

Конфигурация “барьер–яма” в схеме квантового гироскопа на основе геометрической фазы атомарного конденсата

+ В. А. Томили¹⁾, А. М. Ростом^{+*}, Л. В. Ильичев^{+×}

⁺ Институт автоматки и электротрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

^{*} Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

[×] Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 23 января 2024 г.

После переработки 7 февраля 2024 г.

Принята к публикации 7 февраля 2024 г.

Получила развитие перспективная схема квантового гироскопа на основе измерения специфической геометрической фазы в атомарном конденсате Бозе–Эйнштейна. Чувствительными к вращению элементами служат две кольцевые конфигурации конденсата. Их однородность нарушена парами локализованных потенциалов – барьером и ямой. Порядок расположения этих потенциалов в каждом из колец задает их противоположные ориентации относительно вектора угловой скорости вращения системы отсчета устройства. Надлежащее варьирование параметров пар “барьер–яма” порождает при наличии вращения противоположные геометрические фазы в кольцевых модах единого конденсата. Разность геометрических фаз можно обнаружить в интерференционном эксперименте. Приведены результаты расчета разностей геометрических фаз для конфигураций мод конденсата атомов ^{87}Rb в виде колец диаметром 0.5 см и для угловых скоростей, сравнимых со скоростью вращения Земли вокруг своей оси.

DOI: 10.31857/S1234567824050094, EDN: GSUAЕК

Введение. Современные экспериментальные методы приготовления и контроля ансамблей ультрахолодных атомов находят применения в создании высокочувствительных инерциальных датчиков [1–3]. Весьма актуальными становятся перспективы исследования альтернатив оптических устройств с заменой их устройствами на волнах материи, в которых вместо интерференции оптических волн используется интерференция когерентных многочастичных состояний. Типичным (с точки зрения теории) примером таких состояний является конденсат Бозе–Эйнштейна (Bose–Einstein condensate, BEC). Классические оптические гироскопы основаны на эффекте Саньяка. Регистрируемая в них саньяковская фаза дается выражением [4, 5]

$$\phi_{\text{Sagnac}} = \frac{4\omega}{c^2} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения системы отсчета, \mathbf{S} – ориентированная площадь интерферометра, ω – частота излучения. В атомном интерферометре вместо ω следует использовать mc^2/\hbar , где m – масса атома. Это значительно бóльшая величина, что и обеспечивает потенциальное преимущество

устройств на волнах материи над оптическими гироскопами. Однако, буквальное воспроизведение схемы саньяковского интерферометра с использованием атомарных бозе-конденсатов является нетривиальной задачей. Различные предложения по реализации подобных схем включают в себя использование распространения волн материи в аналогах волноводов [6–8], а также приготовление специфических квантовых состояний конденсата [9].

В работе [10] был предложен альтернативный подход к построению гироскопической схемы на основе BEC. Вместо фазы Саньяка предлагалось измерять специфическую геометрическую фазу, порожденную вращением системы отсчета конденсата. Основную идею такого гироскопа можно представить следующим образом, отвлекаясь пока от деталей процесса генерации геометрической фазы. Предполагается, что конденсат образован двумя пространственно-разнесенными модами 1 и 2, полученными в результате когерентного разделения изначального единого конденсата. Конфигурации обеих мод должны обеспечивать чувствительность состояния конденсата к вращению его системы отсчета. Ориентации конфигураций мод относительно вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ таковы, что вращение в разной степени сказывается на состояниях мод. Во всех

¹⁾e-mail: 8342tomilin@mail.ru

остальных отношениях моды 1 и 2 эквивалентны. Предполагается, что одинаковым образом организованы и процессы генерации геометрических фаз в модах²⁾. Однако, различная восприимчивость мод к вращению приводит к различию возникающих геометрических фаз: $\theta_1 \neq \theta_2$. Состояние конденсата претерпевает изменение:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N f_n |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{n=0}^N f_n e^{in\theta_1} |n\rangle_1 \otimes e^{i(N-n)\theta_2} |N-n\rangle_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь N – полное число частиц в конденсате (для простоты будем полагать его фиксированным), а f_n – амплитуды вероятности распределений атомов по модам. Физически значимым является изменение относительных фаз этих амплитуд:

$$f_n \rightarrow f_n e^{in(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (3)$$

что модифицирует картину последующей интерференции атомов из мод 1 и 2, откуда можно извлечь информацию о скорости вращения Ω .

