Письма в ЖЭТФ, том 119, вып. 3, с. 151 – 157

Осцилляции Гайлитиса–Дамбурга в трехчастичной системе $e^-e^+\bar{p}$

В. А. Градусов[1)], *С. Л. Яковлев*[1)]

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 18 ноября 2023 г.
После переработки 23 декабря 2023 г.
Принята к публикации 25 декабря 2023 г.

Мы исследуем околопороговое поведение сечений процессов низкоэнергетического рассеяния антипротонов на основном и возбужденном состояниях позитрония при значениях полного орбитального момента системы $L = 0$. В вычислительном эксперименте подтверждено существование над порогами возбужденных состояний атомов позитрония и антиводорода особенностей, называемых осцилляциями Гайлитиса–Дамбурга. Полученные результаты в дальнейшем могут оказаться полезными для выработки предложений по усовершенствованию условий экспериментов с антиматерией.

DOI: 10.31857/S1234567824030017, EDN: svlita

В ЦЕРН планируются и проводятся несколько экспериментов с антивеществом, использующих установку замедления антипротонов. Два из них AEgIS [1] и GBAR [2], нацеленные на гравитационное поведение антивещества, используют, среди прочего, трехчастичную реакцию

$$\bar{p} + \mathrm{Ps} \to \overline{\mathrm{H}} + e^- \tag{1}$$

образования антиводорода $\overline{\mathrm{H}}$ в процессе рассеяния антипротона $\bar{p}$ на газе ридберговского позитрония (Ps). В связи с этим в последнее время появился ряд теоретических работ, посвященных исследованию реакции (1). Естественный интерес здесь представляет поиск механизма увеличения скорости реакции образования антиводорода при производстве атомов антивещества.

Внимание исследователей привлекают различные особенности сечений процессов рассеяния в системе $e^-e^+\bar{p}$. Среди них можно выделить резонансы, подпороговый рост сечений, а также такие менее известные надпороговые особенности, как осцилляции Гайлитиса–Дамбурга (ГД), предсказанные впервые в работах [3, 4]. Последние возникают из-за дальнодействующего дипольного взаимодействия между возбужденным атомом (либо $\overline{\mathrm{H}}$, либо Ps) и заряженной частицей (e^- или $\bar{p}$). Теория ГД [3, 4, 5] предсказывает особенности двух типов: серию узких резонансов в областях энергии под порогами возбужденных состояний атомов и осцилляции сечений выше этих порогов. Существование в системах e^-e^-p и $e^-e^+\bar{p}$ первых из них, также называемых резонансами Фешбаха, надежно подтверждено как экспериментально, так и теоретически, в том числе достаточно точными специальными методами вычисления энергий и ширин резонансов [6–14]. Сложнее обстоит дело с особенностями другого типа — осцилляциями сечений. Существование их в системе $e^-e^+\bar{p}$ обсуждалось в работах [15–17], но лишь в последней из них были получены сечения, согласующиеся с предсказаниями теории ГД.

В настоящей работе поставлена цель исследовать надпороговое поведение сечений рассеяния в системе $e^-e^+\bar{p}$ в случае нулевого полного момента системы $L = 0$. Наш безмодельный подход к решению многоканальной квантовой задачи рассеяния в системе трех частиц основан на решении в конфигурационном пространстве уравнений Фаддеева-Меркурьева (ФМ), строго эквивалентных уравнению Шредингера [18]. Эти уравнения в представлении полного орбитального момента [19] сводятся к конечной системе трехмерных уравнений в частных производных. Для решения граничных задач для этих уравнений мы предложили и реализовали эффективный вычислительный алгоритм [20], который был апробирован, в частности, в расчетах низкоэнергетического рассеяния в системе $e^-e^+\bar{p}$ [21]. Для расчета полученных в настоящей работе сечений над порогами возбужденных состояний атомов критически важное значение имеет использование асимптотик решений уравнений ФМ, учитывающих в явном виде дальнодействующий характер эффективных взаимодействий между нейтральным атомом и налетающей (улетающей) частицей. Данное обстоятельство приводит к необходимости модифицировать "стандартные" формулы для асимптотик волновых функций [14, 22]. Эта модификация является обобщением на трехчастичный случай результатов нашей работы [23]. Здесь мы кратко обсуждаем соответствующую теорию и применяем ее

[1)]e-mail: v.gradusov@spbu.ru; s.yakovlev@spbu.ru

в серии расчетов низкоэнергетических сечений над порогами первых нескольких возбужденных состояний атомов в системе $e^-e^+\bar{p}$.

