

Металлическая пленка на подложке в магнитном поле как магнитоплазменная замедляющая система СВЧ-ТГц диапазонов

М. В. Давидович¹⁾

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия

Поступила в редакцию 11 октября 2023 г.

После переработки 18 декабря 2023 г.

Принята к публикации 19 декабря 2023 г.

Рассмотрены магнитоплазмы вдоль тонкой металлической или хорошо проводящей полупроводниковой пленки при их движении вдоль внешнего сильного магнитного поля в плоскости пленки, а также для пленки на диэлектрической подложке. Дисперсионные уравнения для гибридных волн получены строгим методом и в приближении тонких пленок путем ведения поверхностных проводимостей. Показана возможность наличия медленных магнитоплазмонных в СВЧ и ТГц диапазонах. Рассматриваемые структуры могут использоваться как замедляющие системы для усилителей бегущей волны, в частности, ЛБВ.

DOI: 10.31857/S1234567824030066, EDN: spmurq

Для создания терагерцевых частот (ТГц) ЛБВ необходимы замедляющие системы (ЗС) с микронными размерами, что требует использования прецизионных MEMS технологий типа LIGA [1]. В таких усилителях бегущей волны перспективны широкие и тонкие ленточные электронные пучки [1, 2]. Для их фокусировки используют продольное магнитное поле с индукцией порядка 1 Тл [1, 2]. Оно создается массивными магнитными системами из редкоземельных постоянных магнитов [1]. Для увеличения мощности используют релятивистские приборы, для которых замедление может варьироваться в пределах от 2 до 5. Такие и существенно больше замедления можно получить для плазмон-поляритонов (ПП), распространяющихся вдоль тонких проводящих металлических, полупроводниковых, или графеновых пленок типа двумерного электронного газа (ДЭГ), расположенных на диэлектрических подложках [3–8]. В данной работе под термином “металлические” мы понимаем хорошо проводящие пленки ДЭГ, описываемые диэлектрической проницаемостью (ДП) модели Друде–Лоренца металла, в том числе и выполненные из легированных хорошо проводящих полупроводниковых материалов. В тонких металлических пленках без использования магнитного поля при комнатной температуре возможны замедления порядка до 10 на частотах $\omega \sim 0.1\omega_p$ [4] при относительно малых потерях. Здесь ω_p – плазменная частота (ПЧ). Для хороших металлов ПЧ лежат в ультрафиоле-

товом (УФ) диапазоне, а в ТГц диапазоне это замедление чуть больше единицы. Однако использование сильного магнитного поля может существенно менять замедление, что до сих пор не рассматривалось и не исследовалось. Имеются работы по магнитоплазмонам (МП) в проводящих полупроводниковых пленках [3–7]. В [3] рассмотрены поверхностные МП, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю, что отличается от нашего случая. В [4–7] рассмотрено возбуждение МП. В [8] рассмотрены блоховские МП в периодических плоскостных структурах. В [9] рассмотрены МП в ферромагнитной пленке (Co), обложенной слоями золота. Строгие дисперсионные уравнения (ДУ) МП, распространяющихся вдоль магнитного поля, не рассматривались.

Для работы в ТГц диапазоне надо на порядки снижать ПЧ. Желательно снижать и частоту столкновений (ЧС). Переход в ТГц диапазон может быть достигнут для МП, тем более что сильные фокусирующие продольные магнитные поля в ЗС ЛБВ уже имеются. Далее рассмотрены возможности перехода, как для комнатных, так и для криогенных температур. ДЭГ описывается поверхностной плотностью тока \mathbf{j} и предполагает введение поверхностной проводимости σ . Для тонкой металлической пленки с ДП металла ε_m плотность тока поляризации $\mathbf{J}_p = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - 1)\mathbf{E}_\tau$, где \mathbf{E}_τ – касательное к пленке электрическое поле. В пленке с толщиной t в несколько нм можно считать поле \mathbf{E}_τ постоянным, поэтому она описывается поверхностной проводимостью $\sigma(\omega) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - 1)t$, $\varepsilon_m(\omega) = \varepsilon_L - \omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_{co})$,

¹⁾e-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

$\omega_p^2 = N_e e^2 / (m_e \epsilon_0)$. Величина $N_s = N_e t$ определяет число носителей заряда на единицу поверхности, а выражение для поверхностной проводимости можно записать в форме Друде $\sigma(\omega) = \sigma_L + \sigma_{0s} / (1 + i\omega/\omega_{co})$, где $\sigma_L(\omega) = i\omega\epsilon_0(\epsilon_L - 1)t$ – поверхностная проводимость, связанная с дисперсией Лоренца ДП ϵ_L , $\sigma_{0s} = \epsilon_0 e^2 N_s / \omega_{co}$ – поверхностная проводимость на нулевой частоте. Приближение имеет место при $k_0 t |\sqrt{\epsilon_m}| \ll 1$ и относится также к тонким диэлектрическим пленкам, в которых проводимость определяется током поляризации. Формально переход к диэлектрическому случаю соответствует взятию $N_s = 0$. Переход от диэлектрика ($t \gg L_D$) к металлу ($t \ll L_D$) определяется соотношением между толщиной и длиной экранирования Дебая $L_D = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon k_B T / (N_e e^2)}$. В ТГц диапазоне хорошим материалом для ДЭГ может служить монослой графена или n -слойный графен (α -графит). В таких структурах возможно усиление ПП ленточными электронными пучками, а также в случае оптически накачанного графена усиление (или компенсация потерь) за счет активного оптически накачанного графенового листа [10, 11]. В данной работе получены новые ДУ для МП, распространяющихся вдоль магнитного поля, и показана возможность получения замедленных МП, что может быть важно для ТГц электроники.

Мы рассматриваем тонкий металлический или полупроводниковый слой (пленку) ДЭГ как ЗС. Располагаем ось x перпендикулярно поверхности пленки. Координаты в пленке $\rho = y_0 y + z_0 z$, а в двумерном k -пространстве $\mathbf{k} = y_0 k_y + z_0 k_z$. Зависимость от \mathbf{k} означает пространственную дисперсию (ПД). При $k_y = 0$ ПД означает зависимость только от замедления $n = n_z = k_z / k_0$. Структура не ограничена по y и z , поэтому зависимость волн $\exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\rho - ik_x x)$. Как частный случай будем рассматривать ПП вдоль полупространства. Без магнитного поля металл в модели Друде–Лоренца описывается скалярной диэлектрической проницаемостью (ДП) $\epsilon_m = \epsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_{co})$, как и диэлектрик. Формально переход к диэлектрику осуществляется при $\omega_p = 0$ (отсутствие свободных зарядов). Поэтому далее ДП пленки будем обозначать $\epsilon_m = \epsilon$, а ДП диэлектрической подложки как ϵ_d . Вводим нормированные (на импеданс $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73$ Ом) волновые импедансы $\rho_e = y_e^{-1} = k_z / (k_0 \epsilon)$, $\rho_h = y_h^{-1} = k_0 \mu / k_z$ Е-волн и Н-волн вдоль оси x (нормали). Здесь μ – магнитная проницаемость изотропной среды. Тогда $k_x = \sqrt{k_0^2 \epsilon \mu - \mathbf{k}^2}$, $\mathbf{k}^2 = k^2 = k_y^2 + k_z^2$. При падении Е-волны из вакуума структура на границе имеет входную нормированную проводимость $Y_{in} = y_e$. При скалярной σ имеем условие возникновения Е-ПП $y_e + \sigma = -y_{0e}$. Здесь

$y_{0e} = k_0 / k_{0x} = k_0 / \sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}^2}$ – проводимости Е-волны в вакууме. Для Е-ПП вдоль границы диэлектрического полупространства сразу следует явное дисперсионное уравнение (ДУ) Ценнека $k_z = k_0 \sqrt{\epsilon / (\epsilon + 1)}$, а для проводящей пленки в среде с ДП ϵ_d имеем ДУ $2y_e + \sigma = 0$ или $k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_d - (2\epsilon_d - (2\epsilon_d/\sigma))^2}$. Для Н-ПП получаем ДУ $k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_d - (\sigma/2)^2}$. Для Е-ПП вдоль поверхности магнитоэлектрического полупространства явное ДУ Ценнека приобретает вид $k_z = k_0 \sqrt{\epsilon(\epsilon - \mu) / (\epsilon^2 - 1)}$, а для Н-ПП соответственно $k_z = k_0 \sqrt{\mu(\mu - \epsilon) / (\epsilon^2 - 1)}$. Вдоль диэлектрического полупространства этот ПП не существует. ДУ для слоя конечной толщины приведены в [12]. Они неявные. Эти ДУ получены при отсутствии внешнего магнитного поля. В случае проводящей пленки оно усложняет ДУ.

Тонкие металлические (проводящие) пленки ДЭГ во внешнем магнитном поле приближенно можно описать моделями электрической поверхностной проводимости. При этом такие проводимости уже тензорные, а структуры невзаимные и гиротропные. Строгие ДУ для можно построить на основе метода объемных интегральных уравнений [13], или путем использования коммерческих пакетов программ электродинамического моделирования. Это неудобно для моделирования дисперсии. В области больших замедлений для ферритовых пленок используют магнитостатическое приближение. Электростатическое приближение возможно, но для сильно замедленных МП, что реально может не выполняться.

Получим сначала строгие ДУ для тонкой пленки, а затем приближенные ДУ на основе модели двумерной проводимости, включая и пленку на подложке. Рассмотрим тонкую проводящую пленку во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H} = H_{0z} \mathbf{z}_0$. Используем плазменную модель ДП металла

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(\omega) &= \epsilon_{yy} = \epsilon_x = \epsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2 - i\omega\omega_{co}}, \\ \epsilon_{xy}(\omega) &= -\epsilon_{yx} = \frac{-i\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2 - i\omega\omega_{co})} = -ib, \quad (1) \\ \epsilon_{zz}(\omega) &= \epsilon(\omega) = \epsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\omega_{co}}. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_p^2 = N_e e^2 / (\epsilon_0 m_e)$ – ПЧ, $\omega_H = \mu_0 H_{0z} e / m_e$ – циклотронная частота, ω_{co} – ЧС, ϵ_L – терм Лоренца. Вплоть до оптических частот он почти постоянный и действительный. Для серебра можно взять $\epsilon_L = 9.3$, $\omega_p = 1.57 \cdot 10^{16}$ Гц. При температуре 300 К для серебра $\omega_{co} = 3.56 \cdot 10^{13}$ Гц. Эти значения получены с учетом концентрации электронов, экспе-