В [10] рассматривались конфигурации мод в виде колец, каждое из которых содержит на некотором своем участке дополнительный потенциал – так называемый “дефект”, или “дефектный потенциал”, (рис. 1). В отсутствие дефектов конфигурации обе-



Рис. 1. (Цветной онлайн) Принципиальная схема основной части гироскопа. Плоскости обоих кольцевых конфигураций конденсата нормальны к вектору угловой скорости Ω вращения системы отсчета гироскопа. Символически показанные дополнительные потенциалы барьера и ямы задают различную ориентацию колец по отношению к этому вектору

их мод одинаковы. Принципиально важно, что формы этих дефектов задают ориентации (выделенные направления обхода) колец (отметим, что приведенное на рис. 1 взаимное пространственное расположение колец выбрано так, чтобы можно было создать

²⁾Имеются ввиду геометрические фазы волновых функций одночастичных состояний мод. Для простоты исключаем взаимодействие между атомами конденсата.

дополнительные потенциалы с помощью всего двух пучков излучения, распространяющихся нормально плоскостям колец: один создает ямы в обеих модах, а второй барьеры, также в обеих модах). Геометрическая фаза генерируется варьированием параметров дополнительных потенциалов. В предложенной в [10] схеме плоскости колец нормальны Ω , а их ориентации относительно этого вектора противоположны друг другу. Это оптимальные условия для регистрации вращения: $\theta_1 = -\theta_2$, и разность $\theta_1 - \theta_2$ обращается в нуль при $\Omega = 0$.

Предложенный в [10] подход был основан на описании дефектов в терминах трансфер-матриц. При этом мы ограничились использованием основного общего свойства трансфер-матриц – их принадлежность группе $SU(1, 1)$. Две ориентации колец задавались произведениями пары типовых матриц из $SU(1, 1)$ в прямом и обратном порядках. Такой подход позволил обойтись без привязки к конкретной структуре дефектных потенциалов, что существенно упростило рассмотрение, но привнесло в него элемент искусственности. В частности, полностью игнорировалась возможная зависимость элементов трансфер-матрицы от энергии атомов.

Целью настоящей работы является построение гироскопической схемы, где место абстрактной модельной трансфер-матрицы займет результат ее строгого вывода из формы дефектного потенциала, который должен обеспечить ориентируемость кольца. Очевидный простейший вариант такого потенциала есть комбинация “барьер-яма”. В следующем разделе построена модель схемы с таким потенциалом. В третьем разделе приведены и обсуждены результаты численных расчетов возможностей схемы с прицелом на регистрацию вращения Земли вокруг своей оси.

Модель. Используется простейшая модель конденсата невзаимодействующих атомов. По этой причине можно оперировать одночастичной волновой функцией при расчете геометрической фазы. Таким образом, волновые функции, характеризующие пространственные конфигурации мод, фактически не зависят от чисел атомов в них. Тем не менее, полное число атомов в конденсате будет иметь значение при наблюдении интерференции между модами (мы вернемся к этому вопросу в заключительной части работы).

Пусть система отсчета, в которой будут рассматриваться кольцевые моды конденсата, вращается с угловой скоростью Ω , ориентированной нормально плоскости колец. Уравнение для стационарной волновой функции атома на кольце получается из