Рассматривается система трех бесспиновых нерелятивистских заряженных частиц с массами m_α и зарядами Z_α, $\alpha = 1,2,3$. В дальнейшем, набор индексов $\alpha\beta\gamma$ обозначает одну из перестановок множества $\{1,2,3\}$, нумерующую частицы. Поскольку в триаде $\alpha\beta\gamma$ пара частиц $\beta\gamma$ вполне определяется номером α третьей частицы, то далее мы систематически используем этот факт для идентификации пар частиц. В системе центра масс положение частиц описывается набором координат Якоби. Для разбиения $\alpha(\beta\gamma)$, они определены как векторы относительного положения $\mathbf{x}_\alpha$ между частицами $\beta\gamma$ и $\mathbf{y}_\alpha$ между их центром масс и частицей α. Мы используем приведенные координаты Якоби $\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha\}$, которые являются векторами Якоби, масштабируемыми множителями $\sqrt{2\mu_\alpha}$ и $\sqrt{2\mu_{\alpha(\beta\gamma)}}$ соответственно. Приведенные массы пары α (μ_α) и системы "частица α — пара α" ($\mu_{\alpha(\beta\gamma)}$) выражаются через массы частиц m_α стандартными формулами. Для разных значений α приведенные векторы Якоби связаны ортогональным преобразованием $\mathbf{x}_\beta = c_{\beta\alpha}\mathbf{x}_\alpha + s_{\beta\alpha}\mathbf{y}_\alpha$, $\mathbf{y}_\beta = -s_{\beta\alpha}\mathbf{x}_\alpha + c_{\beta\alpha}\mathbf{y}_\alpha$ [18]. В дальнейшем модули векторов обозначаются соответствующими нежирными буквами, например, $x_\alpha = |\mathbf{x}_\alpha|$. Состояния системы с полным орбитальным моментом $L = 0$ обладают симметрией относительно поворота системы как целого и по этой причине зависят лишь от трех координат $X_\alpha = \{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha = \cos\theta_\alpha \equiv (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)/(x_\alpha y_\alpha)\}$, определяющих положение частиц в содержащей их плоскости. В дальнейшем, где это необходимо, предполагается, что координаты X_β выражены через X_α.

Уравнения ФМ для трех заряженных частиц [18, 24] в случае $L = 0$ имеют вид [21, 25]:

$$\left[T_\alpha + V_\alpha(x_\alpha) + \sum_{\beta\neq\alpha} V_\beta^{(\mathrm{l})}(x_\beta, y_\beta) - E\right]\psi_\alpha(X_\alpha) = = -V_\alpha^{(\mathrm{s})}(x_\alpha, y_\alpha)\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{x_\alpha y_\alpha}{x_\beta y_\beta}\psi_\beta(X_\beta). \quad (2)$$

Здесь операторы кинетической энергии даются выражением

$$T_\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \left(\frac{1}{y_\alpha^2} + \frac{1}{x_\alpha^2}\right)\frac{\partial}{\partial z_\alpha}(1 - z_\alpha^2)\frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \quad (3)$$

Потенциалы V_α представляют собой парное кулоновское взаимодействие $V_\alpha(x_\alpha) = \sqrt{2\mu_\alpha}Z_\beta Z_\gamma/x_\alpha$. Они расщепляются на короткодействующую $V_\alpha^{(\mathrm{s})}$ и дальнодействующую части $V_\alpha^{(\mathrm{l})}$

$$V_\alpha(x_\alpha) = V_\alpha^{(\mathrm{s})}(x_\alpha, y_\alpha) + V_\alpha^{(\mathrm{l})}(x_\alpha, y_\alpha) \quad (4)$$

при помощи функции, называемой срезкой Меркурьева [18, 21]. Уравнения (2) можно просуммировать, что приводит к уравнению Шредингера для волновой функции $\Psi = \sum_\alpha \psi_\alpha(X_\alpha)/(x_\alpha y_\alpha)$, где ψ_α – компоненты волновой функции, заданные решением уравнений (2).

При значениях энергии E ниже порога развала (ионизации) системы компоненты ФМ $\psi_\alpha(X_\alpha)$ при $y_\alpha \to \infty$ в существенном отличны от нуля лишь в асимптотической области $\Omega_\alpha = \{x_\alpha, y_\alpha : x_\alpha \ll y_\alpha$ при $y_\alpha \to \infty\}$. В Ω_α компоненты ФМ могут быть представлены в виде

$$\psi_\alpha^{(\alpha_0\nu\lambda)}(X_\alpha) \sim \sim \sum_{n\ell}\phi_{n\ell}(x_\alpha)Y_{\ell 0}(\theta_\alpha, 0)\Bigg(\psi^-_{(n\ell)(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu)\delta_{\alpha\alpha_0} - - \sum_{n'\ell'}\psi^+_{(n\ell)(n'\ell')}(y_\alpha, p_{n'})\sqrt{\frac{p_\nu}{p_{n'}}}\mathcal{S}_{(\alpha n'\ell'),(\alpha_0\nu\lambda)}\Bigg). \quad (5)$$

