

# О двукратном преобразовании Мутара стационарного уравнения Шредингера с осевой симметрией

А. Г. Кудрявцев<sup>1)</sup>

Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 февраля 2024 г.

После переработки 2 февраля 2024 г.

Принята к публикации 28 февраля 2024 г.

Рассмотрено обобщенное преобразование Мутара стационарного осесимметричного уравнения Шредингера. Показано, что суперпозиция двух преобразований Мутара может привести к новым потенциалам для проблемы собственных значений. Примеры двумерных потенциалов и точных решений для стационарного осесимметричного уравнения Шредингера получены применением двукратного преобразования Мутара.

DOI: 10.31857/S1234567824070103, EDN: EUFBYY

**Введение.** Стационарное уравнение Шредингера  $(\Delta - u(x, y, z))Y(x, y, z) = 0$ , где  $\Delta$  – оператор Лапласа, представляет большой интерес, поскольку описывает различные физические явления. В случае  $u = -E + v(x, y, z)$  это уравнение описывает нерелятивистскую квантовую систему с энергией  $E$  [1], в случае  $u = -\omega^2/c(x, y, z)^2$  уравнение описывает акустическую волну с частотой  $\omega$  в неоднородной среде со скоростью звука  $c$  [2]. Многие физические среды обладают осевой симметрией. В случае осевой симметрии стационарное уравнение Шредингера в сферических координатах имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - u(r, \theta) \right) Y(r, \theta) = 0. \quad (1)$$

Важность существования точно решаемых задач квантовой механики бесспорна. Под точно решаемой моделью понимается модель, позволяющая получать точные решения в явном виде. Такие модели важны не только для описания физических систем, но и служат надежным начальным приближением при построении теории возмущений, а также полезны для тестирования численных алгоритмов. Поэтому поиск новых точных решений уравнения Шредингера является актуальной темой научных исследований, при этом используются различные методы решения [3–9].

Полезным инструментом для исследования одномерного уравнения Шредингера является преобразование Дарбу [10]. Преобразование Мутара [11, 12] является обобщением преобразования Дарбу для плоского двумерного уравнения Шредингера. В статьях

[13, 14] было рассмотрено нелокальное преобразование Дарбу двумерного стационарного уравнения Шредингера в декартовых координатах и была установлена его связь с преобразованием Мутара. В статье [15] рассмотрено нелокальное преобразование Дарбу стационарного осесимметричного уравнения Шредингера и показано, что частный случай нелокального преобразования Дарбу является обобщением преобразования Мутара. В настоящей статье рассмотрена задача на собственные значения для аксиально-симметричного уравнения Шредингера и получены новые двумерные потенциалы и точные решения в качестве применения обобщенного преобразования Мутара.

**2. Обобщенное преобразование Мутара в сферических координатах.** В результате перехода от цилиндрических к сферическим координатам формулы обобщенного преобразования Мутара из работы [15] принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{Y}(r, \theta) Y_0(r, \theta) \sin(\theta) \right) = \\ & = \sin(\theta) r (Y_0(r, \theta))^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Y(r, \theta)}{Y_0(r, \theta)} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{Y}(r, \theta) Y_0(r, \theta) \sin(\theta) r \right) = \\ & - \sin(\theta) (Y_0(r, \theta))^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{Y(r, \theta)}{Y_0(r, \theta)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tilde{u}(r, \theta) = u(r, \theta) - \quad (4)$$

$$- \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \ln \left( \sin(\theta) (Y_0(r, \theta))^2 \right).$$

<sup>1)</sup>e-mail: kudryavtsev\_a\_g@mail.ru

Здесь  $Y_0$  и  $Y$  – решения уравнения (1) с начальным потенциалом  $u$ . Функция  $\tilde{Y}$ , определяемая как решение совместной системы уравнений (2) и (3), является решением уравнения (1) с новым потенциалом  $\tilde{u}$ .

Заметим, что  $Y = Y_0$ ,  $\tilde{Y} = \frac{1}{Y_0 \sin(\theta)r}$  является простым примером решения уравнений (2) и (3).