риментального значения проводимости на постоянном токе и экспериментального значения частоты перехода реальной части ДП через нуль. Для меди $\varepsilon_L = 13.09$, $\omega_p = 1.65 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 4.23 \cdot 10^{13}$ Гц. Для металлов ЧС обратна пропорциональна температуре, а концентрация N_e и ПЧ практически от нее не зависят. При температуре порядка 1 К можно взять $\omega_{co} \approx 10^{11}$. Для полупроводников используем связь концентрации с температурой и шириной запрещенной зоны. Для ДЭГ в виде пленки InSb или легированного n -InSb имеем $\varepsilon_L = 17.0$, для n -GaAs (легированного кремнием) $\varepsilon_L = 14.0$. ПЧ тогда при комнатной температуре попадает в ИК диапазон, а при криогенных температурах сильно снижается, но может существенно быть повышена путем легирования. ЧС можно сдвинуть в СВЧ диапазон, используя жидкий азот. Для проводимости имеем $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \xi_{xx}\eta_0^{-1} = ik_0t\eta_0^{-1}(\varepsilon_x - 1)$, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = k_0t\eta_0^{-1}b$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$, $\sigma_{zz} = ik_0t\eta_0(\varepsilon - 1)$. Если магнитное поле нормально к пленке, т.е. $\mathbf{H} = H_0\mathbf{x}_0$, то следует везде заменить $x \leftrightarrow z$, т.е. взять $\sigma_{xx} = ik_0t\eta_0^{-1}(\varepsilon - 1)$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$, $\sigma_{xz} = -\sigma_{zx} = k_0t\eta_0^{-1}b$, $\sigma_{zz} = k_0t\eta_0^{-1}\omega_p^2\omega_H/(\omega^3 - \omega_H^2\omega - i\omega^2\omega_{co})$. Заметим, что в этом случае при $z \rightarrow -z$ компонента σ_{xz} изменяет знак, т.е. имеет место невязимость. Будем искать ПП с зависимостями от поперечной координаты $\exp(-ik_{mx}x)$, причем в области вакуума ($m = 0$) брать $k_{0x} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$, в области пленки ($m = 1$) $k_{1x} = k_x$, в области диэлектрической подложки или полупространства ($m = 2$) $k_{2x} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_d - k_z^2}$. Рассматриваем бесконечные по осям y и z структуры рис. 1 (вставка) и полагаем $k_y = 0$, т.е. независимость от координаты y . Уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & -ib & 0 \\ ib & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} 0 & k_z & 0 \\ -k_z & 0 & k_z \\ 0 & -k_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} 0 & -k_z & 0 \\ k_z & 0 & -k_x \\ 0 & k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для удобства введено нормированное магнитное поле $\mathbf{h} = \eta_0\mathbf{H}$ с размерностью электрического поля В/м. Везде опущен общий множитель $\exp(i\omega\tau - ik_zz)$ для компонент полей (время τ далее нигде не фигурирует). Подставляя (3) в (2), получаем

$$\begin{pmatrix} k_0^2\varepsilon_x - k_z^2 & -ibk_0^2 & -k_xk_z \\ ibk_0^2 & k_0^2\varepsilon_x - k_x^2 - k_z^2 & 0 \\ -k_xk_z & 0 & k_0^2\varepsilon - k_x^2 \end{pmatrix} \times$$

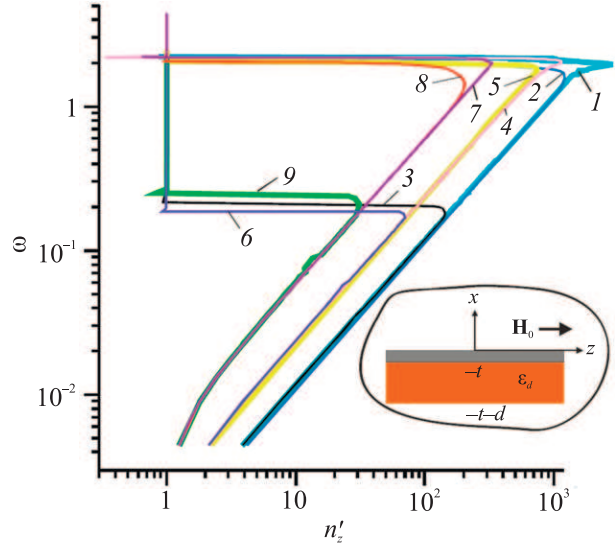


Рис. 1. (Цветной онлайн) Дисперсия МП (частота ω в ТГц в зависимости от замедления $n'z = k'_z/k_0$) в серебряной пленке при разных толщинах (нм) и температурах (К): кривая 1 – $t = 10$, $T = 2$; 2 – $t = 10$, $T = 10$; 3 – $t = 10$, $T = 77$; 4 – $t = 5$, $T = 2$; 5 – $t = 5$, $T = 10$; 6 – $t = 5$, $T = 77$; 7 – $t = 10$, $T = 2$; 8 – $t = 10$, $T = 10$; 9 – $t = 10$, $T = 77$, $\omega_H = 1.76$ ТГц

$$\times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Равенство нулю определителя в (4) приводит к дисперсионному уравнению Френеля (УФ)

$$(k_0^2\varepsilon_x\varepsilon - k_z^2\varepsilon - k_x^2\varepsilon)(k_0^2\varepsilon_x - k_z^2 - k_x^2) - b^2k_0^2(k_0^2\varepsilon - k_x^2) = 0. \quad (5)$$

Это биквадратное уравнение как относительно k_z , так и относительно k_x :

$$k_{(x,z)\pm} = B_{(x,z)} \pm \sqrt{B_{(x,z)}^2 - C_{(x,z)}}. \quad (6)$$

Здесь обозначено: $B_x = [k_0^2(\varepsilon_\tau^2/\varepsilon_x + \varepsilon) - k_z^2(1 + \varepsilon/\varepsilon_x)]/2$, $B_z = k_0^2(\varepsilon + \varepsilon_x)/2 - k_x^2(1 + \varepsilon_x/\varepsilon)/2$, $C_x = k_z^4\varepsilon/\varepsilon_x - 2k_0^2\varepsilon k_z^2 + k_0^4\varepsilon_\tau^2(\varepsilon/\varepsilon_x)$, $C_z = (k_0^2\varepsilon - k_x^2)(k_0^2\varepsilon_\tau^2/\varepsilon - k_x^2\varepsilon_x/\varepsilon)$, $\varepsilon_\tau^2 = \varepsilon_x^2 - b^2$. Также имеем $B_x = [(k_0^2\varepsilon_x - k_z^2)(1 + \varepsilon/\varepsilon_x) - b^2k_0^2/\varepsilon_x]/2$, $C_x = (k_0^2\varepsilon_x - k_z^2 - b)(k_0^2\varepsilon_x - k_z^2 + b)\varepsilon/\varepsilon_x$. Мы ставим индексы \pm в соответствие со знаками перед корнем в (6). Тогда получаем $k_{(x,z)\pm} = \pm \sqrt{B_{(x,z)}} \pm \sqrt{B_{(x,z)}^2 - C_{(x,z)}}$. Знаки берутся независимо, т.е. имеем четыре корня. Пусть ветвь корня для $k_{x\pm} = k'_{x\pm} - ik''_{x\pm}$ выбрана так, что знак “+” перед внешним корнем соответствует прямой (падающей), а знак “–” определяет противоположную (отраженную) волну вдоль оси x . Можно по-разному

выбирать прямую волну: по направлению движения фазы: $\text{Re}(k_{x+}) > 0$, или по направлению движения энергии: $\text{Im}(k_{x+}) < 0$. В данном случае используем первый вариант. Далее величина $k_z = k'_z - ik''_z$ подлежит определению (в формулах считается заданной), причем при определении берем $\text{Re}(k_z) = k'_z > 0$. Тем самым за положительное направление рассматриваем движение фазы в направлении оси z . При заданном k_z имеем четыре значения k_x . При $k''_{x+} > 0$ волна $\exp(-ik'_{x+}x - k''_{x+}x)$ затухает вдоль x , а противоположная волна с $-k_{x+}$ возрастает. Такая волна прямая: ей соответствует условие $k'_z k''_z > 0$ (затухание вдоль движения фазы). В обратной волне имеем условие $k'_z k''_z < 0$, т.е. движение затухания (энергии) противоположно движению фазы [12]. В бесконечной среде можно взять $k_x = 0$, и тогда $k_{z\pm}^2 = k_0^2(\varepsilon_x \pm b)$. Это говорит о том, что в пренебрежении диссипацией в области частот, где $\varepsilon_x \pm b \gg 1$ имеется сильно замедленная плоская циркулярно поляризованная волна. В области частот, где $0 \leq \varepsilon_x \pm b < 1$, эта волна быстрая, а в области частот, где $\varepsilon_x \pm b < 0$, волна затухающая. Полагая $\omega_{co} = 0$, найдем области, где ε_x , ε , b , ε_τ^2 , $\varepsilon_\tau^2/\varepsilon$ и $\varepsilon_\tau 2/\varepsilon_x$ положительные. Для $\varepsilon_x > 0$ это $0 < \omega < \omega_H$ и $\omega > \sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2/\varepsilon_L}$. Для $\varepsilon > 0$ это $\omega > \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$. Для $b > 0$ это $\omega > \omega_H$. Для $\varepsilon_\tau^2 > 0$ граница области определяется уравнением третьей степени $\omega^3 - \omega(\omega_H^2 + \omega_p^2/\varepsilon_L) = \omega_p^2\omega_H/\varepsilon_L$. Оно имеет корень $\omega = \omega_H$, поэтому $\omega > \omega_H$. Для $\varepsilon_\tau^2/\varepsilon > 0$ это $\omega < \omega_H$ и $\omega > \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$. Для $\varepsilon_\tau^2/\varepsilon_x$ это $\omega > \sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2/\varepsilon_L}$. Сильная диссипация существенно изменяет такие границы для реальных частей указанных величин. Под сильной диссипацией понимаем ЧС $\omega_c \sim \omega_H$ и более. Для хороших металлов при комнатной температуре диссипация сильная: $\omega_c \gg \omega_H$. Тогда около резонанса $(\omega_H - \omega)^2 \ll \omega\omega_c \approx \omega_H\omega_c$, и имеем $\varepsilon \approx \varepsilon_x \approx -i\omega_p^2/(\omega\omega_c)$, т.е. $\varepsilon/\varepsilon_x \sim 1$. Как будет показано выше (рис. 1), в этом случае при $\omega \approx \omega_H$ возможна медленная поверхностная волна с $k_x^2 \approx -k_z^2 < 0$. При слабой диссипации $\omega_{co} \ll \omega_H$ имеем $\varepsilon/\varepsilon_x \sim 1 - \omega + H^2/\omega^2$. В случае $\omega < \omega_H$ возможен объемный МП с $k_x^2 \approx -k_z^2\varepsilon/\varepsilon_x > 0$. Под объемным понимаем колебания полей в объеме пленки. При $\omega > \omega_H$ этот МП становится поверхностным, т.е. затухающим вглубь пленки. На резонансе МП сильно диссипативный.

Цель работы показать, что для проводящего слоя или пленки конечной толщины t порядка нескольких нм в СВЧ и ТГЧ диапазонах возможны медленные МП. В СВЧ области $\omega \sim 10^{10}$ для металлов имеем $\varepsilon/i \approx \omega_p^2/(\omega\omega_{co}) \sim 10^9$. Пусть диссипа-

ция слабая: $\omega_H \gg \omega_{co}$. Для индукции 1 Тл имеем $\omega_H = 0.176$ ТГц. Поэтому для снижения ω_{co} на два и более порядка необходимы криогенные температуры или весьма большие индукции. Получить индукции более 2 Тл на редкоземельных магнитах проблематично из-за насыщения. Лабораторно получены постоянные индукции порядка десятков (до 45) Тл. Однако это сложные магнитные системы. Поэтому единственный путь для ТГЦ электроники – снижать ЧС. Для In-Sb при температуре жидкого азота ее можно снизить до нескольких ГГц. Для металлов для снижения ω_{co} на два порядка требуется жидкий гелий. Представляет интерес использование сверхпроводящих металлических пленок ДЭГ. В ТГЧ диапазоне энергия кванта $\hbar\omega \sim 10^{-2}$ эВ, и энергия связи куперовских пар в таких пленках должна быть существенно выше. Соответственно необходимо определять высокочастотный импеданс пленки ДЭГ на подложке. Интересен случай $\omega_H \sim \omega_p$, реализуемый для полупроводниковых материалов, например, в InSb или n-InSb. Концентрация носителей при $T = 300$ К в недопированном InSb $N = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, что при $B_z = 1$ Тл и эффективной массе электронов $0.013m_e$ соответствует $\omega_p = 7$ ТГц и $\omega_H = 13.5$ ТГц. Для InSb ширина запрещенной зоны 0.172 эВ, коэффициент температурного изменения ширины запрещенной зоны $-2.8 \cdot 10^{-4}$ эВ/К, зависимость подвижности от температуры $\mu \sim T^{-3/2}$. При собственной удельной проводимости $3 \cdot 10^4$ См/м при $T = 300$ К и $3 \cdot 10^2$ См/м при $T = 77$ К [14] получаем оценки: $\omega_{co} = 1.4 \cdot 10^{10}$ Гц при $T = 300$ и при $T = 77$ К концентрацию $N = 1.5 \cdot 10^{20}$, ПЧ $\omega_p = 0.6$ ТГц и ЧС $\omega_c = 0.106$ ГГц. Легируя n-InSb до концентраций $N = 2 \cdot 10^{23}$, имеем $\omega_p = 22$ ТГц и $\omega_c = 3.9$ ГГц. Таким образом, использование жидкого азота и допирование позволяет снизить ЧС в СВЧ диапазон, при этом получить ПЧ и циклотронную частоту в ТГЧ диапазоне. Отметим, что проводимость сильно легированного n-InSb слабо зависит от температуры. Для нелегированного GaAs с концентрацией носителей заряда $5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и эффективной массой электронов $0.067m_e$ получаем $\omega_p = 1.5 \cdot 10^{13}$ Гц при $T = 300$ К. Аналогично можно использовать пленки ДЭГ из других полупроводников или полуметаллов, например, из германия и теллура. При концентрации носителей $4.0 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ в собственном германии при $T = 300$ К и эффективных массах электронов $0.55m_e$ и дырок $0.388m_e$ получаем весьма низкую ПЧ $\omega_p = 5 \cdot 10^6$ Гц, для продвижения которой в ТГЧ диапазон концентрацию надо повышать на несколько порядков. Для теллура при $T = 77$ К концентрация дырок имеет порядок 10^{19} м^{-3} , и имеем такой