обычного уравнения Шредингера введением дополнительного члена, связанного с вращением [11]:

$$\begin{aligned} \Psi''(\varphi) - 2i\xi\Psi'(\varphi) + \varepsilon\Psi(\varphi) = \\ = a_+\delta(\varphi - \varphi_0)\Psi(\varphi_0) + a_-\delta(\varphi + \varphi_0)\Psi(-\varphi_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon = mR^2E/\hbar^2$ – безразмерная энергия (m – масса атома, R – радиус кольца), $\xi = mR^2\Omega/\hbar$ – безразмерный параметр, характеризующий скорость вращения системы отсчета (отметим, что он с точностью до множителя 4π равен саньяковской фазе, определенной в (1)), а штрихами обозначены производные по угловой координате на кольце. Приведем характерные масштабы величин, входящих в задачу. Для конденсата, состоящего из атомов ^{87}Rb , радиуса кольца $R = 0.25$ см (что является принципиально достижимым для экспериментальных технологий в ближайшей перспективе), а также скорости Ω , отвечающей вращению Земли вокруг своей оси, параметр ξ оказывается равным 0.392. Отметим, что для атомов других щелочных элементов и их изотопов, в которых продемонстрировано явление бозеконденсации (таких, как ^7Li [12], ^{23}Na [13], ^{39}K [14], ^{40}Ca [15], ^{133}Cs [16] и др.), величина ξ будет иметь такой же порядок. Поэтому разумно подбирать другие параметры задачи с прицелом на регистрацию $\xi \simeq 0.1 \div 1$.

В правой части (4) стоят слагаемые, отвечающие дефекту – паре сингулярных потенциалов в точках $\pm\varphi_0$; a_{\pm} – характерные величины этих потенциалов³⁾. При $a_+ \neq a_-$ пара сингулярных потенциалов задает, очевидно, различие двух направлений обхода кольца (на рис. 1 ориентации пространственных обозначены противонаправленными стрелками). Волновая функция непрерывна, а ее производная терпит разрывы в точках $\pm\varphi_0$ [20]:

$$\begin{aligned} \Psi(\pm\varphi_0 - 0) = \Psi(\pm\varphi_0 + 0), \\ \Psi'(\pm\varphi_0 + 0) - \Psi'(\pm\varphi_0 - 0) = a_{\pm}\Psi(\pm\varphi_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Вне сингулярных потенциалов движение атома свободно и может быть представлено суперпозицией фундаментальных решений:

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) = f_+ \exp(i\kappa_+\varphi) + f_- \exp(i\kappa_-\varphi); \\ -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0, \\ \Psi(\varphi) = g_+ \exp(i\kappa_+\varphi) + g_- \exp(i\kappa_-\varphi); \\ \varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0, \\ \kappa_{\pm} = \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

³⁾Отметим, что приготовление начального состояния конденсата осуществляется сразу во вращающейся системе отсчета. Возможность приготовления конденсата в кольцевых конфигурациях с подвижными (вращающимися) потенциальными дефектами была продемонстрирована в [17–19].

Связь между амплитудами f_{\pm} и g_{\pm} в точках $\pm\varphi_0$ дается соотношениями, следующими из (5) и геометрии кольца:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \frac{i}{\kappa} \times \\ \times \begin{pmatrix} -a_- - i\kappa & -a_- \exp(i\kappa\varphi_0) \\ a_- \exp(-i\kappa\varphi_0) & a_- - i\kappa \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} g_+ \exp(2\pi i\kappa_+) \\ g_- \exp(2\pi i\kappa_-) \end{pmatrix}; \varphi = \varphi_0, \\ \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} = \frac{i}{\kappa} \times \\ \times \begin{pmatrix} -a_+ - i\kappa & -a_+ \exp(-i\kappa\varphi_0) \\ a_+ \exp(i\kappa\varphi_0) & a_+ - i\kappa \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}; \varphi = -\varphi_0, \\ \kappa = \kappa_+ - \kappa_- = 2\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (7)$$

Это позволяет установить систему уравнений непосредственно на g_{\pm} :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_+ \exp(2\pi i\kappa_+) \\ g_- \exp(2\pi i\kappa_-) \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \mathcal{M} \begin{pmatrix} g_+ \exp(2\pi i\kappa_+) \\ g_- \exp(2\pi i\kappa_-) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Трансфер-матрица \mathcal{M} оказывается принадлежащей группе $SU(1, 1)$, т.е. $|u|^2 - |v|^2 = 1$; черта над символом означает комплексное сопряжение. Таким образом, она обладает главным свойством, отмеченным во Введении.