В этой формуле индексы $\alpha n\ell$ нумеруют бинарные каналы рассеяния, определяемые связанными кулоновскими состояниями двух частиц в паре α с радиальной волновой функцией $\phi_{n\ell}(x)$ и энергией связи ε_n. Набор индексов $\alpha_0\nu\lambda$ определяет начальный канал рассеяния. $Y_{\ell m}$ обозначает стандартную сферическую гармонику. В формуле (5) и ниже в тексте предполагается, что индексы $n\ell$ принимают целые значения $n > \ell \geq 0$, соответствующие открытым при данной энергии E каналам. Импульс p_n налетающей (улетающей) частицы определяется условием сохранения энергии $E = p_n^2 + \varepsilon_n$. Соответственно, канал считается открытым, если $E - \varepsilon_n \geq 0$. Функции $\psi^-_{(n\ell)(\nu\lambda)}$ и $\psi^+_{(n\ell)(\nu\lambda)}$ задают падающую и рассеянную волны. Стандартным является выбор этих функций в виде

$$\widehat{\psi}^\pm_{(n\ell)(n'\ell')}(y_\alpha, p_{n'}) = u_\ell^\pm(\eta_n, p_n y_\alpha)\delta_{(n\ell),(n'\ell')}, \quad (6)$$

где $u_\ell^\pm(\eta, z)$ – кулоновские сходящаяся и расходящаяся волны [26], а параметр Зоммерфельда определяется как $\eta_n \equiv Z_\alpha(Z_\beta + Z_\gamma)\sqrt{2\mu_{\alpha(\beta\gamma)}}/(2p_n)$. Действительно, использование функций (6) в (5) приводит к решению уравнений ФМ с асимптотическим поведением вида:

$$\widehat{\psi}_\alpha^{(\alpha_0\nu\lambda)}(X_\alpha) \sim \quad (7)$$
$$\sim \phi_{\nu\lambda}(x_\alpha)Y_{\lambda 0}(\theta_\alpha, 0)u_\lambda^-(\eta_\nu, p_\nu y_\alpha)\delta_{\alpha\alpha_0} - - \sum_{n\ell}\phi_{n\ell}(x_\alpha)Y_{\ell 0}(\theta_\alpha, 0)u_\ell^+(\eta_n, p_n y_\alpha)\sqrt{\frac{p_\nu}{p_n}}\widehat{\mathcal{S}}_{(\alpha n\ell),(\alpha_0\nu\lambda)}.$$

Сечение процесса рассеяния с начальным $\alpha_0\nu\lambda$ и конечным $\alpha n\ell$ каналами стандартным образом выражается через элемент S-матрицы $\widehat{\mathcal{S}}_{(\alpha n\ell),(\alpha_0\nu\lambda)}$ [25].

Наличие в системе трех заряженных частиц эффективного дипольного потенциала между возбужденным связанным состоянием пары α (атомом) и частицей α приводит к тому, что представление (6) становится не достаточно точным, так как оставляет дипольное взаимодействие нескомпенсированным в уравнениях ФМ. Формально дипольный потенциал может быть получен подстановкой в уравнения ФМ (2) асимптотического разложения в Ω_α суммы дальнодействующих частей потенциалов

$$\sum_{\beta\neq\alpha} V_\beta^{(1)}(x_\beta, y_\beta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\alpha^{(\ell+1)} \frac{x_\alpha^\ell P_\ell(z_\alpha)}{y_\alpha^{\ell+1}}, \tag{8}$$

где P_ℓ — полиномы Лежандра. Действительно, из свойств меркурьевской срезки следует, что в Ω_α $V_\beta^{(1)}$ с точностью до экспоненциально убывающего по переменой y_α слагаемого совпадает с потенциалом V_β. Тогда коэффициенты мультипольного разложения (8) могут быть определены при помощи формулы

$$\frac{1}{x_\beta} = \frac{1}{|c_{\beta\alpha}\mathbf{x}_\alpha + s_{\beta\alpha}\mathbf{y}_\alpha|}\Bigg|_{|s_{\beta\alpha}|y_\alpha \geq |c_{\beta\alpha}|x_\alpha} = \\ = \frac{1}{|s_{\beta\alpha}|y_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{|c_{\beta\alpha}|x_\alpha}{s_{\beta\alpha}y_\alpha}\right)^\ell P_\ell(z_\alpha). \tag{9}$$

В частности, первые два коэффициента имеют вид

$$C_\alpha \equiv d_\alpha^{(1)} = Z_\alpha(Z_\beta + Z_\gamma)\sqrt{2\mu_{\alpha(\beta\gamma)}}, \tag{10}$$

$$D_\alpha \equiv d_\alpha^{(2)} = Z_\alpha(-1)^\alpha \sqrt{2\mu_{\alpha(\beta\gamma)}} \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}} \times \\ \times \left[Z_\gamma \operatorname{sign}(\beta - \alpha)(-1)^\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{m_\gamma}} + \right. \\ \left. + Z_\beta \operatorname{sign}(\gamma - \alpha)(-1)^\gamma \sqrt{\frac{m_\gamma}{m_\beta}} \right]. \tag{11}$$