же порядок ПЧ, как и для германия, но при существенно меньшей ЧС. Для бесщелевого теллурида ртути HgTe при $T = 4.2$ К концентрация электронов 10^{21} м^{-3} при эффективной массе $0.013m_e$ и подвижности $10^8 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ [15], что приводит к $\omega_P = 2.6 \cdot 10^{13}$ и весьма малой ЧС $3.74 \cdot 10^6$ Гц. Таким образом, можно создать пленку ДЭГ, описываемую ДП металла с ПЧ и циклотронной частотой в ТГЦ диапазоне, а ЧС, лежащей существенно ниже: в СВЧ диапазоне или даже в мегагерцовой области.

Рассмотрим ДУ для конечных по оси x структур. Пусть ищется значение k_z . Фиксируя его, из УФ определяем два значения $k_{x\pm}^2$. Определение k_z осуществляется путем его приближенного задания с последующим уточнением итерациями на основе полученного ДУ. Поэтому из четырех значений $\pm k_{x\pm}$ всегда можно определить два: k_{x+} и k_{x-} , например, соответствующие переносу энергии вдоль оси x . С тем же успехом можно выбрать ветвь корня из условия $\text{Re}(k_x)$, т.е. из условия движения фазы. В вакууме будем рассматривать Е-волны и Н-волны вдоль оси x . Внутри пленки волны гибридные. Вводим обозначения $n_x = k_x/k_0$, $n_z = k_z/k_0$. Обозначая $\varepsilon_\tau^2 = (\varepsilon_x^2 - b^2)$, из уравнений (2) выражаем электрические компоненты через магнитные и магнитные через электрические:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_\tau^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & ib & 0 \\ -ib & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\tau^2/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_z h_y \\ n_x h_z - n_z h_x \\ -n_x h_y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & 0 \\ n_z & 0 & -n_x \\ 0 & n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Матрица в (7) обратная матрице слева в формуле (2). Подставляя первое уравнение во второе, получаем $(\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x) h_x - ib n_z^2 h_y + n_z n_x \varepsilon_x h_z = 0$, $ib n_z^2 h_x + (\varepsilon_\tau^2 - n_z \varepsilon_x n_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon) h_y - ib n_z n_x h_z = 0$, $n_z n_x \varepsilon_x h_x + (\varepsilon_\tau^2 - n_x n_x \varepsilon_x) h_z + ib n_x n_z h_y = 0$. Определитель этой системы должен обращаться в нуль, откуда следует другой вид того же самого УФ. Выразим из первых двух уравнений продольные (касательные к пленке) компоненты через поперечную компоненту h_y :

$$h_y = \beta_y h_x = -\frac{ib \varepsilon_\tau^2}{\varepsilon_\tau^2 \varepsilon_x (1 - n_x^2/\varepsilon) - n_z^2 \varepsilon_x \varepsilon_z + b^2 n_z^2} h_x,$$

$$h_z = \beta_z h_x = \frac{b^2 n_z^4 - (\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x)(\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon)}{b^2 n_z^2 n_x n_x + n_z n_x \varepsilon_x (\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon)} h_x.$$

Подставляя их в последнее уравнение, получим УФ

$$\begin{aligned} & (n_x n_z)^2 \varepsilon_x + (\varepsilon_\tau^2 - n_x n_x \varepsilon_x) \times \\ & \times \frac{b^2 n_z^4 - (\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x)(\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon)}{b^2 n_z^2 + \varepsilon_x (\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon)} = \\ & = \frac{b^2 \varepsilon_\tau^2 (n_x n_z)^2}{\varepsilon_x (\varepsilon_\tau^2 - n_z^2 \varepsilon_x - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon) + b^2 n_z^2}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь (8) в (7), получим уравнения $(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_z^2)(E_x - ib(n_x^2 + n_z^2)E_y + \varepsilon_x n_x n_z E_z) = 0$, $ib n_z^2 E_x + (\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x(n_x^2 + n_z^2))E_y - ib n_x n_z E_z = 0$, $n_x n_z E_x + (\varepsilon - n_x^2)E_z = 0$, и УФ вида $(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x(n_x^2 + n_z^2))[\varepsilon_\tau^2 - n_x^2 \varepsilon_\tau^2/\varepsilon - n_z \varepsilon_x] - b^2 n_z^2 (n_x^2 + n_z^2) = 0$. Мы получили разные виды одного и того же УФ. Из полученной системы уравнений следует

$$E_y = \alpha_y E_x = \frac{ib \varepsilon_\tau^2}{b^2 (n_x^2 + n_z^2) + \varepsilon_x (\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x (n_x^2 + n_z^2))} E_x, \quad (9)$$

$$E_z = \alpha_z E_x = \quad (10)$$

$$= -\frac{(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_z^2)(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x (n_x^2 + n_z^2)) - b^2 (n_x^2 + n_z^2) n_z^2}{\varepsilon_x n_x n_z (\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x (n_x^2 + n_z^2)) + b^2 (n_x^2 + n_z^2) n_x n_z} E_x.$$

т.е. электрические касательные компоненты выражены через поперечную компоненту E_x . Теперь для касательных в плоскости пленки компонент полей из (7) и (8) имеем $E_y = [\varepsilon_x (n_x h_z - n_z h_x) - ib n_z h_y]/\varepsilon_\tau^2$, $E_z = -n_x h_y/\varepsilon$, $h_y = n_z E_x - n_x E_z = n_z \varepsilon E_x/(\varepsilon - n_x^2)$, $h_z = n_x E_y$. Подставляя магнитные компоненты в электрические компоненты и наоборот, получим

$$E_y = -n_z \frac{\varepsilon_x (\varepsilon - n_x^2) h_x + ib n_z \varepsilon E_x}{(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_x^2) (\varepsilon - n_x^2)}, \quad (11)$$

$$E_z = \frac{n_x n_z}{n_x^2 - \varepsilon} E_x = \alpha_{zx} E_x, \quad (12)$$

$$h_y = \frac{n_z \varepsilon}{\varepsilon - n_x^2} E_x = y_{ez} E_x, \quad (13)$$

$$h_z = -\frac{n_x n_z \varepsilon_x (\varepsilon - n_x^2) h_x + ib n_x n_z \varepsilon E_x}{(\varepsilon_\tau^2 - n_x n_x \varepsilon_x) (\varepsilon - n_x^2)}. \quad (14)$$

Осталось два неиспользованных уравнения Максвелла системы (7), (8): $\varepsilon_\tau^2 E_x = \varepsilon_x n_z h_y + ib (n_x h_z - n_z h_x)$ и $h_x = -n_z E_y$. Подставляя в них поперечные компоненты, имеем

$$E_x = -\frac{ib n_z (\varepsilon - n_x^2) \varepsilon_\tau^2}{(\varepsilon_\tau^2 (\varepsilon - n_x^2) - n_z^2 \varepsilon_x \varepsilon) (\varepsilon_\tau^2 - n_x^2 \varepsilon) - b^2 n_x^2 n_z^2 \varepsilon} h_x,$$

$$h_x = \frac{ibn_x^3 \varepsilon}{(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_x^2)(\varepsilon - n_x^2) - n_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon - n_x^2)} E_x.$$

Эти уравнения говорят о том, что моды гибридные, и полагать отдельно $E_x = 0$ или $h_x = 0$ нельзя. Связь исчезает при снятии магнитного поля ($\varepsilon_x = \varepsilon$, $b = 0$). Подставляя второе уравнение в первое, имеем еще один вид УФ. Пусть волна весьма медленная, т.е. $|k_z| \gg k_0$. Используя первый полученный вид УФ, пренебрегая в нем k_0 по сравнению с $k_z = 0$, т.е. полагая $k_0 = 0$ (электростатическое приближение), получим $k_x^2 \approx k_z^2 [-(\varepsilon_x + \varepsilon) \pm (\varepsilon_x - \varepsilon)] / (2\varepsilon_x)$ и два приближенных корня: $k_{x1}^2 \approx -k_z^2 \varepsilon / \varepsilon_x$ и $k_{x2}^2 \approx -k_z^2$. Пусть потери весьма малы: $\omega \gg \omega_{co}$. Тогда можно считать ε большой по модулю и отрицательной. Вблизи резонанса величина ε_x также большая положительная при $\omega < \omega_H$ и отрицательная при $\omega > \omega_H$. В первом случае для медленной слабо диссипативной волны $k_{x1}^2 > 0$, т.е. волна объемная (в пленке имеются вариации полей, описываемые тригонометрическими функциями). Во-втором случае волна поверхностная: поля внутри пленки экспоненциально затухают. Для корня $k_{x2}^2 \approx -k_z^2$ волна всегда поверхностная. Уравнение (11) можно записать в виде $E_y = -\rho_{hz} h_x + \alpha_{yx} E_x$, где $\rho_{hz} = n_z \varepsilon_x / (\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_x^2)$, $\alpha_{yx} = -ibn_x^2 \varepsilon_x / [(\varepsilon_\tau^2 - \varepsilon_x n_x^2)(\varepsilon - n_x^2)]$. Аналогично для уравнения (14) имеем $h_z = \beta_{zx} h_x - y_{hy} E_x$, где $\beta_{zx} = -n_x n_z \varepsilon_x / (\varepsilon_\tau^2 - n_x^2 \varepsilon_x)$, $y_{hy} = ibn_x \varepsilon / [(\varepsilon_\tau^2 - n_x^2 \varepsilon_x)(\varepsilon - n_x^2)]$. Здесь введены нормированные волновые сопротивления и проводимости (обратные им величины) относительно отдельных осей, которые обозначены соответствующими индексами. Введем также сопротивления $\rho_{hx} = 1/n$ и $\rho_{ex} = -E_z/h_y = n_x/\varepsilon$. При снятии магнитного поля $\rho_{hx} = E_y/h_z$. В вакууме соответствующие величины будем обозначать $\rho_{0h} = 1/\sqrt{1-n^2}$ и $\rho_{0e} = \sqrt{1-n^2}$. При снятии магнитного поля также $\alpha_{yx} = y_{hy} = 0$, $\beta_{zx} = -n_x n_z / (\varepsilon - n_x^2)$. Теперь касательные поля внутри пленки можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_x(x) &= E_1^+ \exp(-ik_{xm}x) + E_1^- \exp(ik_{xm}x), \\ h_x(x) &= h_z^+ \exp(-ik_{xm}x) - h_1^- \exp(ik_{xm}x), \\ E_y(x) &= (\alpha_{yx} E_1^+ - \rho_{hz} h_1^+) \exp(-ik_{xm}x) + \\ &+ (\alpha_{yx} E_1^- + \rho_{hz} h_1^-) \exp(ik_{xm}x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_z(x) &= \alpha_{zx} E_1^+ \exp(-ik_{xm}x) - \alpha_{zx} E_1^- \exp(ik_{xm}x), \\ h_y(x) &= y_{ez} E_1^+ \exp(-ik_{xm}x) + y_{ez} E_1^- \exp(ik_{xm}x), \\ h_z(x) &= (\beta_{zx} h_1^+ - y_{hy} E_1^+) \exp(-ik_{xm}x) + \\ &+ (\beta_{zx} h_1^- - y_{hy} E_1^-) \exp(ik_{xm}x). \end{aligned}$$

