломления $n(\omega)$. Если амплитуда падающей плоской волны равна A_{inc} , то амплитуда прошедшей волны A_{tr} определяется следующим выражением [47]:

$$A_{\text{tr}} = \frac{4n(\omega)}{(n(\omega) + 1)^2 - (n(\omega) - 1)^2 e^{2i\omega L n(\omega)/c}} A_{\text{inc}}. \quad (25)$$

Показатель преломления для плазмы или металла в рамках модели Друде-Лоренца имеет вид:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + i\gamma)}}, \quad (26)$$

который напрямую вытекает из уравнения (21).

Перейдем теперь в уравнениях (25)–(26) к пределу $\omega \rightarrow 0$. Как видно из уравнения (1), электрическая площадь фактически представляет собой спектральную Фурье-компоненту поля на нулевой частоте. Таким образом в этом пределе спектральные компонен-

ты A_{inc} и A_{tr} переходят в электрические площади падающего импульса S_{inc} и прошедшего через слой поля S_{tr} соответственно. Рассмотрим теперь, что происходит с правой частью выражения (26) в данном предельном случае $\omega \rightarrow 0$. Комбинируя (25) и (26) и отбрасывая слагаемые, содержащие ω в степени выше первой, легко получить предельное выражение:

$$S_{\text{tr}} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2 L}{2\gamma c}} S_{\text{inc}}. \quad (27)$$

Выражение (27) таким образом представляет собой значение константы в правой части правила сохранения (3) в случае распространения ПКИ через слой плазмы или металла, описываемых моделью Друде-Лоренца (21), (26).

Аналитически рассчитанная зависимость (27) показана на рис. 4 сплошной синей линией. Хорошо видно, что результаты численных расчетов полностью согласуются с теоретической кривой (27). Обратим внимание, что в пределе $\gamma \rightarrow 0$ (идеальная бесстолкновительная плазма) выражение в правой части (27) обращается в нуль, что также полностью согласуется с описанными выше результатами численного моделирования.

Полученную зависимость можно сопоставить с результатами работы [43], где было получено аналитическое решение для электрической площади импульса, распространяющегося в плазме, в приближении однонаправленного распространения. В частности, в обозначениях используемой модели (21) полученная в статье [43] зависимость электрической площади прошедшего импульса от длины распространения записывается в следующем виде:

$$S_E(z) = S_E(0) \cdot \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\gamma c} z\right), \quad (28)$$

т.е. электрическая площадь экспоненциально убывает по мере распространения импульса в слое. Зависимость (28) для наглядности также показана на рис. 4 (зеленая пунктирная линия). Как хорошо видно из сравнения обеих кривых на рис. 4, приближение однонаправленного распространения очень плохо описывает реальное изменение электрической площади прошедшего импульса с ростом толщины слоя плазмы. При точном же решении полного (двунаправленного) волнового уравнения (4) электрическая площадь прошедшего импульса убывает по мере увеличения толщины слоя гораздо медленнее экспоненциальной зависимости (28) по закону, который оказывается достаточно близок к степенному $\sim L^{-1}$. Основной причиной столь значительного расхождения,

как уже было отмечено в предыдущем разделе, является полное пренебрежение обратной волной в рамках приближения однонаправленного распространения. Действительно, приближение однонаправленного распространения опирается на предположение, что наведенная в среде макроскопическая поляризация оказывает лишь незначительное возмущение на падающий импульс. В случае же слоя плазмы при параметрах рис. 3, 4 уже для толщины слоя около микрона возникает значительное отражение. Таким образом, предположение о малом возмущении исходного импульса слоем среды оказывается заведомо нарушенным.

В заключение стоит также отметить, что в пределе $\omega \rightarrow 0$ для волнового числа монохроматической волны в плазме или металле с дисперсионным уравнением (26) справедливо следующее асимптотическое выражение:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \sim \sqrt{\omega} \rightarrow 0,$$

т.е. волновое число в этом пределе обращается в нуль. Данный результат означает, что при решении задачи о прохождении плоской монохроматической волны через слой среды (26) амплитуды и прямой, и обратной волны *внутри* слоя, которые пропорциональны соответственно $e^{\pm ik(\omega)z}$, в пределе $\omega \rightarrow 0$ не зависят от координаты z , т.е. постоянны в пространстве (в пределах слоя среды). Этот вывод также противоречит приближенному решению (28), согласно которому электрическая площадь прямой волны внутри слоя среды (26) должна экспоненциально убывать.