Будем далее рассматривать случай

$$a_+ = -a_- = a, \quad (9)$$

т.е. полагать, что высота барьера и глубина ямы одинаковы. Элементы трансфер-матрицы тогда принимают вид⁴⁾:

$$\begin{aligned} u = 1 + \frac{a^2}{\kappa^2} \cdot (1 - \exp(-2i\kappa\varphi_0)), \\ v = \frac{2ia}{\kappa^2} \cdot (a + i\kappa) \cdot \sin(\kappa\varphi_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно, элементы трансфер-матрицы получают явную зависимость от энергии атома – этот эффект невозможно было бы учесть при задании абстрактной трансфер-матрицы, не привязанной к конкретному виду потенциала.

⁴⁾При $a \neq 0$ на кольце определена ориентация.

Система (8) совместна при условии

$$\cos(2\pi\xi) = \left(1 + \frac{a^2}{\kappa^2}\right) \cdot \cos(\pi\kappa) - \frac{a^2}{\kappa^2} \cdot \cos(\kappa(\pi - 2\varphi_0)), \quad (11)$$

которое можно рассматривать как уравнение на κ . Амплитуды g_{\pm} также оказываются связанными:

$$\frac{g_+}{g_-} = \frac{v \cdot \exp(2\pi i \kappa_-)}{1 - u \cdot \exp(2\pi i \kappa_+)}. \quad (12)$$

Если параметры потенциала (глубина ямы и высота барьера) меняются, пространственная мода конденсата приобретает фазу $\theta_{\text{total}} = \theta_{\text{dyn}} + \theta_{\text{geom}}$, состоящую из двух частей – динамической θ_{dyn} и геометрической θ_{geom} . В качестве параметризации изменения потенциала будем рассматривать следующий закон⁵⁾:

$$a = a_0 \cdot \cos^2 \alpha; \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]. \quad (13)$$

С каждым выбранным интервалом вариации α связана определенная геометрическая фаза:

$$\theta_{\text{geom}} = \arg\langle \Psi(\alpha_1) | \Psi(\alpha_2) \rangle + \frac{i}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\langle \Psi | \dot{\Psi} \rangle - \langle \dot{\Psi} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} d\alpha. \quad (14)$$

Здесь θ_{geom} представлена как разница θ_{total} (первый член в правой части) и θ_{dyn} . Точка над символом означает дифференцирование по α . Данное выражение записано в форме, делающей его инвариантным не только относительно любого калибровочного преобразования

$$\Psi(\alpha) \rightarrow \exp[i\phi(\alpha)]\Psi(\alpha), \quad (15)$$

но и относительно преобразований, в которых вместо экспоненты фигурирует произвольная гладкая ненулевая функция $F(\alpha)$. Последнее обстоятельство удобно при проведении вычислений, т.к. нет необходимости следить за нормировкой волновой функции. Отмеченная инвариантность геометрической фазы делает ее истинно физической экспериментально измеримой величиной в отличие от θ_{total} и θ_{dyn} [21]. В частности, подходящим выбором $\phi(\alpha)$ в (15) можно устранить динамическую фазу (второе слагаемое в (14)), что сведет θ_{geom} к θ_{total} .

Как отмечено во Введении, физической наблюдаемой, содержащей информацию об угловой скорости вращения, является разница фаз, приобретаемых различными пространственными модами конденсата. Последние, в свою очередь, отличаются ориентацией относительно вектора угловой скорости вращения Ω . Простейшим вариантом изменения ориентации является перестановка положений барьера и

ямы, что в рассматриваемом нами случае симметричного дефекта (9) сводится к изменению знака a_0 в (13). При этом значение параметра κ , определенно в (7) (а следовательно, и энергии ε), не меняется, поскольку, как следует из уравнения (13), κ зависит лишь от абсолютной величины потенциала. Волновая функция, однако, оказывается чувствительной к такой замене, поскольку амплитуды f_{\pm}, g_{\pm} зависят от первой степени a (см. (10), (12)). Таким образом, представляет интерес вычисление величины

$$\Delta\theta_{\text{geom}} = \theta_{\text{geom}} \Big|_{a_0} - \theta_{\text{geom}} \Big|_{-a_0}. \quad (16)$$

Эта величина определяет сдвиг интерференционной картины в реальном эксперименте с модами конденсата. Необходимые соотношения для ее вычисления приведены в Приложении.