Здесь $m = 1, 2$, и все коэффициенты зависят от k_{xm} (соответственно, от n_{xm}), причем $\alpha_{zx}(-k_{xm}) = -\alpha_{zx}(k_{xm})$, $\beta_{zx}(-k_{xm}) = -\beta_{zx}(k_{xm})$, а все остальные зависят квадратично, т.е. не меняют знак для волн противоположного направления. Поскольку \mathbf{h} – псевдо-вектор, мы изменили знак у h_1^- , хотя это не принципиально. В вакууме при $z > 0$ рассмотрим E-волны и H-волны вдоль оси x , при этом только уходящие от структуры. В вакууме при $-t < z$ также рассмотрим только волны, уходящие от структуры. Это соответствует концепции излучения вытекающей волны. С таким же успехом можно взять только сходящиеся (втекающие) волны [10]. Эквивалентный способ задания волн – рассматривать затухание от структуры в случае медленной волны. Это обычно используют, когда $k_z > k_0$ и действительное, что у нас не имеет места. Итак, в вакууме при $x > 0$

$$\begin{aligned} E_y(x) &= E_{0y}^+ \exp(-ik_{0x}x), \\ h_z(x) &= y_{0h} E_{0y}^+ \exp(-ik_{0x}x), \\ E_z(x) &= E_{0z}^+ \exp(-ik_{0x}x), \\ h_y(x) &= -y_{0e} E_{0z}^+ \exp(-ik_{0x}x). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $k_{0x} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$, $y_{0e} = k_0/k_{0x} = 1/n_{0x}$, $y_{0h} = k_{0x}/k_0 = n_{0x} = \sqrt{1-n^2}$. В области $-t < z$ у $\exp(-ik_{0x}x)$ амплитуд вместо нулевого индекса будем писать индекс 2 и поменяем плюс на минус, например, $E_{0y}^+ \rightarrow E_{2y}^-$. В формулах (16) теперь следует заменить на $\exp(ik_{0x}(x+t))$ и взять проводимости с отрицательным знаком, поскольку они изменяют знак при изменении знака у k_{0x} . Для первой границы имеем уравнения $\alpha_{yx} E_1^+ - \rho_{hz} h_1^+ \alpha_{yx} E_1^- + \rho_{hz} h_1^- = E_{0y}^+$, $\alpha_{zx} E_1^+ - \alpha_{zx} E_1^- = E_{0z}^+$, $y_{ez} E_1^+ y_{ez} E_1^- = -y_{0e} E_{0z}^+$, $\beta_{zx} h_1^+ - y_{hy} E_1^+ + \beta_{zx} h_1^- - y_{hy} E_1^- = y_{0h} E_{0y}^+$. Из второго и третьего уравнений получаем $E_1^+ = E_{0z}^+ = E_{0z}^+ (1/\alpha_{zx} - y_{0e}/y_{ez})/2$, $E_1^- = -E_{0z}^+ (1/\alpha_{zx} + y_{0e}/y_{ez})/2$. Подставляя в два других, получаем два уравнения, из которых находим $h_1^+ = (\rho_{hz} a_2 - \beta_{zx} a_1)/(2\beta_{zx} \rho_{hz})$, $h_1^- = (\rho_{hz} a_2 + \beta_{zx} a_1)/(2\beta_{zx} \rho_{hz})$. Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= -\rho_{hz} h_1^+ + \rho_{hz} h_1^- = E_{0y}^+ + E_{0z}^+ \alpha_{yx} (y_{0e}/y_{ez}), \\ a_2 &= \beta_{zx} h_1^+ + \beta_{zx} h_1^- = y_{0h} E_{0y}^+ - E_{0z}^+ y_{hy} (y_{0e}/y_{ez}). \end{aligned}$$

Для второй границы $E_y(-t) = E_{2y}^-$, $h_z(-t) = -y_{0h} E_{2y}^-$, $E_z(-t) = E_{2z}^-$, $h_y(-t) = y_{0e} E_{2z}^-$. Сшивая с полями (15), получаем коэффициенты разложения $E_1^+ = (y_{ez} + y_{0e} \alpha_{zx}) \exp(-ik_{xm}t) E_{2z}^- / (2y_{ez} \alpha_{zx})$, $E_1^- = (y_{0e} \alpha_{zx} - y_{ez}) \exp(ik_{xm}t) E_{2z}^- / (2y_{ez} \alpha_{zx})$, а также $h_1^+ (\rho_{hz} a_4 - \beta_{zx} a_3) \exp(-ik_{xm}t) / (2\beta_{zx} \rho_{hz})$, $h_1^- = (\rho_{hz} a_4 + \beta_{zx} a_3) \exp(ik_{xm}t) / (2\beta_{zx} \rho_{hz})$. Здесь обозначены коэффициенты $a_3 =$

$E_{2y}^- - \alpha_{yx} E_1^+(ik_{xm}t) - \alpha_{yx} E_1^- \exp(-ik_{xm}t)$, $a_4 = -y_{0h} E_{2y}^- + y_{hy} E_1^+ \exp(ik_{xm}t) + y_{hy} E_1^- \exp(-ik_{xm}t)$. Теперь, приравнивая полученные двумя способами коэффициенты, имеем уравнения

$$\begin{aligned}
 (y_{ez} - \alpha_{zx} y_{0e}) E_{0z}^+ - (y_{ez} + y_{0e} \alpha_{zx}) \exp(-ik_{xm}t) E_{2z}^- &= 0, \\
 (y_{ez} + \alpha_{zx} y_{0e}) E_{0z}^+ + (y_{0e} \alpha_{zx} - y_{ez}) \exp(ik_{xm}t) E_{2z}^- &= 0, \\
 \rho_{hz} a_2 - \beta_{zx} a_1 &= (\rho_{hz} a_4 - \beta_{zx} a_3) \exp(-ik_{xm}t), \\
 \rho_{hz} a_2 + \beta_{zx} a_1 &= (\rho_{hz} a_4 - \beta_{zx} a_3) \exp(ik_{xm}t).
 \end{aligned}$$

Запишем эту систему уравнений в виде $a_{11} E_{0z}^+ + a_{12} E_{2z}^- = 0$, $a_{21} E_{0z}^+ + a_{22} E_{2z}^- = 0$, $a_{31} E_{0z}^+ + a_{32} E_{2z}^- + a_{33} E_{0y}^+ + a_{34} E_{2y}^- = 0$, $a_{41} E_{0z}^+ + a_{42} E_{2z}^- + a_{43} E_{0y}^+ + a_{44} E_{2y}^- = 0$, где $a_{11} = y_{ez} \alpha_{zx} - y_{0e} \alpha_{zx}$, $a_{12} = -(y_{ez} + y_{0e} \alpha_{zx}) \exp(-ik_{xm}t)$, $a_{21} = y_{ez} \alpha_{zx} + y_{0e} \alpha_{zx}$, $a_{22} = -(y_{0e} \alpha_{zx} - y_{ez}) \exp(ik_{xm}t)$. Приравнивая определитель нулю, получаем два ДУ: $D_1(k_0, k_z) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$ и $D_2(k_0, k_z) = a_{33} a_{44} - a_{34} a_{43} = 0$. Первое принимает вид

$$\frac{y_{ez} - \alpha_{zx} y_{0e}}{y_{ez} + y_{0e} \alpha_{zx}} = \pm \psi = \pm \exp(-ik_{xm}t). \quad (17)$$

При снятии магнитного поля оно суть ДУ Е-ПП с электрической и магнитной стенками в центре пленки [12]. Рассмотрим второе ДУ. В нем $a_{33} = \rho_{hz} y_{0h}$, $a_{34} = (\rho_{hz} y_{0h} \exp(-ik_{xm}t) + \beta_{zx} \exp(-ik_{xm}t))$, $a_{43}(\rho_{hz} y_{0h})$, $a_{44}(\rho_{hz} y_{0h} \exp(ik_{xm}t) - \beta_{zx} \exp(ik_{xm}t))$, поэтому

$$\frac{\rho_{hz} y_{0h} - \beta_{zx}}{\rho_{hz} y_{0h} + \beta_{zx}} = \exp(-2ik_{xm}t). \quad (18)$$

Остальные коэффициенты не важны, и мы их не приводим. Для толстой пленки с диссипацией экспоненты обращаются в нуль, и из (17) следует $y_{ez} - \alpha_{zx} y_{0e} = 0$, а из (18) получаем $\rho_{hz} y_{0h} - \beta_{zx} = 0$. Первое уравнение есть уравнение Е-ПП вдоль металлической плоскости. При снятии магнитного поля первое уравнение дает дисперсию ПП Ценнека $n_z = \sqrt{\varepsilon/(\varepsilon + 1)}$. Здесь мы не рассматриваем противоположные волны, т.е. берем один знак у корня. Второе уравнение дает дисперсию Н-МП вдоль намагниченной металлической плоскости. При снятии магнитного поля такой МП не существует. Для решения (18) запишем его в виде $\rho_{hz} y_{0h} = -i \cot(k_{xm}t) \beta_{zx}$, или $\sqrt{1 - n_z^2} = \tan(k_{xm}t)$. Возводя в квадрат и извлекая корень, получаем формулу для итераций $n_z = \sqrt{1 + n_{xm}^2 \cot^2(k_0 t n_{xm})}$. Также берем один знак. При возведении в квадрат возможны лишние корни. Для больших замедлений $n_z \approx n_{xm} \cot(k_0 t n_{xm})$. Предположим, что ПП поверхностный, медленный и слабо диссипативный: $m = 1$ при $\omega > \omega_H$, или

$m = 2$. Тогда величина n_m должна быть большой мнимой, т.е. $n_{xm} \approx -i|n_{xm}| \approx -i|w|n_z$ - в первом случае, и $n_{xm} \approx -in_z$ - во втором. Здесь $w = \sqrt{-\varepsilon/\varepsilon_x}$. Имеем результаты: $\coth(k_0 t |w| n_z) \approx 1/|w|$ - для первого случая и $\coth(k_0 t n_z) \approx 1$ или $n_z \gg 1/(k_0 t)$ - для второго. Рассматривая первый случай, получаем $n_z = \ln((1 + |w|)/(1 - |w|))/(2k_0 t |w|)$. При $|w| \ll 1$ также будет $n_z = 1/(k_0 t)$. При $|w| = 1 - \delta$ с малым δ замедление также большое: $n_z \approx \ln(2/\delta)/(2k_0 t) \gg 1$. Замедление уменьшается с ростом частоты, т.е. эти ПП обратные. Пусть $\omega < \omega_H$. Предположим, что МП объемный, медленный и слабо диссипативный: $m = 1$ и $w = \sqrt{-\varepsilon/\varepsilon_x}$ - действительный параметр. Тогда $n_{x1} \approx w n_z$, $w > 0$, и $n_z \approx \sqrt{1 + w^2 n_z^2 \cot^2(k_0 t w n)}$, т.е. имеем приближенное решение $n_z \approx (\arctan(1/w) + k\pi)/(k_0 t w)$. В нем $k = 0, 1, 2$ определяют дисперсионные ветви. Эти МП также обратные и аналогичны объемным магнитостатическим волнам (ОМСВ). В пленке феррита ОМСВ распространяются при $\omega > \omega_H$. Это связано с тем, что в рассматриваемых диапазонах в пленке феррита $\varepsilon > 1$, $\mu_{xx} < 0$, тогда как в нашем случае $\mu = 1$, $\varepsilon_{xx} > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_{zz} < 0$.