В статьях [15, 16] были получены примеры двумерных потенциалов и точных решений стационарного осесимметричного уравнения Шредингера на основе формул обобщенного преобразования Мутара. Эти примеры показывают, что повторное применение обобщенного преобразования Мутара может привести к более интересным для физической интерпретации потенциалам, чем потенциалы, полученные однократным преобразованием. В частности, повторное применение обобщенного преобразования Мутара эффективно для получения потенциалов, не имеющих особенностей. Для двумерного плоского уравнения Шредингера в декартовых координатах в статье [17] было показано, что двукратное применение классического преобразования Мутара эффективно для получения несингулярных потенциалов. Аналогично, несингулярные потенциалы в цилиндрических координатах могут быть получены с помощью двукратного обобщенного преобразования Мутара [15, 16].

При изучении преобразований Мутара уравнения Шредингера с осевой симметрией было обнаружено еще одно интересное свойство двукратных преобразований [15], а именно, возможность получить одинаковое преобразование для собственных функций с разными собственными значениями. Дело в том, что для задачи на собственные значения  $u = -k^2 + v(r, \theta)$  в случае однократного применения преобразования Мутара (4), используя выбранную собственную функцию  $Y_0(r, \theta, k)$ , соответствующую собственному значению  $k$ , новый потенциал имеет вид  $\tilde{u} = -k^2 + \tilde{v}(r, \theta, k)$ . Поскольку  $\tilde{v}$  содержит зависимость от  $k$ , получаются разные преобразования для собственных функций с разными собственными значениями. Аналогично классическое преобразование Мутара в двумерном плоском случае приводит к различным преобразованиям для собственных функций с разными собственными значениями. В отличие от преобразования Мутара, преобразование Дарбу дает нам преобразования всех собственных функций. Это различие между двумерным случаем и одномерным случаем, по-видимому, отражается в известном факте о интегрируемости в двумерном случае только на выбранном уровне энергии (см., например, [18, 19]).

Рассмотрим  $u = -k^2$  и выберем собственную функцию  $Y_0 = \sin(kr \cos(\theta))$ . Из (4) получаем

$$\tilde{u} = -k^2 + 2 \frac{k^2}{(\sin(kr \cos(\theta)))^2} + \frac{1}{r^2 (\sin(\theta))^2}. \quad (5)$$

Это пример зависимости  $\tilde{v}$  от  $k$ . Чтобы избежать этой зависимости, мы используем двукратное преобразование Мутара. В результате перехода от цилиндрических к сферическим координатам формулы для суперпозиции двух обобщенных преобразований Мутара из работы [15] имеют вид

$$\tilde{u} = u(r, \theta) - 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \ln(F(r, \theta)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \sin(\theta) r^2 \left( \frac{\partial Y_2}{\partial r} Y_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial r} Y_2 \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\sin(\theta) \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} Y_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} Y_2 \right). \quad (8)$$

Здесь  $Y_1$  и  $Y_2$  – решения уравнения (1) с начальным потенциалом  $u$ .

Уравнения (7), (8) инвариантны относительно замены  $Y_1 \rightarrow Y_2, Y_2 \rightarrow Y_1, F \rightarrow -F$ , что отражает коммутативность обобщенных преобразований Мутара. Результат не зависит от порядка выбора функций  $Y_1, Y_2$  для преобразования. Отметим также, что  $F$  определяется с точностью до умножения на константу. Простые примеры решений уравнения (1) с потенциалом (6) можно получить по формулам  $\tilde{Y}_1 = Y_1 F^{-1}, \tilde{Y}_2 = Y_2 F^{-1}$ .