Результаты и обсуждение. В [10] была предложена схема компенсации вклада от динамической фазы путем выбора подходящего замкнутого пути в пространстве параметров потенциала, по которому производится вариация. При выбранной форме вариации потенциала (13) таковой была бы циклическая вариация по пути $[\alpha_1, \alpha_2] = [0, \pi]$. Однако, вычисления по формулам (14), (16) показывают, что при этом фаза θ_{geom} тождественно обращается в нуль⁶⁾. Поэтому был выбран вдвое меньший интервал $[\alpha_1, \alpha_2] = [0, \pi/2]$. Таким образом, в конечной точке эволюции состояния обеих мод конденсата становятся совершенно одинаковыми (поскольку оба кольца теряют ориентацию), однако разность фаз между ними будет нетривиальной.

На рисунке 2 приведены зависимости разности геометрических фаз между модами конденсата $\Delta\theta_{\text{geom}}$ из (16) от параметра ξ , характеризующего угловую скорость вращения, при различных расположениях потенциальных дефектов на кольце. Следует отметить несколько обстоятельств. Во-первых, значения разницы геометрических фаз оказались слабо зависящими от величины a_0 дефектных потенциалов. Во-вторых, существенное влияние на указанную разницу имеет взаимное расположение барьера и ямы, т.е. угол φ_0 . Наибольший интерес представляют его малые значения, как видно из рис. 2. Это следует из простых физических соображений – чем ближе расположены барьер и яма, тем более четко определена ориентация колец.

⁶⁾ Различные формы вариации приводят к аналогичному результату, т.е. при любой циклической вариации потенциала геометрическая фаза обращается в нуль. Это обстоятельство является следствием одномерности пространства параметров, от которых зависит потенциал.

⁵⁾ Поскольку дефект описывается только одним параметром, конкретный способ его вариации не имеет принципиального значения.

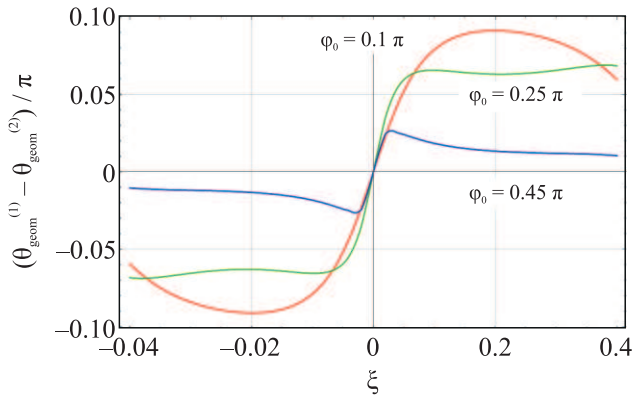


Рис. 2. (Цветной онлайн) Разница геометрических фаз пространственных мод при вариации потенциала вида $a = a_0 \cdot \cos^2 \alpha$, $\alpha \in [0, \pi/2]$, $a_0 = 2$ как функции безразмерной угловой скорости ξ вращения системы отсчета при различных расположениях барьера и ямы на кольце

При $\varphi_0 = \pi/2$ ориентация исчезает, а вместе с ней и разность геометрических фаз. Близкие к нулю значения φ_0 обеспечивают как наибольшую величину регистрируемой разницы фаз, так и наибольший наклон кривой зависимости от угловой скорости при $\xi \sim 0.4$. Последнее обстоятельство позволяет проводить более точные измерения угловых скоростей порядка скорости вращений Земли вокруг своей оси ($\xi = 0.392$). С другой стороны, величина углового раствора между барьером и ямой довольно слабо влияет, как видно из рис. 2, на наклон кривых и, следовательно, на точность измерения при малых значениях $\xi \sim 0.4$.