Как известно из теории уравнений ФМ, правые части уравнений убывают экспоненциально в Ω_α. Подставляя первые два слагаемых разложения (8) в уравнения ФМ (2), получаем, что в асимптотической области Ω_α уравнения принимают форму

$$\left[T_\alpha + V_\alpha(x_\alpha) + \frac{C_\alpha}{y_\alpha} + \frac{D_\alpha x_\alpha z_\alpha}{y_\alpha^2} - E\right] \psi_\alpha^{(\alpha_0\nu\lambda)}(X_\alpha) = \\ = O\left(\frac{1}{y_\alpha^3}\right). \tag{12}$$

Подставим теперь асимптотическое представление (5) в уравнения (12) и спроецируем их на волновые функции связанных состояний $\phi_{n\ell}Y_{\ell 0}$. Используем при этом следующие хорошо известные соотношения [26, 27]:

$$\frac{\partial}{\partial\cos\theta}(1-\cos^2\theta)\frac{\partial}{\partial\cos\theta} Y_{\ell 0}(\theta,0) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell 0}(\theta,0), \tag{13}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx_\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x_\alpha^2} + V_\alpha(x_\alpha) - \varepsilon_n\right]\phi_{n\ell}(x_\alpha) = 0, \tag{14}$$

$$2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x_\alpha \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, \phi_{n'\ell'}(x_\alpha) Y_{\ell' 0}(\theta,0)\phi_{n\ell}(x_\alpha) \times \\ \times Y_{\ell 0}(\theta,0) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{nn'}, \tag{15}$$

$$2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, Y_{\ell' 0}(\theta,0)\cos\theta Y_{\ell 0}(\theta,0) = \\ = \delta_{\ell,\ell'+1}\frac{\ell}{\sqrt{4\ell^2-1}} + \delta_{\ell,\ell'-1}\frac{\ell+1}{\sqrt{4(\ell+1)^2-1}}. \tag{16}$$

В результате получим, что функции $\psi^\pm_{(n\ell)(\nu\lambda)}$ должны являться линейно независимыми решениями уравнений сильной связи каналов:

$$\left[-\frac{d^2}{dy_\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{y_\alpha^2} + \frac{C_\alpha}{y_\alpha} - p_n^2\right]\psi^\pm_{(n\ell)(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu) + \\ + \sum_{n'\ell'} \frac{A^\alpha_{n\ell,n'\ell'}}{y_\alpha^2}\psi^\pm_{(n'\ell')(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu) = O\left(\frac{1}{y_\alpha^3}\right). \tag{17}$$

Элементы матрицы A^α, задающей эффективный дипольный потенциал, даются выражениями

$$A^\alpha_{n\ell,n'\ell'} = D_\alpha M^\alpha_{n\ell,n'\ell'} \times \\ \times \left(\delta_{\ell',\ell+1}\frac{\ell+1}{\sqrt{4(\ell+1)^2-1}} + \delta_{\ell',\ell-1}\frac{\ell}{\sqrt{4\ell^2-1}}\right), \tag{18}$$

в которых

$$M^\alpha_{n\ell,n'\ell'} \equiv \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x_\alpha \phi_{n'\ell'}(x_\alpha) x_\alpha \phi_{n\ell}(x_\alpha). \tag{19}$$

Как упоминалось выше, сходящаяся и расходящаяся волны $\widehat{\psi}^\pm_{(n\ell)(n'\ell')}$, определенные в (6), не достаточно точно описывают асимптотическое поведение решения уравнений ФМ в Ω_α, так как не учитывают наличие эффективного дипольного потенциала. Действительно, при подстановке этих функций в уравнения (17) остается нескомпенсированным в левой части последнее дипольное слагаемое, имеющее порядок $O(y_\alpha^{-2})$. Частичный учет дипольного члена в асимптотических решениях уравнений (17) осуществлялся в работах [3, 4, 22, 14] путем диагонализации блочной части матрицы связи каналов

$$\delta_{nn'}[\ell(\ell+1)\delta_{\ell\ell'} + A^\alpha_{(n\ell)(n'\ell')}], \\ \ell = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \ell' = 0, 1, \ldots, n'-1.$$

Однако при этом недиагональная по n часть дипольного взаимодействия оставалась нескомпенсированной. Мы провели полный учет дипольной части взаимодействия в уравнениях (17) прямыми асимптотическими методами, что привело нас к следующему виду искомых асимптотических решений

$$\psi^{\pm}_{(n\ell)(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu) = \\ = \left[W^{\alpha(0)}_{(n\ell)(\nu\lambda)} + \frac{1}{y_\alpha^2} W^{\alpha(1)}_{(n\ell)(\nu\lambda)}\right] u^{\pm}_{L_\alpha^{(\nu\lambda)}}(\eta_\nu, p_\nu y_\alpha). \quad (20)$$