ДУ (17) представим в виде $n_z = \sqrt{1 + (n_{xm} \tan^s(n_{xm} k_0 t / 2) / \varepsilon)^2}$, $s = \pm 1$. В случае медленной поверхностной волны $n_{x2} \approx -in_z$, получаем $n_z \approx \sqrt{1 + (n_z \tanh^s(k_0 t n_z / 2) / \varepsilon)^2}$ или $\tanh(k_0 t n_z / 2) \approx -\varepsilon^{-1}$ (знак минус у ε взят, поскольку $\text{Re}(\varepsilon) < 0$, а минус у степени, поскольку гиперболический тангенс в отсутствие диссипации не превосходит 1). На низких частотах из $\tanh(k_0 t n_z / 2) = -\varepsilon^{-1}$ следует $n_z = -2/(\varepsilon k_0 t)$. При слабой диссипации $\varepsilon \approx -\omega_p^2 / \omega^2$, и $n_z = 2\omega c / (\omega_p^2 t)$, т.е. имеем решение в виде прямого ПП. Однако для получения существенного замедления толщина t должна быть весьма малой. Реально $c/t \sim \omega_p$, и при $\omega \ll \omega_p$ такой ПП быстрый. Он может стать медленным, немного ниже частоты плазмонного резонанса $\omega_p / \sqrt{\varepsilon_L + 1}$, когда $\varepsilon \approx -1$ [12]. Отметим, что для металлов в этой области b мало, а $\varepsilon_x \approx \varepsilon$.

Рассматривая случай медленной объемной слабо диссипативной волны $\omega < \omega_H$, $n_{x1} \approx w n_z$, $w > 0$, имеем $n_z = \sqrt{1 + (w n_z / \varepsilon)^2 \tan^{\pm 2}(n_z k_0 t w / 2)} \approx -(w n_z / \varepsilon) \tan^{\pm 1}(n_z k_0 t w / 2)$, откуда получаем приближенные решения $n_z \approx 2(\arctan(-(w/\varepsilon)^{\pm 1}) + k\pi)/(k_0 t w)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Такой объемный МП на низких частотах прямой, диссипативный и быстрый, т.е. не удовлетворяет предположению. Приведенные приближенные решения получены без учета диссипации. При ее учете n_x и n_z становятся комплексными, а волны не разделяются на полностью поверхностные и полностью объемные. Для всех волн зависимость внутри слоя определяется че-

рез комплексные экспоненты $\exp(\pm i(k'_x - ik''_x)x)$. Соответственно необходимо итерационно решать комплексные ДУ, в которых $k_x^2 = B_x \pm \sqrt{B_x^2 - C_x}$. Заметим, что как для медленных поверхностных, так и для медленных объемных МП поле в вакууме носит поверхностный характер, т.е. экспоненциально убывает от пленки: величина k_{0x} имеет большую мнимую и малую действительную части. За счет действительной части волна носит слабо втекающий характер.

Рассмотрим уточненные аналитические решения. При малой диссипации и больших замедлениях из УФ получаются приближения более высокого порядка: $n_{x1}^2 \approx -n_z^2 \varepsilon / \varepsilon_x - n_{10}^2 + n_2^2 n_z^{-2}$, $n_{x2}^2 \approx -n_z^2 + n_{20}^2 - n_2^2 n_z^{-2}$. В них $n_{10}^2 = [(\varepsilon_\tau^2 / \varepsilon_x + \varepsilon) \varepsilon / \varepsilon_x - 2\varepsilon] / (1 - \varepsilon / \varepsilon_x)$, и $n_2^2 = (\varepsilon_\tau^2 / \varepsilon_x - \varepsilon)^2 / [4(1 - \varepsilon / \varepsilon_x)]$ в отсутствии диссипации положительные при $\omega < \omega_H$, и отрицательные при $\omega > \omega_H$ и $\varepsilon / \varepsilon_x > 1$. Величина $n_{20}^2 = (\varepsilon_\tau^2 / \varepsilon_x - \varepsilon) / (1 - \varepsilon / \varepsilon_x)$ в отсутствии диссипации равна ε_L , т.е. положительная. На частоте резонанса она возрастает: $n_{20}^2 = \varepsilon_L + \omega_p^2 / \omega_H^2$. Приближения верны, если дополнительные члены малы по сравнению с n_z^2 . Пусть $\omega < \omega_H$ и МП объемный: $h_{x1} \approx \omega n_z$, $w = \sqrt{-\varepsilon / \varepsilon_x + n_0^2 n_z^{-2} + n_2^2 n_z^{-4}}$. Для ДУ (17) имеем $n_z = 2(\arctan((- \varepsilon / w)^{\pm 1}) + k\pi) / (k_0 t w)$, а для ДУ (18) $n_z = (\arctan(w) k\pi) / (k_0 t w)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ На низких частотах $\varepsilon \approx -\omega_p^2 / \omega^2$, $\varepsilon_x \approx \omega_p^2 / \omega_H^2$ все арктангенсы порядка $\pi/2$, и для основных мод получаем $n_z = 2\pi / (\omega_H t / c)$ и $n_z = \pi / (\omega_H t / c)$. На сверхнизких частотах $\varepsilon \approx -i\omega_p^2 / (\omega \omega_{c0})$, и МП быстрые диссипативные, поскольку величина w мнимая. Взяв приближенно $w = w_0 \sqrt{-\varepsilon / \varepsilon_x}$, получаем для всех ДУ приближенные решения $n_{z(0)}$. Их можно уточнить, взяв $w = \sqrt{-\varepsilon / \varepsilon_x + n_0^2 n_{z(0)}^{-2} + n_2^2 n_{z(0)}^{-4}}$. Пусть МП поверхностный: $n_{x2} \approx -in_z u$, $u = \sqrt{1 - n_0^2 n_z^{-2} + n_2^2 n_z^{-4}}$. Тогда из ДУ (17) следует $\tanh(k_0 t u n_z / 2) = -(\varepsilon / u)^{\pm 1}$. Из ДУ (18) имеем $\tanh(k_0 t u n_z) = u$. Используя приближение $u \approx u_0 = 1 - \varepsilon_L n_{z(0)}^{-2} / 2$, получим $n_{z(0)} \approx \ln(4n_{z(0)} / \varepsilon_L) / (2k_0 t)$ для (18). Приближенный корень ищем двумя итерациями: берем $n_{z(0)} \approx \varepsilon_L$, а затем уточняем: $n_{z(0)} \approx \ln(2) / (k_0 t)$. Далее уточняем u , что дает решение $n_z = \ln((1+u)/(1-u)) / (2k_0 t u)$. Для ДУ (17) можно в обоих случаях взять $n_{z(0)} = \ln((\varepsilon - 1) / (\varepsilon + 1)) / (k_0 t) \approx -2 / (k_0 t \varepsilon)$ и получить уточнение. При близком к единице параметре u и $|\varepsilon| \gg 1$ оно практически не отличается от нулевого приближения: $n_z = -2(1 + (u/\varepsilon)^2/3) / (k_0 t \varepsilon)$. Эти поверхностные МП на низких частотах слабо замедленные и прямые. Частоты, при которых замедление большое и приближение применимо, определяются усло-

вием $\omega \gg \omega_p^2 t / c$. Для металлов в ТГЧ диапазоне оно не выполняется. Для $t = 10$ нм и $\omega_p = 10^{13}$ Гц это $\omega \gg 10^9$ Гц. Частоты, при которых $u \sim 1$ определяются условием $\omega \ll c / (t \sqrt{\varepsilon_L})$. Для $t = 10$ нм это $\omega \ll 3 \cdot 10^{16}$ Гц, что всегда выполняется.

В общем случае наличия нескольких металлических пленок и диэлектрических подложек задача построения ДУ решается на основе матриц переноса слоя $\hat{T}(t)$. Такие матрицы связывают 4-векторы $u(x) = (E_y, h_z, E_z, -h_y)$ в виде $u(0) = \hat{T}(t)u(t)$ и могут легко быть построены на основе уравнений (15). В оптике они носят название матриц Беремана [16]. Этот метод для пленки на подложке сложен. Рассмотрим построение ДУ более простым методом двумерного приближения, когда пленка и подложка имеют малые толщины и описываются поверхностной проводимостью. Диэлектрический слой можно описать объемной проводимостью $\zeta = i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_d - 1)$. Она емкостная. 2D приближение применимо для весьма тонких металлических пленок и диэлектрических подложек. Для последних оно имеет хорошую точность, если $k_0 \sqrt{\varepsilon_d} d \ll 1$. В этом случае касательное электрическое поле практически постоянно в слое, вклад компоненты J_x мал, и тогда слой можно описать поверхностной проводимостью $\sigma_d = \zeta d = i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_d - 1) d = i\eta_0^{-1} k_0 (\varepsilon_d - 1) d$. Вводим безразмерную нормированную поверхностную проводимость $\xi_d = ik_0 (\varepsilon_d - 1) d$ и записываем связь поверхностного тока с касательным электрическим полем: $\mathbf{j}_d = \xi_d \mathbf{E}_\tau = \xi_d (\mathbf{y}_0 E_y + \mathbf{z}_0 E_z)$. В диэлектрическом слое ток носит характер тока поляризации. Аналогичное соотношение имеет место в металлической пленке: $\mathbf{j} = \hat{\xi} \mathbf{E}_\tau = \mathbf{y}_0 (\xi_{yy} E_y + \xi_{yz} E_z) + \mathbf{z}_0 (\xi_{zy} E_y + \xi_{zz} E_z)$. Здесь $\hat{\xi} = ik_0 (\hat{\varepsilon}(\omega) - \hat{I}) t$. В нашем случае $\xi_{yy} = \xi_{xx}$, $\xi_{yz} = \xi_{zy} = 0$, $\xi_{xy} = -\xi_{yx} = k_0 t b$, но мы для удобства иногда будем сохранять общую запись. Для дифракции плоской волны на металлическом слое глубина проникновения $\delta = -1 / \text{Im}(k_0 \sqrt{\varepsilon})$ для всех частот больше 200 нм. Однако для свободных волн - ПП с большим замедлением величина k_x может иметь большую мнимую часть. В этом случае поле существенно более сильно затухает внутри пленки. Поскольку в двумерной модели \mathbf{E}_τ должна быть непрерывна, можно взять $\mathbf{E}_\tau(x) = \mathbf{E}_{\tau 0} \cosh(k''_x x) / \cosh(k''_x t / 2)$, где $\mathbf{E}_{\tau 0}$ - значение на поверхности, а в центре пленки поле убывает в $\cosh(k''_x t / 2)$ раз. Усредненное по поперечному размеру поле есть $\bar{\mathbf{E}}_\tau = \mathbf{E}_{\tau 0} \tanh(k''_x t / 2) / (k''_x t / 2)$, и при $k''_x t > 2$ будем иметь $\bar{\mathbf{E}}_\tau \approx 2\mathbf{E}_{\tau 0} / (k''_x t)$, т.е. усредненное поле уменьшается по сравнению с поверхностным. Это говорит о том, что уменьшается эффективная двумерная проводимость, т.е. для нее следует