Общий вид данной зависимости качественно схож с результатами [10], что позволяет сделать вывод о корректности “абстрактной” модели на основе трансфер-матриц.

В отсутствие информации о порядке величины регистрируемой угловой скорости желательно иметь как можно более широкий диапазон, позволяющий однозначно сопоставить измеренное значение разницы фаз с угловой скоростью. Этот диапазон может быть расширен с увеличением радиуса колец.

Заключение. В работе развита модель квантового гироскопа, основанного на геометрической фазе атомарного бозе-конденсата. Измеряемой величиной, содержащей информацией о скорости вращения, является относительная фаза двух кольцевых пространственных мод единого конденсата. Чувствительность к вращению системы отсчета устройства достигается путем введения в каждую из мод дополнительных локализованных конфигураций потенциала – “дефектов”. В результате варьирования

параметров “дефектов” каждая из мод приобретает свой фазовый сдвиг. Их разница может быть зарегистрирована в виде сдвига картины интерференции атомов из обеих мод относительно картины интерференции в отсутствие процесса генерации геометрических фаз. Точность измерения сдвига картины интерференции будет возрастать с увеличением числа атомов, принявших участие в построении интерференционной картины. В этом смысле полное число N атомов в конденсате оказывается важным. Для проведения эксперимента по измерению разницы фаз между модами необходимо реализовать соответствующий атомный интерферометр. Описание его детального устройства выходит за рамки настоящей работы, однако можно с известной осторожностью предположить, что в его основе должны лежать принципы, общие для большинства схем интерферометрии на волнах материи – а именно, организация перекрытия изначально разнесенных пространственных мод [22, 23].

В качестве модели дефекта использовалась комбинация δ -образных барьера и ямы. Их относительное расположение на кольце задает ориентацию и тем самым обеспечивает различную восприимчивость мод к вращению. Хотя это один из простейших вариантов потенциального дефекта, он вполне может быть применим к реальной ситуации. В частности, в [24] была показана эквивалентность задачи с одиночным δ -образным потенциалом на кольце задаче с прямоугольным потенциалом с фиксированным соотношением между шириной и высотой.

В отличие от абстрактной модели описания дефекта кольцевой структуры с помощью некоторой трансфер-матрицы, в реалистичной модели “барьер–яма”, оказываются необходимы незамкнутые траектории варьирования параметров потенциалов. Данное обстоятельство связано со специфическим “симметричным” способом вариации потенциального дефекта – высота ямы в любой момент оказывается равной глубине барьера. Варьируется единственный параметр. Представляется, что в пространстве двух параметров (высота барьера – глубина ямы) можно организовать замкнутую траекторию обхода с ненулевой разницей геометрических фаз мод конденсата. Несомненно важен учет взаимодействия атомов. Это можно попробовать сделать в рамках известной модели Гинзбурга–Гросса–Питаевского или в одномерной модели бозонов с точечным взаимодействием.

Проведенные вычисления позволяют утверждать, что предлагаемая модель обладает необходимыми свойствами гироскопа, т.е. позволяет по значению измеренных фазовых сдвигов однозначно

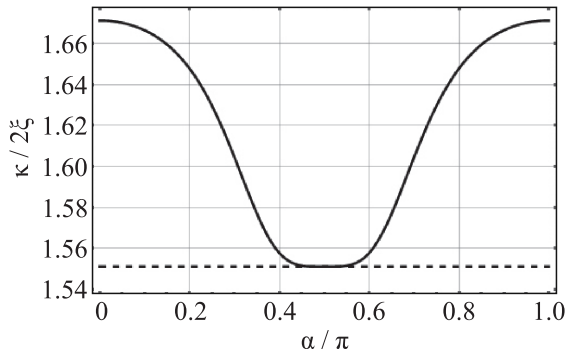


Рис. 1А. Зависимость κ от параметра α из (13) в основном состоянии кольцевой моды при $\xi = 0.392$, $a_0 = 2$

(в определенном диапазоне) определять угловую скорость вращения системы отсчета. Измерения должны производиться в импульсном режиме, поскольку наблюдение интерференции между модами неизбежно приводит к разрушения конденсата. При этом измеряемые фазовые сдвиги оказываются сравнимыми по величине с саньяковской фазой, наблюдаемой в традиционных гироскопических схемах с использованием атомных интерферометров.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 23-12-00182 (<https://rscf.ru/project/23-12-00182/>).