Здесь матрицы $W^{\alpha(0)}$ и $W^{\alpha(1)}$ даются формулами

$$W^{\alpha(0)}_{(n\ell)(\nu\lambda)} = \delta_{n\nu} V_\ell^{\alpha(\nu\lambda)},$$

$$W^{\alpha(1)}_{(n\ell)(\nu\lambda)} = (1-\delta_{n\nu}) \frac{\sum_{\ell'=0}^{\nu-1} A^\alpha_{(n\ell)(\nu\ell')} V_{\ell'}^{\alpha(\nu\lambda)}}{(p_n^2 - p_\nu^2)}, \quad (21)$$

а новые значения угловых моментов $L_\alpha^{(\nu\lambda)}$ возникают как решения квадратного уравнения

$$L_\alpha^{(\nu\lambda)}(L_\alpha^{(\nu\lambda)} + 1) = q_\alpha^{(\nu\lambda)}. \quad (22)$$

Наконец, $q_\alpha^{(\nu\lambda)}$, $V^{\alpha(\nu\lambda)}$ являются собственными значениями и собственными векторами матрицы

$$\ell(\ell+1)\delta_{\ell\ell'} + A^\alpha_{(\nu\ell)(\nu\ell')}, \quad \ell, \ell' = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \quad (23)$$

Заметим, что именно второй член в квадратных скобках в (20) ответственен за полную компенсацию дипольной части взаимодействия в уравнениях (17). Детальный вывод приведенных асимптотических решений выходит за рамки данной работы и будет сделан в отдельной публикации.

Решения (20) позволяют нам переформулировать асимптотические граничные условия (7) для уравнений ФМ

$$\widetilde{\psi}_\alpha^{(\alpha_0\nu\lambda)}(X_\alpha) \sim \\ \sim \sum_{n\ell} \phi_{n\ell}(x_\alpha) Y_{\ell 0}(\theta_\alpha, 0) \times \left[\widetilde{\psi}^{-}_{(n\ell)(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu)\delta_{\alpha\alpha_0} - \right. \\ \left. - \sum_{n'\ell'} \psi^{+}_{(n\ell)(n'\ell')}(y_\alpha, p_{n'}) \sqrt{\frac{p_\nu}{p_{n'}}} \widetilde{\mathcal{S}}_{(\alpha n'\ell'),(\alpha_0\nu\lambda)}\right], \quad (24)$$

со сходящейся волной вида

$$\left[\widetilde{\psi}^{-}\right]_{(n\ell)(\nu\lambda)}(y_\alpha, p_\nu) = \quad (25) \\ = \sum_{\lambda'} e^{i\left(\lambda - L_\alpha^{(\nu\lambda')}\right)\pi/2} \left[V_\lambda^{\alpha(\nu\lambda')}\right]^* \psi^{-}_{(n\ell)(\nu\lambda')}(y_\alpha, p_\nu).$$

Важным обстоятельством является тот факт, что правые части (7) и (24) совпадают друг с другом в пределе $y_\alpha \to \infty$. Отсюда следует, что связь между компонентами "физической" S-матрицы $\widehat{\mathcal{S}}$ и матрицы $\widetilde{\mathcal{S}}$, определенной решением (24), дается равенством

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(\alpha n\ell),(\alpha_0\nu\lambda)} = \\ = \sum_{\ell'} e^{i\left(\ell - L_\alpha^{(n\ell')}\right)\pi/2} V_\ell^{\alpha(n\ell')} \widetilde{\mathcal{S}}_{(\alpha n\ell'),(\alpha_0\nu\lambda)}. \quad (26)$$

Для решения уравнений ФМ с асимптотическими граничными условиями (24) применяется численная схема, подробно описанная в [20, 28]. Использование в расчетах более точной асимптотики (24) приводит к существенному снижению требований к компьютерным ресурсам. Это связано с тем, что такая асимптотика достигается компонентами ФМ на расстояниях, существенно меньших, чем асимптотика (7), которая вынуждает использовать размеры счетной области по переменной y_α в сотни атомных единиц [29]. При переходе к достаточно малым надпороговым энергиям p_n^2, которыми мы интересуемся в настоящей работе, этот размер неограниченно растет, что делает вычисление сечений рассеяния при таких энергиях практически невозможным. В нашей работе [23] мы продемонстрировали это на примере модельной одноканальной задачи рассеяния на дипольном центральном потенциале.

Для получения представленных в статье результатов мы вычисляли сечения рассеяния с точностью не хуже 1 % и высоким разрешением по энергии: $6 \cdot 10^{-6}$ а.е. при расчете сечений непосредственно над порогами возбужденных состояний атомов и $6 \cdot 10^{-5}$ а.е. в остальных случаях. Все представленные величины приведены в атомных единицах, сечения даются в единицах πa_0^2. Бинарные процессы рассеяния обозначаются начальным и конечным состояниями атома. Например, $\mathrm{Ps}(1) \to \overline{\mathrm{H}}(2)$ означает процесс образования возбужденного антиводорода с $n = 2$ (s и p состояния) при рассеянии антипротона на основном ($n = 1$) состоянии позитрония.