взять $\hat{\xi} = 2ik_0x \tanh(k_x''t/2)(\hat{\varepsilon}(\omega) - \hat{I})/k_x''$. Формально это соответствует учету скин-эффекта. Рассматриваемые толщины t существенно меньше длин свободного пробега электронов в массивных (неограниченных) металлических образцах. В тонкой пленке электроны не выходят из слоя t и все участвуют в переносе тока. Поэтому ЧС электронов, движущихся почти нормально к границам пленки, существенно выше, а средняя ЧС возрастает. Важно учитывать доли зеркального и диффузного отражения электронов от границ. Однако в сильном магнитном поле доля продольно движущихся под действием волны электронов сильно преобладает над почти поперечно движущимися электронами, поэтому вполне можно использовать теорию нормального скин-эффекта. Считая, что центр пленки находится при $x = 0$, а центр диэлектрического слоя при $z = 0$, получаем компоненты электрического поля

$$E_y(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{G_{yy}^{ee}(\mathbf{r}, 0, y', z')j_y(y', z') + G_{yz}^{ee}(\mathbf{r}, 0, y', z')j_z(y', z') + G_{yy}^{ee}(\mathbf{r}, d_0, y', z')j_{dy}(y', z') + G_{yz}^{ee}(\mathbf{r}, d_0, y', z')j_{dz}(y', z')\} dy' dz'. \quad (19)$$

В (19) введена тензорная электрическая функция Грина (ФГ) электрического типа, имеющая вид $\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (ik_0\eta_0^{-1})^{-1}(\nabla \otimes \nabla + k_0^2\hat{I})G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и определенная через скалярную ФГ $G(\mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1} \exp(-ik_0r)$, $r = |\mathbf{r}|$. Аналогично можно представить $E_z(\mathbf{r})$. Учитывая, что

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} - i\tilde{k}|z|)}{i\tilde{k}_x} dk_y dk_z,$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{y}_0k_y + \mathbf{z}_0k_z$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{y}_0y + \mathbf{z}_0z$, $\tilde{k}_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2}$, переходя в (19) и в выражении для пространственных спектров с вычислением интегралов, получим

$$\begin{aligned} \eta_0^{-1}E_y(\mathbf{k}) &= g_{yy}(\mathbf{k})j_y(\mathbf{k}) + g_{yz}(\mathbf{k})j_z(\mathbf{k}) + \\ &+ \exp(-i\tilde{k}_x d_0)[g_{yy}(\mathbf{k})j_y(\mathbf{k}) + g_{yz}(\mathbf{k})j_z(\mathbf{k})], \\ \eta_0^{-1}E_z(\mathbf{k}) &= g_{zy}(\mathbf{k})j_y(\mathbf{k}) + g_{zz}(\mathbf{k})j_z(\mathbf{k}) + \\ &+ \exp(-i\tilde{k}_x d_0)[g_{zy}(\mathbf{k})j_y(\mathbf{k}) + g_{zz}(\mathbf{k})j_z(\mathbf{k})]. \end{aligned}$$

Здесь тензор $\hat{g}(\mathbf{k})$ есть Фурье-преобразование от $\hat{G}^{ee}(\boldsymbol{\rho}, 0)$:

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{-1}{2k_0\tilde{k}_x} \begin{pmatrix} k_0^2 - \tilde{k}_x^2 & -\tilde{k}_x k_y & -\tilde{k}_x k_z \\ -\tilde{k}_x k_y & k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -\tilde{k}_x k_z & -k_y k_z & k_0^2 - k_z^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\psi(k_z) = \exp(-i\tilde{k}_x d_0)$. В окончательных соотношениях (в ДУ) следует положить $k_y = 0$. Поэтому $2\tilde{k}_x\eta_0^{-1}E_y(k_z) = -[j_y(k_z) + \psi(k_z)j_{dy}(k_z)]k_0$, $2\eta_0^{-1}k_0E_z(k_z) = -[j_z(k_z) + \psi(k_z)j_{dz}(k_z)]k_x$. Подставляя $\mathbf{j}_d = \sigma_d\mathbf{E}_\tau$, $j_y(k_z) = \sigma_{yy}E_y(k_z)$, $j_z(k_z) = \sigma_{zz}E_z(k_z)$, получаем два ДУ:

$$1 + \frac{k_0(\xi_{yy} + \psi(k_z)\xi_d)}{2\tilde{k}_x(k_z)} = 0, \quad (20)$$

$$1 + \frac{\tilde{k}_x(k_z)(\xi_{zz} + \psi(k_z)\xi_d)}{2k_0} = 0, \quad (21)$$

которые преобразуем к видам

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{1 - (\xi_{yy} + \psi(k_z)\xi_d)^2/4},$$

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{1 - 4/(\xi_{zz} + \psi(k_z)\xi_d)^2}.$$

При большом замедлении и малой диссипации удобнее взять введенную выше функцию в форме $\psi(k_z) = \exp(-d_0\sqrt{k_z^2 - k_0^2})$. При $d_0 = 0$ получаем $\psi(k_z) = 1$, при этом проводимости пленки и слоя складываются, что в используемой модели означает нахождение пленки в центре слоя (считаем $d > 1$). При большом расстоянии d_0 для медленной волны $\psi(k_z) \rightarrow 0$, т.е. волна в направлении от пленки к слою сильно затухает, слой на нее не влияет, и пленку можно рассматривать как изолированную. При медленных ПП проводимость подложки вносит малый вклад. ДУ (20) и (21) неявные. Однако при удалении подложки и малом замедлении они становятся явными. Неявными они могут быть и при таких толщинах t , когда замедление большое и проводимости начинают зависеть от k_x'' , т.е. от k_z . Тогда итерационное решение ДУ требует пересчета k_x и проводимостей. В нашем случае зависимости от \mathbf{k} означают зависимости от k_z . Приближенное ДУ (20) при снятии магнитного поля по своему виду соответствует Н-ПП, т.е. волне, не имеющей компоненты E_z , а ДУ (21) соответствует Е-ПП, т.е. волне, не имеющей компоненты H_z . Реально волны гибридные, т.е. содержат как Е-ПП, так и Н-ПП. В первом преобладает Н-ПП, а во втором – Е-ПП.

Получим коррекцию ДУ с учетом толщины пленки. Для этого следует учесть компоненту $j_x(\mathbf{k}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_{xx} - 1)tE_x(\mathbf{k}) + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}tE_y(\mathbf{k})$ поверхностной плотности тока, которой мы ранее пренебрегли. Рассматривая одиночную пленку и учитывая, что $g_{xy}(\mathbf{k}) = g_{yx}(\mathbf{k}) = 0$, $g_{yz}(\mathbf{k}) = g_{zy}(\mathbf{k}) = 0$, $\xi_{xz} = \xi_{zx} = 0$, $\zeta_{yz} = \xi_{zy} = 0$ и $k_y = 0$, имеем систему трех уравнений

$$E_x(\mathbf{k}) = g_{xx}(\mathbf{k})[\xi_{xx}E_x(\mathbf{k}) + \xi_{xy}E_y(\mathbf{k})] + g_{xz}(\mathbf{k})\xi_{zz}E_z(\mathbf{k}),$$

$$E_y(\mathbf{k}) = g_{yy}(\mathbf{k})[-\xi_{xy}E_x(\mathbf{k}) + \xi_{yy}E_y(\mathbf{k})],$$

$$E_z(\mathbf{k}) = g_{zx}(\mathbf{k})[\xi_{xx}E_x(\mathbf{k}) + \xi_{xy}E_y(\mathbf{k})] + g_{zz}(\mathbf{k})\xi_{zz}E_z.$$

Выражая из второго уравнения через и подставляя в два других, запишем ДУ в виде

$$\frac{\xi_{xx}(1 - g_{yy}\xi_{yy}) - \xi_{xy}^2g_{yy}}{(1 - g_{yy}\xi_{yy})(1 - g_{xx}\xi_{xx}) + g_{xx}g_{yy}\xi_{xy}^2} = \frac{(1 - g_{zz}\xi_{zz})}{g_{xz}^2\xi_{zz}}. \quad (22)$$

Обозначая

$$\beta(k_z) = \xi_{xy}^2 \frac{(1 - g_{zz}\xi_{zz})g_{xx}g_{yy} + g_{xz}^2g_{yy}\xi_{zz}}{g_{xz}^2\xi_{zz}\xi_{xx} - (1 - g_{zz}\xi_{zz})(1 - g_{xx}\xi_{xx})}, \quad (23)$$

получим из (22) вместо (20) формулу для итераций $k_z = k_0\sqrt{1 - \xi_{yy}^2/[2(\beta(k_z) - 1)]^2}$. Она определяет квази-магнитный МП. Вместо (21) имеем итерационную формулу $k_z = k_0\sqrt{1 - 4(\alpha(k_z) - 1)^2/\xi_{zz}^2}$ для квази-электрического МП. В ней

$$\alpha(k_z) = \frac{\xi_{xx}(1 - g_{yy}\xi_{yy}) - \xi_{xy}^2g_{yy}}{(1 - g_{yy}\xi_{yy})(1 - g_{xx}\xi_{xx}) + g_{xx}g_{yy}\xi_{xy}^2} g_{xz}^2\xi_{zz}.$$

В нашем случае $g_{xx}(k_z) = -k_z^2/(2k_0\tilde{k}_x)$, $g_{zx}(k_z) = k_z/(2k_0)$, $g_{zz}(k_z) = -\tilde{k}_x/(2k_0)$, $g_{yy}(k_z) = -k_0/(2\tilde{k}_x)$.

Приведенные ДУ получены для металлической пленки путем формального перехода от объемных величин к поверхностным. В случае весьма тонкой пленки следует скорректировать связь E_x с j_x и j_y . Объемная плотность тока внутри однородной пленки – вектор соленоидальный, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$ или $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \approx t^{-1}\nabla_{y,z} \cdot \mathbf{j}(\boldsymbol{\rho}) + \partial_x J_x(\mathbf{r})$. При этом $\partial_x J_x(\mathbf{r})$ почти не зависит от x . Это означает, что в тонкой пленке $J_x(\mathbf{r}) = x f(\boldsymbol{\rho}) + J_x(0, \boldsymbol{\rho})$, причем $f(\boldsymbol{\rho}) = -t^{-1}\nabla_{y,z} \cdot \mathbf{j}(\boldsymbol{\rho})$. Для двумерной плотности тока выполняется закон сохранения заряда $\nabla_{y,z} \cdot \mathbf{j}(\boldsymbol{\rho}) + i\omega\zeta(\boldsymbol{\rho}) = 0$, где $\zeta(\boldsymbol{\rho})$ – поверхностная плотность заряда. Для введенной функции находим $f(\boldsymbol{\rho}) = i\omega\zeta(\boldsymbol{\rho})/t$. Множитель $i\omega$ указывает, что это производная по времени от объемной плотности заряда в слое. На двумерной поверхности с плотностью заряда $\zeta(\boldsymbol{\rho})$ имеет место скачок нормальной компоненты электрического поля: $E_x(+0, \boldsymbol{\rho}) - E_x(-0, \boldsymbol{\rho}) = \zeta(\boldsymbol{\rho})/\varepsilon_0$. Для малой толщины t должна иметь место аппроксимация $E_x(x, \boldsymbol{\rho}) = E_x(0, \boldsymbol{\rho}) + (2x/t)\zeta(\boldsymbol{\rho})/\varepsilon_0$. Поведение компонент поля и тока согласуются, при этом $J_x(x, \boldsymbol{\rho}) = i\omega\varepsilon_0[(\xi_{xx} - 1)E_x(x, \boldsymbol{\rho}) + \xi_{xy}E_y(0, \boldsymbol{\rho})]$. Переходя к спектрам, для поверхностных величин имеем $k_z j_z(k_z) + i\omega\zeta(k_z) = 0$. Дополнительный вклад в вектор-потенциал имеет вид

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\exp\left(-i(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')\mathbf{k} - i|x - x'|\sqrt{k_0^2 - k^2}\right) \times \right. \\ \left. \times (J_x(0, \boldsymbol{\rho}') + x' f(\boldsymbol{\rho}')) \right) / \left(i\sqrt{k_0^2 - k^2} \right) dx' dy' dz' d^2k.$$