Конфликт интересов. Авторы не имеют конфликтов интересов.

Приложение

При варьировании потенциала неявно подразумевается, что уравнение (11) имеет решение при всех значениях a . Этому условию удовлетворяют не все ветви решений (11). Их можно пронумеровать, заметив, что при $a = 0$

$$\kappa_n \Big|_{a=0} = \pm 2\xi + 2n, \quad (\text{A.1})$$

где n – целое число. При расчетах использовалось решение с $n = 1$, поскольку именно оно соответствует основному состоянию конденсата. Оно проиллюстрировано на рис. 1А.

Выражение (14) для геометрической фазы не зависит от нормировки волновой функции $|\Psi\rangle$. Поэтому без ограничения общности можно полагать

$$\begin{aligned} g_+ &= v \cdot \exp(2\pi i \kappa_-) \\ g_- &= 1 - u \cdot \exp(2\pi i \kappa_+). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Вычисление скалярных произведений осуществляется по формуле

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_0^{2\pi} \bar{\Psi}(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi. \quad (\text{A.3})$$

1. K. Bongs, M. Holynski, J. Vovrosh, P. Bouyer, G. Condon, E. Rasel, C. Schubert, W.P. Schleich, and A. Roua, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 731 (2019).
2. B. Barrett, R. Geiger, I. Dutta, M. Meunier, B. Canuel, A. Gauguet, P. Bouyer, and A. Landragin, *Comptes Rendus Physique* **15**, 875 (2014).
3. D.S. Durfee, Y.K. Shaham, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 240801 (2006).
4. Г. Б. Малыкин, УФН **170**, 1325 (2000) [G. B. Malykin, *Phys.-Uspekhi* **43**, 1229 (2000)].
5. P. Storey and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. II (France)* **4**, 1999 (1994).
6. T. Muller, X. Wu, A. Mohan, A. Eyvazov, Y. Wu, and R. Dumke, *New J. Phys.* **10**, 073006 (2008).
7. C. L. G. Alzar, *AVS Quantum Science* **1**, 014702 (2019).
8. K. A. Krzyzanowska, J. Ferreras, C. Ryu, E. C. Samson, and M. G. Boshier, *Phys. Rev. A* **108**, 043305 (2023).
9. L. Shao, W. Li, and X. Wang, *arXiv:2006.05794v1[quant-ph]* (2020).
10. А. М. Ростом, В. А. Томилин, Л. В. Ильичев, ЖЭТФ **162**, 307 (2022) [A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, *JETP* **135**, 264 (2022)].
11. A. J. Leggett, *Quantum Liquids: Bose-Einstein Condensation and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems*, Oxford, Oxford University Press (2006).
12. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
13. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D.S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
14. M. Landini, S. Roy, G. Roati, A. Simoni, M. Inguscio, G. Modugno, and M. Fattori, *Phys. Rev. A* **86**, 033421 (2012).
15. S. Kraft, F. Vogt, O. Appel, F. Riehle, and U. Sterr, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 130401 (2009).
16. T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H. Nagerl, and R. Grimm, *Science* **299**, 232 (2003).
17. A. Ramanathan, K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, III, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips, and G. K. Campbell, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 130401 (2011).
18. K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb, W. D. Phillips, and G. K. Campbell, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025302 (2013).
19. C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 205301 (2013).

20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, М. (2004). [L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 3: Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Pergamon, N.Y. (1977)].
21. N. Mukunda, Ann. Phys. **228**, 205 (1993).
22. M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).
23. Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhardt, Phys. Rev. Lett. **92**, 050405 (2004).
24. В. А. Томилин, Л. В. Ильичев, Письма в ЖЭТФ **113**, 212 (2021).