Согласно теории ГД [5], околопороговые осцилляции в сечениях возникают при наличии невещественных новых значений угловых моментов $L_\alpha^{(n\ell)}$. Над порогом возбужденного связанного состояния атома с главным квантовым числом n, в случае единственного (среди значений с разными $\ell < n$) невещественного значения $L_\alpha^{(n\ell)}$, теория предсказывает следующую зависимость от энергии p_n^2 сечений:

$$\sigma = A + B\cos(2\Im\mathrm{m}\, L_\alpha^{(n\ell)} \ln p_n + \phi). \quad (27)$$

Здесь константы A, B, ϕ, свои для каждой конкретной системы и сечения, можно считать независящими от энергии p_n^2 при малых p_n. Простой расчет показывает, что в системе $e^- e^+ \bar{p}$ для первых несколь-

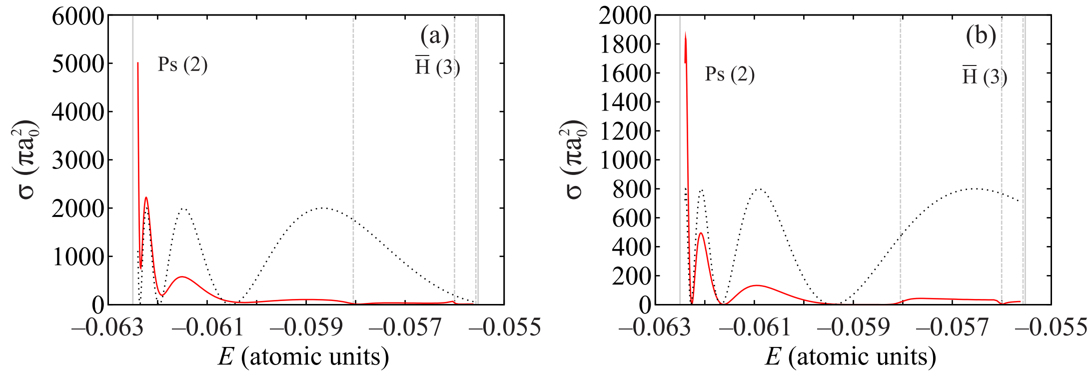

Рис. 1. (Цветной онлайн) Сечения: (a) – упругого Ps($2s$) → Ps($2s$) и (b) – квазиупругого Ps($2s$) → Ps($2p$) рассеяния. Пунктирной кривой изображен возможный график зависимости (27). Вертикальными штриховыми линиями показаны положения резонансов [10–13]

ких каналов рассеяния с возбужденными состояниями Ps(2), $\overline{\mathrm{H}}$(3) и $\overline{\mathrm{H}}$(4) реализуется как раз описанное выше условие. Мнимые части моментов $\Im\mathrm{m}\, L_\alpha^{(n\ell)}$ равны, соответственно, 4.76914, 2.19836 и 3.99364. Таким образом, в сечениях над порогами этих состояний можно ожидать появления осцилляций ГД.

На рисунке 1 представлены упругое и квазиупругое сечения рассеяния антипротона на позитронии Ps в первом возбужденном состоянии между порогами Ps(2) и $\overline{\mathrm{H}}$(3). В сечениях над порогом Ps(2) прекрасно видны осцилляции ГД с расположением максимумов, хорошо согласующимся с законом (27). Действительно, для наглядности на рис. 1 изображен также график кривой (27) с эмпирически подобранными значениями констант A, B и фазы ϕ. Представленные кривые подтверждают полученные ранее результаты [17], где на тех же сечениях была проверена выполнимость закона (27). Первые из присутствующих на рис. 1 волн осцилляций были также получены в работах [15, 16].

Перейдем теперь к обсуждению сечений образования антиводорода $\overline{\mathrm{H}}$ над различными порогами возбужденных состояний атомов. На рисунках 2 и 3 показаны сечения образования антиводорода $\overline{\mathrm{H}}$ в основном $\overline{\mathrm{H}}$(1) и возбужденных $\overline{\mathrm{H}}$(2s), $\overline{\mathrm{H}}$(2p) состояниях между порогами состояний $\overline{\mathrm{H}}$(2) и $\overline{\mathrm{H}}$(3). Это уточнение наших ранее опубликованных результатов [25], которые были получены с использованием стандартных асимптотических граничных условий (7). Граничные условия необходимо было ставить на очень больших межкластерных расстояниях y_α для достижения сходимости результатов расчетов. Хотя последнее требовало привлечения очень серьезных компьютерных ресурсов, но и это в ряде случаев не позволило в [25] достичь требуемой точности при малых надпороговых энергиях. Кро-