Здесь четыре интеграла с бесконечными пределами обозначены одним символом. Найдем поправки $\delta E_x = (ik_0\eta_0^{-1})(k_0^2 - \partial_x^2)A_x$, $\delta E_y = (ik_0\eta_0^{-1})^{-1}\partial_y\partial_x A_x$ и $\Delta E_z = (ik_0\eta_0^{-1})^{-1}\partial_z\partial_x A_x$ к электрическому полю, возникающие от компоненты A_x при $x = 0$. Вычислим A_x . Имеем

$$\int_{-t/2}^{t/2} \exp(-|x - x'|\tilde{k}_x) dx' = \\ = \frac{2 - \exp(-i(x + t/2)\tilde{k}_x) - \exp(i(x - t/2)\tilde{k}_x)}{i\tilde{k}_x}.$$

Для малых толщин t следует положить $x = 0$, и результат будет t . Аналогично интегрируем $x' \exp(-i|x - x'|\tilde{k}_x) dx'$:

$$\exp(-ix\tilde{k}_x) \int_{-t/2}^x x' \exp(ix'\tilde{k}_x) dx' + \\ + \exp(ix\tilde{k}_x) \int_x^{t/2} x' \exp(-ix'\tilde{k}_x) dx'.$$

Получаем результат $-it/\tilde{k}_x$. Таким образом, после интегрирования по dy' и dz' найдем

$$A_x(0, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\boldsymbol{\rho}\mathbf{k})f(\mathbf{k})}{i\tilde{k}_x} (t - it/\tilde{k}_x) d^2k,$$

где $f(\mathbf{k}) = i\omega\zeta(\mathbf{k})/t = k_z j_z(\mathbf{k})/t$. Вклад от члена $-it/\tilde{k}_x$ мал. Поэтому

$$\delta E_x(0, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{\eta_0 k_0}{8\pi^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\boldsymbol{\rho}\mathbf{k})k_z j_z(\mathbf{k})}{\tilde{k}_x^3} d^2k.$$

Переходя к спектрам (интегрируя по поперечным координатам), получаем $\delta E_x(\mathbf{k}) = -\eta_0 k_0 k_z j_z(\mathbf{k})/(2\tilde{k}_x^3(\mathbf{k})t)$. Аналогично получаем $\delta E_z(\mathbf{k}) = \eta_0 k_z^2(\mathbf{k})/(k_0 \tilde{k}_x^2(\mathbf{k})t)$, при этом $\delta E_y(\mathbf{k}) = 0$. Теперь имеем уравнения

$$E_x(\mathbf{k}) = -\frac{k_z^2}{2k_0 \tilde{k}_x} (\xi_{xx} E_y(\mathbf{k}) + \xi_{xy} E_y(\mathbf{k})) + \\ + \frac{k_z}{2k_0} \left(1 - \frac{k_0^2}{\tilde{k}_x^2 k_0 t} \right) \xi_{zz} E_z(\mathbf{k}),$$

$$E_y(\mathbf{k}) = -\frac{k_0}{2k_x}(\xi_{yy}E_y(\mathbf{k}) - \xi_{xy}E_x(\mathbf{k})), \quad (24)$$

$$E_z(\mathbf{k}) = \left(\frac{k_z^2}{k_0\tilde{k}_x^2(\mathbf{k})t} - \frac{k_x}{2k_0} \right) \xi_{zz}E_z(\mathbf{k}) + \frac{k_z}{2k_0}(\xi_{xx}E_x(\mathbf{k}) + \xi_{xy}E_y(\mathbf{k})).$$

Из второго уравнения (24) находим $E_x(\mathbf{k})$ и подставляем в два других. В результате получаем ДУ $k_z = \pm k_0\sqrt{1 - \xi_{xx}^2/[2(\gamma(k_z) - 1)]^2}$. В нем

$$\gamma(k_z) = \quad (25)$$

$$= \left(k_0k_z^2\xi_{xy}^2(k_z^2 - \tilde{k}_x^2k_0t/\xi_{zz} - \tilde{k}_xk_0/2) \right) / \left(k_z^2(\tilde{k}_x^2t - k_0) \times \right. \\ \left. \times k_x^2\xi_{xx} + (2\tilde{k}_x^2k_0 + k_z^2\tilde{k}_x\xi_{xx})(2k_z^2 - \tilde{k}_x^3t - 2\tilde{k}_x^2k_0t/\xi_{zz}) \right).$$

Пусть замедление $n = k_z/k_0$ большое по модулю. Тогда из ДУ следует $n = \pm i\xi_{xx}/(2\gamma(k_z) - 2)$. При большой реактивной проводимости это возможно при малых по модулю $\gamma(k_z)$, или при почти действительных $-\gamma(k_z)$, близких к единице. Большие замедления поверхностного ПП реализуются при $\tilde{k}_x \approx ik_z$, поэтому из (25) имеем $\gamma(k_z) \approx k_0(\xi_{xy}^2/\xi_{xx})/(2k_z^2t - 2ik_z)$. Считаем $k_zt \sim 1$. Величина $\gamma(k_z)$ мала по модулю при $|\xi_{xy}^2/(n\xi_{xx})| \ll 1$. В ТГЧ диапазоне $\xi_{zz} = i(t/c)\omega_p^2/(i\omega_c - \omega)$, и для наноразмерных толщин $t/c \sim 10^{-16}$ с эта величина комплексная и по модулю большая $\sim 10^4$. Считая, что ξ_{xx} и ξ_{zz} большие по модулю, найдем условие большого замедления: $|\gamma| \ll 1$. При $\omega = \omega_H/\sqrt{2}$ и большой реактивной ξ_{xx} большим замедление будет при $|\gamma(k_z)| \leq 1$. При $\omega_H \sim 10^{-4}\omega_p$ получаем $n_z \sim 10^3$, при этом для малых потерь необходимо выполнение условия $\omega_{co} \ll \omega_H$. Получить такие условия для металлов можно при температуре жидкого гелия. Однако для ТГц электроники больших замедлений не требуются: достаточно замедлений порядка нескольких единиц. Снижение же диссипации ПП принципиально для получения усиления. При $n' \sim 1$ диссипация мала: $n''/|n'_z| \ll 1$. Для учета диэлектрической подложки в ДУ делаем замену $\xi_{xx} \rightarrow \xi_{xx} + \xi_d$. Для быстрой волны $k_z = k_0$, $\tilde{k}_x \approx 0$, величина $\gamma(k_z)$ становится очень большой по модулю, и тогда $\xi_{xx} \rightarrow \xi_{xx} + \xi_d$. Для бесконечно быстрой волны $\tilde{k}_x \approx 0$, $k_z \approx 0$ имеем $\gamma(k_z) = -k_z^2\xi_{xy}^2(2k_0t/\xi_{zz} + 1)/(4k_0^3t + 8k_0^3t/\xi_{zz}) \approx 0$.

Рассмотрим ДУ $k_z = k_0\sqrt{1 - \xi_{xx}^2/[2(\beta(k_z) - 1)]^2}$ для медленных ПП. Считая все проводимости сильно реактивными и большими по модулю, при большом замедлении берем $g_{xx} = ik_z/(2k_0)$, $g_{yy} = ik_0/(2k_z)$, $g_{zz} = -ik_z/(2k_0)$, $g_{xz} = k_z/(2k_0)$, откуда получаем

$\beta(k_z) = -i\xi_{xy}^2k_0/(2k_z\xi_{xx})$. Поскольку $\xi_{xy}^2 = (k_0tb)^2$, а ξ_{xx} почти мнимая и при $\omega < \omega_H$ индуктивная, то при $\text{Re}(\beta(k_z)) \ll 1$ получаем замедления порядка $|\xi_{xx}|/4$. При этом величина $\beta(k_z) = 2(k_0t)^2\omega_H^2/\omega^2 \sim (k_0t)^2$ действительно мала. Медленный ПП для ДУ $k_z = k_0\sqrt{1 - 4(\alpha(k_z) - 1)^2/\xi_{zz}^2}$ получаем в оптическом диапазоне при достаточно малой величине $|\xi_{zz}^2|$. Выражая из (23) величину $1 - g_{xx}\xi_{xx}$, получим еще один вид ДУ.

Поскольку в общем случае возможны четыре волны и четыре дисперсионные ветви, несколько уравнений позволяют находить все ветви, при этом сходимость и скорость сходимости уравнений могут сильно различаться в разных областях. Формально достаточно решать только одно из ДУ. Полагая в нем потери нулевыми, находим все действительные корни. При этом возникают запрещенные области. Полагая для них $n_z = -i|n_z|$ мнимыми, находим и мнимые корни. Увеличивая затем плавно потери и используя итерации, можно построить все комплексные дисперсионные ветви. Для итераций следует выбирать быстро сходящиеся формулы. Все приведенные ДУ можно записать в виде $k_z = f(k_z)$. Для численных результатов использован метод прямой итерации $k_z^{(m)} = k_z^{(m-1)} - \tau_m[f(k_z^{(m-1)}) - k_z^{(m-1)}]$ с коррекцией шага итераций [17]. Шаг τ_m на каждой итерации подбирался из условия убывания невязки, для чего необходимо вычислять производные $f'(k_z)$. На низких частотах удобно полагать начальное значение $k_z^{(0)} = k_0$. Найдя корень, увеличиваем частоту на малый шаг, и в качестве нового начального приближения берем указанный корень. При малом частотном шаге он близок к новому корню, итерации для которого теперь сойдутся быстро. Использование нескольких видов ДУ полезно для нахождения всех дисперсионных ветвей.

Численные результаты получены при условии выбора ветви корня $\text{Re}(k_z) = k_0n'_z > 0$. Условие $n''_z > 0$ при $n_z = n'_z - in''_z$ означает, что МП затухает в направлении оси z . При $n''_z < 0$ МП затухает в отрицательном направлении оси z , т.е. туда движется энергия. Такая волна обратная. На рисунках 1, 2 представлены итерационные решения для дисперсии (22) в пленке серебра и в пленке синица при магнитной индукции $B_z = \mu_0H_0 = 10$ Тл при разных температурах и толщинах. Для кривых рис. 1 индекс потерь в максимумах замедлений имеет значения $n''_z/n'_z = 0.0056$ (кривая 1), 0.015 (2), 0.011 (3), -0.024 (4), -0.017 (5), -0.024 (6), -0.027 (7). Потери при меньших замедлениях ниже, при этом МП прямой. Отрицательные отношения n''_z/n'_z означают переход к обратным МП. В области между максимальным

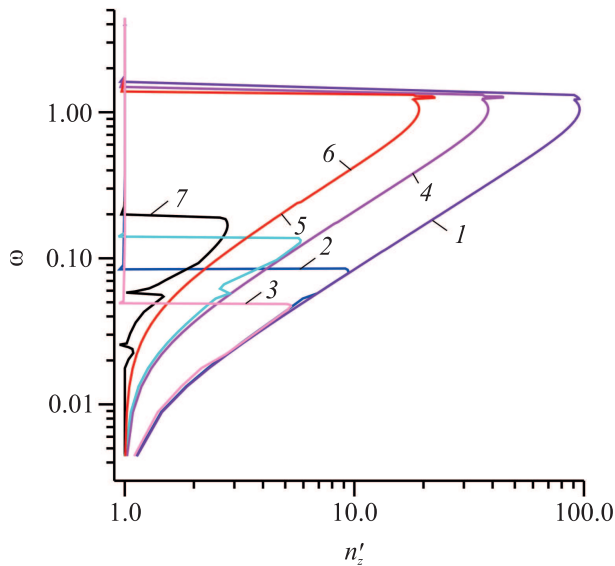


Рис. 2. (Цветной онлайн) Дисперсия МП (частота ω в ТГц в зависимости от замедления $n'_z = k'_z/k_0$) в свинцовой пленке при разных толщинах (нм) и температурах (К): кривая 1 – $t = 10$, $T = 77$; 2 – $t = 2$, $T = 77$; 3 – $t = 10$, $T = 10$; 4 – $t = 4$, $T = 10$; 5 – $t = 4$, $T = 77$; 6 – $t = 2$, $T = 10$; 7 – $t = 10$, $T = 200$