Заключение. Таким образом, в работе теоретически исследован вопрос о корректности приближенных теоретических моделей, применяемых для описания распространения ПКИ в различных средах. В качестве основного критерия корректности было использовано фундаментальное правило сохранения электрической площади, которое напрямую вытекает из уравнений Максвелла в одномерной геометрии задачи.

Проведенный анализ показал, что некоторые широко используемые приближения приводят к невыполнению правила сохранения электрической площади. В частности, это относится к уравнению синус-Гордона для когерентного распространения ПКИ в двухуровневой резонансной среде и к приближению однонаправленного распространения ПКИ в металле или плазме. При этом основными причинами нарушения данного правила сохранения являются либо пренебрежение процессами диссипации в среде, либо пренебрежение образованием встречной волны.

В этих случаях необходимой становится коррекция всех решений, полученных в рамках данных приближенных моделей, посредством добавления поправок, гарантирующих сохранение электрической площади поля.

Важно отметить, что предложенный подход может быть напрямую использован и для определения границ применимости любых других приближений при распространении ПКИ в произвольных линейных и нелинейных средах. Подобный анализ может быть также основан и на использовании других законов сохранения, прежде всего закона сохранения энергии. Однако в случае ПКИ именно электрическая площадь (1) в силу ее линейной зависимости от электрического поля и определяющей роли во взаимодействии с квантовыми системами оказывается наиболее удобной величиной для проверки точности теоретических моделей.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (РНФ) # 21-72-10028.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

-
1. F. Krausz and M. Ivanov, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163 (2009).
 2. L. Gallmann, C. Cirelli, and U. Keller, *Ann. Rev. Phys. Chem.* **63**, 447 (2012).
 3. K. Midorikawa, *Nature Photon.* **16**, 267 (2022).
 4. B. Xue, K. Midorikawa, and E. J. Takahashi, *Optica* **9**, 360 (2022).
 5. М. Ю. Рябикин, М. Ю. Емелин, В. В. Стрелков, УФН **193**(4), 382 (2023) [M. Yu. Ryabikin, M. Yu. Emelin, and V. V. Strelkov, *Phys.-Uspekhi* **66**, 360 (2023)].
 6. M. Drescher, M. Hentschel, R. Kienberger, M. Uiberacker, V. Yakovlev, A. Scrinzi, Th. Westerwalbesloh, U. Kleineberg, U. Heinzmann, and F. Krausz, *Nature* **419**, 803 (2002).
 7. D. Hui, H. Alqattan, S. Yamada, V. Pervak, K. Yabana, and M. Hassan, *Nature Photon.* **16**, 33 (2022).
 8. K. Ramasesha, S. R. Leone, and D. M. Neumark, *Annu. Rev. Phys. Chem.* **67**, 41 (2016).
 9. E. Goulielmakis, M. Schultze, M. Hofstetter, V. S. Yakovlev, J. Gagnon, M. Uiberacker, A. L. Aquila, E. M. Gullikson, D. T. Attwood, R. Kienberger, F. Krausz, and U. Kleineberg, *Science* **320**, 1614 (2008).
 10. M. Wegener, *Extreme nonlinear optics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2005).
 11. С. В. Сазонов, *Оптика и спектроскопия* **130**(12), 1846 (2022) [S. V. Sazonov, *Optics and Spectroscopy* **130**(12), 1573 (2022)].