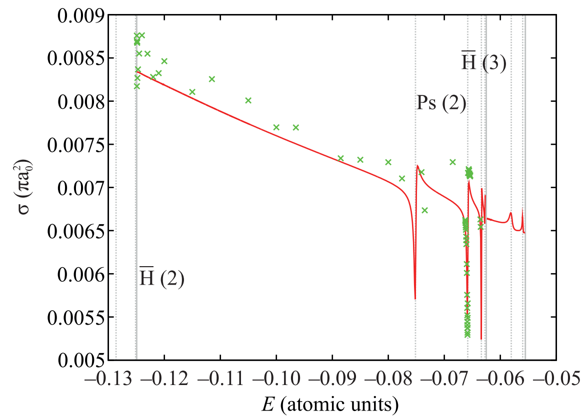

Рис. 2. (Цветной онлайн) Сечения образования антиводорода Ps(1)→ $\overline{\mathrm{H}}$(1). Крестиками отмечены точки, соответствующие работе [16] (получены в частном порядке от доктора Р. Лазаускаса). Вертикальными штриховыми линиями показаны положения резонансов [10–13]

ме того, в нашей предыдущей работе [21] на рис. 4 приведено суммарное сечение Ps(2)→ $\overline{\mathrm{H}}$(1,2) в интервале энергий между порогами Ps(2) и $\overline{\mathrm{H}}$(3), которое мы не дублируем здесь для экономии места. Среди всех перечисленных сечений слабые осцилляции можно увидеть лишь на рис. 3 в сечениях образования антиводорода в возбужденных состояниях $\overline{\mathrm{H}}$(2) над соответствующим порогом. Ввиду малости амплитуд этих колебаний и малого количества волн трудно однозначно заключить, связаны ли они с пороговым поведением, предсказываемым теорией ГД. Однако, имеющиеся осцилляции согласуются с законом (27), что проиллюстрировано на рис. 3. Все сечения имеют достаточно гладкий характер везде, кроме окрестностей подпороговых резонансов, отмеченных на рис. 2, 3. В частности, мы не видим в наших результатах резких пиков в сечениях Ps(1,2)→ $\overline{\mathrm{H}}$(1,2)

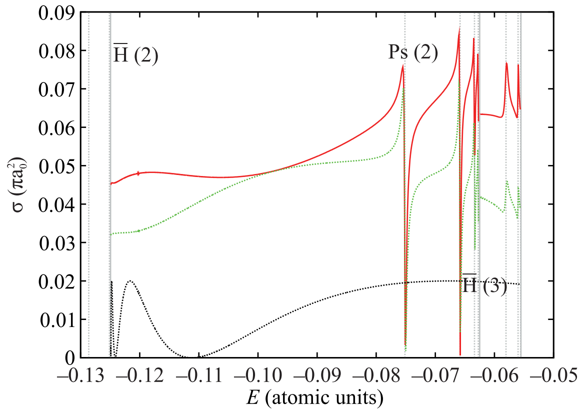

Рис. 3. (Цветной онлайн) Сечения образования антиводорода Ps(1)→ $\overline{\mathrm{H}}(2s)$ (сплошная) и Ps(1)→ $\overline{\mathrm{H}}(2p)$ (штриховая кривая). Пунктирной кривой изображен возможный график зависимости (27). Вертикальными штриховыми линиями показаны положения резонансов [10–13]

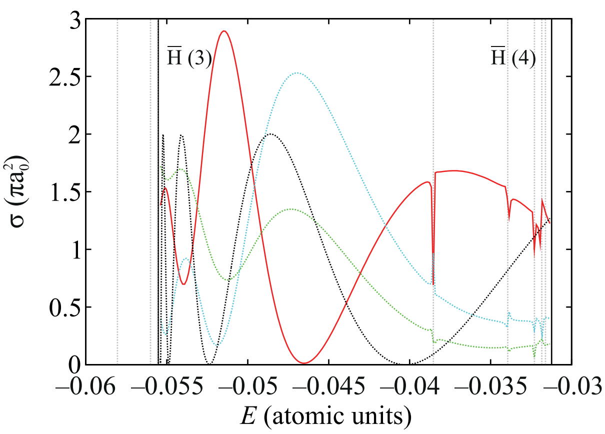

Рис. 4. (Цветной онлайн) Сечения образования антиводорода Ps($2s$)→$\overline{\mathrm{H}}(3s)$ (сплошная), Ps($2s$) → $\overline{\mathrm{H}}(3p)$ (штриховая) и Ps($2s$) → $\overline{\mathrm{H}}(3d)$ (штрихпунктирная кривая). Пунктирной кривой изображен возможный график зависимости (27). Вертикальными штриховыми линиями показаны положения резонансов [10–13]

над порогом возбужденного состояния Ps(2), полученных в работах [15, 16].