замедлением и область с $n \approx 1$ есть весьма узкая область очень быстрых МП с $n' \ll 1$. При выбранном частотном шаге она не проявляется. Продвижение в ТГц диапазон требует использования малых толщин порядка 1–2 нм и криогенных температур. При комнатной температуре замедление в СВЧ диапазоне не превышает 20 для пленок с толщиной до 10 нм, а выше МП быстрый. Пленка толщины 2 нм на подложке является текучей и растекается на фрагменты, поэтому следует использовать несколько более толстые пленки. Диэлектрическая подложка в ТГц диапазоне является электрически тонкой даже при $d = 10^4$ нм, т.е. вклад в дисперсию мал, и для нее вполне применимо двумерное приближение. Такая и даже на порядок более толстая подложка имеет малую емкостную проводимость и практически не сказывается на дисперсии. С толщиной проводящей пленки замедление растет, но использовать толстые пленки и большие замедления в ЗС не целесообразно, поскольку согласно (24) при $|n_z| \gg 1/(k_0 t)$ компонента E_z почти не зависит от замедления. При не слишком большом замедлении волна не сильно прижата к пленке, и сопротивление связи для ленточного электронного пучка может быть приемлемым. Для свинца взято $\omega_p = 6.4 \cdot 10^{15}$ и $\omega_{co} = 6.2 \cdot 10^{13}$ Гц при $T = 300$ К. Свинец при температуре ниже 7 К становится сверхпроводящим. Его высокочастотный импеданс не является локальным, поэтому описыва-

ется достаточно сложно, а поверхностный импеданс пленки определяется через интегралы [18] и зависит от ее толщины. Определение двумерного импеданса сверхпроводящей пленки в магнитном поле – достаточно сложная и требующая отдельного рассмотрения задача в совокупности с необходимостью совместного решения ДУ. Для соответствующей модели необходимо определять число куперовских пар и неспаренных электронов, а также глубину проникновения магнитного поля. Поэтому использовать сверхпроводящие пленки проблематично. Для продвижения в ТГц диапазон при $\omega_H = 0.176$ ТГц ($B_z = 1$ Тл) следует использовать полуметаллы или полупроводники с достаточно малой ПЧ, при этом необходимо снижать ЧС на два порядка и более. На рисунке 3 представлены результаты для МП магнитного ти-

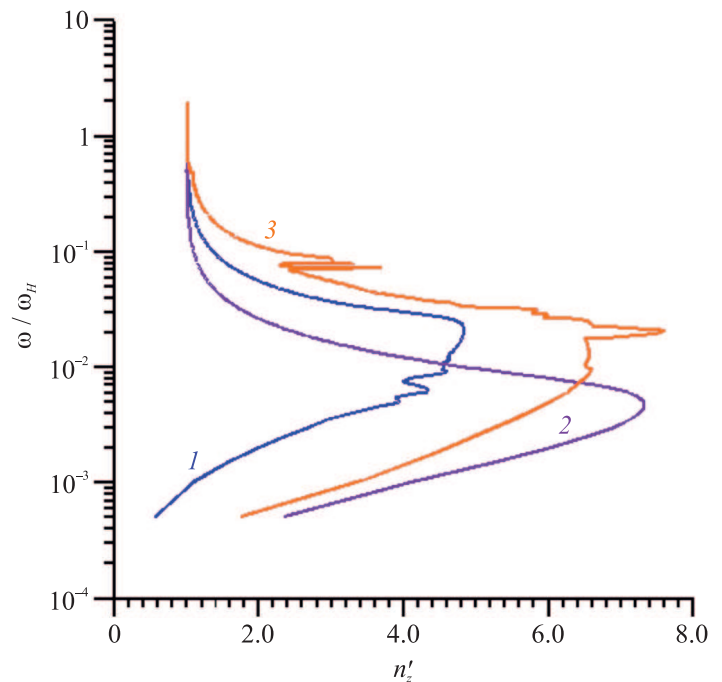


Рис. 3. (Цветной онлайн) Дисперсия (зависимость ω/ω_H в от $n'_z = k'_z/k_0$) поверхностного МП в пленке n -InSb на подложке SiO_2 ($\epsilon_d = 3.4$), $d = 5$ мкм при $\omega_H = 13.5$ ТГц, $\omega_{co} = 4$ ГГц и $\omega_p = 18$ ТГц (кривые 1, 2), $\omega_p = 2.5 \cdot 10^{13}$ (3), $t = 10$ нм для кривых (1, 3) и $t = 5$ нм, для кривой 2

па в пленки n -InSb при $\omega_p = 18$ ТГц, $\omega_H = 6$ ТГц и $\omega_{co} = 4$ ГГц, полученные по ДУ (22). МП электрического типа более высокочастотный. На рисунке 4 представлены результаты итерационного решения ДУ (17) и ДУ (18) для МП в пленки n -InSb при $\omega_H = 13.5$ ТГц и $\omega_{co} = 1$ ТГц. Результаты сошлись не более, чем за 10 итераций. МП 1–3 слабо диссипативные в окрестности ω_H и сильно диссипативные на низких частотах. Обратный объемный МП 4 (знак

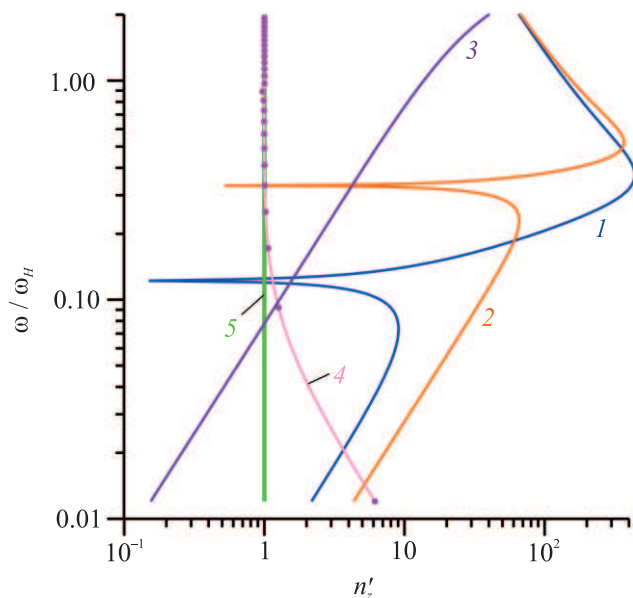


Рис. 4. (Цветной онлайн) Дисперсия МП в пленке n -InSb с $t = 10$ нм при $\omega_H = 13.5$, $\omega_{co} = 1$. Формула (17): кривые 1–3, $s = -1$ и 5, $s = 1$; формула (18) – кривая 4. Использованы ПЧ ω_p : 180 (кривые 3, 4), 25 (2), 18 (1, 5). Все частоты в ТГц

“минус” у корня в $k_{x\pm}^2$ слабо диссипативный. При знаке “плюс” ДУ (18) дает $n_z = 1$ с точностью до нескольких знаков. Поскольку два значения формулы (17) получены путем извлечения корня, она может быть записана единым образом. Сходимость итераций для нее не зависит от знака у $k_{x\pm}^2$. Таким образом, имеется четыре ветви решения ДУ. Одним из возможных подходов к снижению потерь без использования криогенных температур может быть применение активных спазеров [19] с оптической накачкой. В рассмотренном случае это может быть оптически активный графеновый лист, расположенный на пленке.

В работе рассмотрены методы построения ДУ для МП вдоль тонких хорошо проводящих пленок ДЭГ, причем как при строгом учете толщины, так и в приближении 2D поверхностной проводимости с учетом электрически тонкой диэлектрической подложки. Получены новые ДУ для магнитоплазмонов. Показана возможность существования и получены условия для медленных и быстрых МП, а также прямых и обратных МП. В сильном магнитном поле, используемом для фокусировки тонкого ленточного пучка, тонкая и ровная проводящая пленка может выполнять роль ЗС с замедлениями от нескольких до нескольких десятков и более.

Финансирование работы. Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (государственное задание FSRR-2023-0008).

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Ю. В. Алехин, М. П. Апин, А. А. Бурцев и др., *Сверхширокополосные лампы бегущей волны. Исследования в СВЧ-, КВЧ- и ТГц-диапазонах. Внедрение в производство*, под ред. Н. А. Бушуева, Радиотехника, М. (2015), 480 с.; ISBN 978-5-93108-126-7.
2. А. А. Бурцев, Ю. А. Григорьев, А. В. Данилушкин, И. А. Навроцкий, А. А. Павлов, К. В. Шумихин, *ЖТФ* **88**(3), 464 (2018) [A. A. Burtsev, Yu. A. Grigor'ev, A. V. Danilushkin, I. A. Navrotskii, A. A. Pavlov, and K. V. Shumikhin, *Technical Physics* **63**(3), 452 (2018); DOI: 10.1134/S1063784218030040.
3. J. Brion, R. Wallis, A. Hartstein, and E. Burstein, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1455 (1972); DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.1455.
4. P. Kumar and V. K. Tripathi, *J. Appl. Phys.* **114**, 053101 (2013); DOI: 10.1063/1.4817091.
5. R. K. Srivastav and A. Panwar, *Opt. Quantum Electron.* **55**, 111 (2023); DOI: 10.1007/s11082-022-04299-y.
6. P. Kumar, M. Kumar, and V. Tripathi, *Opt. Lett.* **41**, 1408 (2016); DOI: 10.1364/OL.41.001408.
7. R. K. Srivastav and A. Panwar, *Optik* **264**, 169363(2022); DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.169363.
8. X.-X. Liu, C.-F. Tsai, R.-L. Chern, and D. P. Tsai, *Appl. Opt.* **48**(16), 3102 (2009); DOI: 10.1364/AO.48.003102.
9. B. Gonzalez-Diaz, A. Garcia-Martin, G. Armelles, J. M. Garcia-Martin, C. Clavero, A. Cebollada, R. A. Lukaszew, J. R. Skuza, D. P. Kumah, and R. Clarke, *Phys. Rev. B* **76**, 153402 (2007); DOI: 10.1103/PhysRevB.76.153402.
10. M. V. Davidovich, *Proc. SPIE* **11066**, 1106614 (2019); DOI: 10.1117/12.2521234.
11. V. Ryzhii, A. A. Dubinov, T. Otsuji, V. Mitin, and M. S. Shur, *J. Appl. Phys.* **107**, 054505 (2010); DOI: 10.1063/1.3327212.
12. М. В. Давидович, *Квантовая электроника* **47**(6), 567 (2017) [M. V. Davidovich, *Quantum Electron.* **47**(6), 567 (2017); DOI: 10.1070/QEL16272].
13. М. В. Давидович, *Оптика и спектроскопия* **130**(10), 1520 (2022); DOI: 10.21883/EOS.2022.10.54863.3231-22.
14. Г. С. Сергеев, *Моделирование кинетических и термоэлектрических свойств антимонида индия*, Дисс. к.ф.-м.н., М. (2014).
15. И. И. Берченко, М. В. Пашковский, *УФН* **119**(2), 223 (1976) [Phys.-Uspekhi **19**(6), 462 (1976); DOI: 10.1070/PU1976v019n06ABEH005265].
16. D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Am.* **62**(4), 502 (1972); DOI: 10.1364/JOSA.62.000502.

17. М. В. Давидович, А. К. Кобец, К. А. Саяпин, *Физика волновых процессов и радиотехнические системы* **24**(3), 18 (2021); DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.3.18-27.
18. Ф. Ф. Менде, А. И. Спицын, *Поверхностный импеданс сверхпроводников*, Наукова думка, Киев (1985).
19. А. П. Виноградов, Е. С. Андрианов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеенко, А. А. Лисянский, *УФН* **182**(10), 1122 (2012) [A. P. Vinogradov, E. S. Andrianov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko, and A. A. Lisyansky, *Phys.-Uspekhi* **55**, 1046 (2012); DOI: 10.3367/UFNe.0182.201210j.1122].