**3. Примеры потенциалов и точных решений.** Рассмотрим  $u = -k^2$ ,  $Y_1 = \sin(kr \cos(\theta)), Y_2 = \cos(kr \cos(\theta))$ . Из уравнений (7), (8) получаем  $F = r^2 (\sin(\theta))^2 + C$ , где  $C$  – произвольная константа. Из формулы (6) получаем новый потенциал

$$\tilde{u} = -k^2 + 4 \frac{r^2 (\sin(\theta))^2 - C}{(r^2 (\sin(\theta))^2 + C)^2}. \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{v}$  не зависит от  $k$ , и мы получили новую задачу на собственные значения. В качестве решения исходной задачи на собственные значения с  $u = -k^2$  мы будем рассматривать плоскую волну  $e^{ikr \cos(\theta)}$ . Проведя двукратное преобразование Мутара или воспользовавшись простой формулой  $Y_2 F^{-1} + i Y_1 F^{-1}$  мы получаем следующее решение уравнения (1) с потенциалом (9)

$$\frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{r^2 (\sin(\theta))^2 + C}. \quad (10)$$

В качестве другого примера рассмотрим два решения уравнения (1) с потенциалом  $u = -k^2$

$$Y_1 = \frac{J_{p+1/2}(kr)P(p, \cos(\theta))}{\sqrt{r}}, \quad (11)$$

$$Y_2 = \frac{Y_{p+1/2}(kr)P(p, \cos(\theta))}{\sqrt{r}}, \quad (12)$$

где  $p$  – параметр,  $J_{p+1/2}, Y_{p+1/2}$  – функции Бесселя первого и второго рода,  $P$  – функция Лежандра первого рода. Из уравнений (7), (8) получаем  $F$ , зависящую только от  $\theta$

$$F_p(\theta) = - \int \sin(\theta) (P(p, \cos(\theta)))^2 d\theta. \quad (13)$$

Из формулы (6) получаем новый потенциал

$$\tilde{v}_p = -k^2 - 2 \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(F_p(\theta))}{r^2}, \quad (14)$$

где  $\tilde{v}$  не зависит от  $k$ . Заметим, что  $\tilde{v} = \frac{f(\theta)}{r^2}$  имеет вид потенциала Калоджеро–Мозера. Проблема интегрируемости потенциалов типа Калоджеро–Мозера продолжает привлекать внимание исследователей в области математики и физики [20].

При целых неотрицательных значениях параметра  $p$  функцию  $F$  можно получить в явном виде. Так для  $p = 0, 1, 2$  мы имеем

$$F_0(\theta) = \cos(\theta) + C, F_1(\theta) = (\cos(\theta))^3 + C,$$

$$F_2(\theta) = \left(9(\cos(\theta))^4 - 10(\cos(\theta))^2 + 5\right) \cos(\theta) + C,$$

где произвольные константы  $C$  для каждой  $F_p$ , естественно, могут быть выбраны независимо.

Из (14) получаем соответствующие потенциалы

$$\tilde{u}_0 = -k^2 + 2 \frac{C \cos(\theta) + 1}{(F_0(\theta))^2 r^2}, \quad (15)$$

$$\tilde{u}_1 = -k^2 + 6 \frac{N_1(\theta)}{(F_1(\theta))^2 r^2}, \quad (16)$$

$$\tilde{u}_2 = -k^2 + 10 \frac{N_2(\theta)}{(F_2(\theta))^2 r^2}, \quad (17)$$

где

$$N_1(\theta) = \cos(\theta) \left( \left( 3(\cos(\theta))^2 - 2 \right) C + (\cos(\theta))^3 \right),$$

$$N_2(\theta) = \left( 45(\cos(\theta))^4 - 54(\cos(\theta))^2 + 13 \right) \cos(\theta) C + \left( 9(\cos(\theta))^4 + 72(\cos(\theta))^2 - 70 \right) (\cos(\theta))^4 + 5.$$