Наконец, в сечениях образования антиводорода во вторых возбужденных состояниях $\overline{\mathrm{H}}(3)$, изображенных на рис. 4, мы обнаружили осцилляции, расположение максимумов которых в целом удовлетворяет зависимости (27). Заметим, что теория ГД предсказывает малые относительные амплитуды осцилляций сечений процессов перехода в возникающие над порогом новые каналы из старых каналов [5]. Это утверждение, вообще говоря, не согласуется с видом осцилляций сечений на рис. 4, поскольку последние имеют достаточно большие амплитуды. Возможно данное обстоятельство связано с тем, что теория ГД, как указано выше, не учитывает дипольное взаимодействие между каналами с различными значениями n, хотя значения матричных элементов $A^{\alpha}_{n\ell,n'\ell'}$ в (18) при $n \neq n'$ по величине сопоставимы со значениями при $n = n'$. Одной из задач для будущих исследований может служить дальнейшее выявление причин этой несогласованности. Мы также планируем обобщить теорию учета дипольного взаимодействия на случай $L > 0$ и провести соответствующие высокоточные расчеты сечений рассеяния в системе $e^- e^+ \bar{p}$. Мы надеемся, что это позволит более определенно ответить на вопрос о существовании осцилляций ГД в полных сечениях процессов рассеяния, непосредственно измеряемых в эксперименте.

Исследования проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра “Вычислительный центр СПбГУ” (http://cc.spbu.ru). Авторы выражают благодарность В. А. Рудневу и Е. А. Яревскому за плодотворные обсуждения результатов работы.

Финансирование работы. Работа поддержана Российским научным фондом (проект номер # 23-22-00109).

Конфликт интересов. Конфликт интересов отсутствует.

1. G. Testera, S. Aghion, C. Amsler et al. (AEgIS Collaboration), Hyp. Int. **233**, 13 (2015).
2. P. Pérez, D. Banerjee, F. Biraben et al. (Collaboration), Hyp. Int. **233**, 21 (2015).
3. М. Гайлитис, Р. Дамбург, ЖЭТФ **44**, 1644 (1963) [M. Gailitis and R. Damburg, Sov. Phys. JETP **17**, 1107 (1963)].
4. M. Gailitis and R. Damburg, Proc. Phys. Soc. **82**, 192 (1963).
5. M. Gailitis, J. Phys. B **15**, 3423 (1982).
6. Ph. L. Bartlett, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, R379 (2006).
7. A. G. Abrashkevich, D. G. Abrashkevich, I. V. Khimich, I. V. Puzynin, and S. I. Vinitsky, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **24**, 2807 (1991).
8. S. Chakraborty and Y. K. Ho, Chem. Phys. Lett. **438**, 99 (2007).
9. E. Yarevsky, S. L. Yakovlev, and N. Elander, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **50**, 055001 (2017).
10. Y. K. Ho and Z.-C. Yan, Phys. Rev. A **70**, 032716 (2004).
11. K. Varga, J. Mitroy, J. Zs. Mezei, and A. T. Kruppa, Phys. Rev. A **77**, 044502 (2008).
12. R.-M. Yu, Y.-J. Cheng, L.-G. Jiao, and Y.-J. Zhou, Chin. Phys. Lett. **29**, 053401 (2012).

13. M. Umair and S. Jonsell, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **47**, 225001 (2014).
14. P. G. Burke, *R-Matrix Theory of Atomic Collisions*, Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, N.Y. (2011).
15. C.-Y. Hu, D. Caballero, and Z. Papp, Phys. Rev. Lett. **88**, 063401 (2002).
16. M. Valdes, M. Dufour, R. Lazauskas, and P.-A. Hervieux, Phys. Rev. A **97**, 012709 (2018).
17. I. I. Fabrikant, A. W. Bray, A. S. Kadyrov, and I. Bray, Phys. Rev. A **94**, 012701 (2016).
18. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М. (1985) [L. D. Faddeev and S. P. Merkuriev, *Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems*, Kluwer, Dordrecht (1993)].
19. V. V. Kostrykin, A. A. Kvitsinsky, and S. P. Merkuriev, Few Body Syst. **6**, 97 (1989).
20. V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, Commun. Comput. Phys **30**, 255 (2021).
21. В. А. Градусов, В. А. Руднев, Е. А. Яревский, С. Л. Яковлев, Письма в ЖЭТФ **114**, 6 (2021) [V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, JETP Lett. **114**, 11 (2021)].
22. M. Gailitis, J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. **9**, 843 (1976).
23. В. А. Градусов, С. Л. Яковлев, ТМФ **217**, 416 (2023) [V. A. Gradusov and S. L. Yakovlev, Theor. Math. Phys. **217**, 1777 (2023)].
24. S. P. Merkuriev, Ann. Phys. **130**, 395 (1980).
25. V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **52**, 055202 (2019).
26. А. Мессиа, *Квантовая механика*, Наука, М. (1978), т. 1 [A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam (1961)].
27. NIST Digital Library of Mathematical Functions, http://dlmf.nist.gov/, 2023.
28. L. Sokolinsky and M. Zymbler (editors), *Parallel Computational Technologies. 17th International Conference, PCT 2023, Saint Petersburg, Russia, March 28–30, 2023, Revised Selected Papers*, Springer, Cham (2023).
29. В. А. Градусов, В. А. Руднев, Е. А. Яревский, С. Л. Яковлев, Изв. РАН, сер. физ. **87**, 1191 (2023) [V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **87**, 1200 (2023)].