12. M. Ferray, A. L'Huillier, X.F. Li, L.A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, *J. Phys. B* **21**, L31 (1988).
13. E. Goulielmakis and T. Brabec, *Nature Photon.* **16**, 411 (2022).
14. D. Dimitrovski, E. A. Solov'ev, and J.S. Briggs, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 083003 (2004).
15. D. Dimitrovski, E. A. Solov'ev, and J.S. Briggs, *Phys. Rev. A* **72**, 043411 (2005).
16. S. Hughes, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3363 (1998).
17. O. D. Mucke, T. Tritschler, M. Wegener, U. Morgner, and F. X. Kartner, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 057401 (2001).
18. R. M. Arkhipov, A. V. Pakhomov, M. V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Opt. Lett.* **44**, 1202 (2019).
19. N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, and R. Arkhipov, *Phys. Rev. A* **104**, 063101 (2021).
20. A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, and R. Arkhipov, *Phys. Rev. A* **105**, 043103 (2022).
21. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, П. А. Образцов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **117**(1), 10 (2023) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, P. A. Obratsov, and N. N. Rosanov, *JETP Lett.* **117**, 8 (2023)].
22. Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **107**, 761 (2009) [N. N. Rosanov, *Opt. Spectr.* **107**, 721 (2009)].
23. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, М. (2011).
24. Н. Н. Розанов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, УФН **188**(12), 1347 (2018) [N. N. Rosanov, R. M. Arkhipov, and M. V. Arkhipov, *Phys.-Uspekhi* **61**, 1227 (2018)].
25. А. В. Пахомов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, Н. Н. Розанов, *Квантовая электроника* **51**(11), 1000 (2021) [A. V. Pakhomov, R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, and N. N. Rosanov, *Quantum Electron.* **51**, 1000 (2021)].
26. R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin, A. Pakhomov, and N. Rosanov, *J. Opt. Soc. Am. B* **38**, 2004 (2021).
27. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **87**(8), 470 (2008) [A. N. Bugai and S. V. Sazonov, *JETP Lett.* **87**, 403 (2008)].
28. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **114**(7), 437 (2021) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *JETP Lett.* **114**, 380 (2021)].
29. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Laser Phys. Lett.* **19**, 025401 (2022).
30. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Известия РАН. Серия физическая* **86**(1), 47 (2022) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* **86**, 28 (2022)].
31. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **118**(6), 410 (2023) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *JETP Lett.* **118**, 408 (2023)].
32. Н. Н. Розанов, *Оптика и спектроскопия* **127**(6), 960 (2019) [N. N. Rosanov, *Optics and Spectroscopy* **127**, 1050 (2019)].
33. M. V. Arkhipov, R. M. Arkhipov, A. V. Pakhomov, I. V. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, and N. N. Rosanov, *Opt. Lett.* **42**, 2189 (2017).
34. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. радио, М. (1980) [A. Yariv, *Quantum electronics* Wiley, N.Y. (1989)].
35. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 442 (1988) [E. M. Belenov, P. G. Kryukov, A. V. Nazarkin, A. N. Oraevskii, and A. V. Uskov, *JETP Lett.* **47**, 523 (1988)].
36. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990) [E. M. Belenov and A. V. Nazarkin, *JETP Lett.* **51**, 288 (1990)].
37. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущачовский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991) [E. Belenov, A. Nazarkin, and V. Ushchapovskii, *Sov. Phys. JETP* **73**, 422 (1991)].
38. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, Н. Н. Розанов, *Квантовая электроника* **50**(9), 801 (2020) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, and N. N. Rosanov, *Quantum Electron.* **50**, 801 (2020)].
39. А. Б. Плаченов, Н. Н. Розанов, *Изв. вузов. Радиофизика* **65**(12), 1003 (2022) [A. B. Plachenov and N. N. Rosanov, *Radiophys. Quantum Electron.* **65**, 911 (2023)].
40. Н. Н. Розанов, УФН **193**(10), 1127 (2023) [N. N. Rosanov, *Phys.-Uspekhi* **66**, 1059 (2023)].
41. M. Kolesik, J. V. Moloney, and M. Mlejnek, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 283902 (2002).
42. M. Kolesik and J. V. Moloney, *Phys. Rev. E* **70**, 036604 (2004).
43. А. В. Богацкая, А. М. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **188**(4), 291 (2023) [A. V. Bogatskaya and A. M. Popov, *JETP Lett.* **118**, 296 (2023)].
44. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, *Laser Phys. Lett.* **21**, 015401 (2024).
45. Н. Н. Розанов, М. В. Архипов, Р. М. Архипов, А. В. Пахомов, *Письма в ЖЭТФ* **118**(8), 620 (2023) [N. N. Rosanov, M. V. Arkhipov, R. M. Arkhipov, and A. V. Pakhomov, *JETP Lett.* **118**(8), 608 (2023)].
46. А. Б. Шварцбург, УФН **168**(1), 85 (1998) [A. B. Shvartsburg, *Phys.-Uspekhi* **41**, 77 (1998)].
47. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).