В качестве примеров точных решений задачи рассеяния с потенциалами (15)–(17) мы снова рассматриваем плоскую волну  $e^{ikr \cos(\theta)}$  для исходного  $u = -k^2$  и применяем двукратное преобразование Мутара с соответствующими  $Y_1$  и  $Y_2$  из формул (11) и (12). В результате получаем следующие точные решения

$$\tilde{Y}_0 = e^{ikr \cos(\theta)} \left( 1 + \frac{i}{kr F_0(\theta)} \right), \quad (18)$$

$$\tilde{Y}_1 = e^{ikr \cos(\theta)} \left( 1 + 3 \frac{\cos(\theta) (ikr \cos(\theta) - 1)}{k^2 r^2 F_1(\theta)} \right), \quad (19)$$

$$\tilde{Y}_2 = e^{ikr \cos(\theta)} \left( 1 + \frac{M(r, \theta, k)}{k^3 r^3 F_2(\theta)} \right), \quad (20)$$

где

$$M(r, \theta, k) = 5i \left( 3(\cos(\theta))^2 - 1 \right) \left( \left( 3(\cos(\theta))^2 - 1 \right) r^2 k^2 + 6ikr \cos(\theta) - 6 \right).$$

**4. Результаты и обсуждение.** Собственная функция задачи на собственные значения двумерного оператора Шредингера позволяет получить преобразование Мутара для потенциала. Однако результирующий потенциал зависит от собственного значения, соответствующего собственной функции. В статье показано, что в ряде случаев двукратное применение преобразования Мутара приводит к тому, что можно получить потенциал, не зависящий от собственных значений. Важно отметить, что преобразование Мутара для получения новых решений требует квадратур, поэтому получение собственных функций в явном аналитическом виде для нового потенциала не всегда возможно. Если для нового потенциала собственные функции получаются в явном виде, то мы можем говорить о новой разрешимой двумерной проблеме собственных значений. Здесь говорится, что задача разрешима, если она позволяет получить решения в явной аналитической форме. В этой статье приведены примеры новых разрешимых задач на собственные значения в случае оператора Шредингера с осевой симметрией. Для новой решаемой задачи можно попробовать еще раз построить двукратное преобразование Мутара. Нахождение всех разрешимых задач на собственные значения оператора Шредингера, которые можно получить с помощью двукратного преобразования Мутара, остается открытой проблемой.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** У автора нет конфликтов интересов.

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1977).
2. P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, N.Y. (1968).
3. L. Infeld and T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 21 (1951).
4. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics. A Unified Introduction With Applications*, Basel–Boston, Birkhauser Verlag (1988).
5. Fred Cooper, Avinash Khare, and Uday Sukhatme, *Phys. Rep.* **251**, 267 (1995).
6. A. A. Andrianov and M. V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 503001 (2012).
7. D. J. Fernandez, *Trends in Supersymmetric Quantum Mechanics* in: *Integrability, Supersymmetry and Coherent States. CRM Series in Mathematical Physics*, ed. by Ş. Kuru, J. Negro, and L. Nieto, Springer, Cham (2019).
8. Sanjana Bhatia, C. N. Kumar, and A. Nath, *Phys. Lett. A* **492**, 129228 (2023).
9. G. Gordillo-Núñez, R. Alvarez-Nodarse, and N. R. Quintero, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **458**, 134008 (2024).
10. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin (1991).
11. T. Moutard, *J. Ecole Polyt.* **45**, 1 (1878).
12. C. Athorne and J. J. C. Nimmo, *Inverse Problems* **7**, 809 (1991).
13. A. G. Kudryavtsev, *Phys. Lett. A* **377**, 2477 (2013).
14. A. G. Kudryavtsev, *Theor. Math. Phys.* **187**(1), 455 (2016).
15. A. G. Kudryavtsev, *JETP Lett.* **111**(2), 126 (2020).
16. A. G. Kudryavtsev, *JETP Lett.* **113**(6), 409 (2021).
17. I. A. Taimanov and S. P. Tsarev, *Theor. Math. Phys.* **157**(2), 1525 (2008).
18. A. P. Veselov and S. P. Novikov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **279**(4), 784 (1984) [*Soviet Math. Dokl.* **30**(3), 705 (1984)].
19. A. V. Ilina, I. M. Krichever, and N. A. Nekrasov, *Funct. Anal. Its. Appl.* **53**, 23 (2019).
20. Y. Berest and O. Chalykh, *Commun. Math. Phys.* **400**, 133 (2023).