

# Конические структуры на поверхности жидкости в электрическом поле: влияние объемного и поверхностного зарядов

М. А. Беляев<sup>+</sup>, Н. М. Зубарев<sup>(ID+\*1)</sup>, О. В. Зубарева<sup>(ID+)</sup>

<sup>+</sup>Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

\*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 марта 2024 г.

После переработки 13 марта 2024 г.

Принята к публикации 15 марта 2024 г.

Исследованы конические образования, возникающие на поверхности жидкости с поверхностной ионной проводимостью во внешнем электрическом поле, с учетом влияния объемного электрического заряда потока капель, эмитируемых в окружающий газ с вершины конуса. Получены точные многопараметрические самоподобные решения для распределения электрического поля вблизи вершины острия, а также для движения в этом поле заряженных частиц – ионов и капель. Эти решения позволили найти и классифицировать зависимости между углом жидкого конуса, углом разлета капель, величиной протекающего через конус электрического тока при различных параметрах задачи.

DOI: 10.31857/S123456782408007X, EDN: UDXRDV

**1. Введение.** Как известно [1–7], свободная поверхность жидкости становится неустойчивой при приложении достаточно сильного электрического поля. Взаимодействие поля с индуцированным им электрическим зарядом приводит к взрывному росту возмущений поверхности [8–13], в результате чего на ней могут формироваться стационарные конические структуры [14–17]. Впервые такие структуры были описаны в известной работе Тейлора [18] применительно к случаю идеально проводящей жидкости. Для взаимной компенсации капиллярного и электростатического давлений на поверхности конуса требуется, чтобы напряженность поля  $E$  спадала с расстоянием  $R$  от его вершины по степенному закону  $E \propto R^{-1/2}$ . Действительно, капиллярное давление на поверхности конуса из геометрических соображений всегда удовлетворяет закону  $p_s \propto R^{-1}$ . Для баланса давлений требуется, чтобы электростатическое давление удовлетворяло тому же закону, т.е.  $p_E \propto R^{-1}$ . Поскольку  $p_E \propto E^2$  [19], приходим к тейлоровскому скейлингу  $E \propto R^{-1/2}$ . В [18] было продемонстрировано, что он реализуется для конуса с полууглом раствора  $\beta_T \approx 49.3^\circ$  (угол Тейлора).

Результат Тейлора был обобщен на случай идеальной диэлектрической жидкости Рамосом и Кастельяносом [20]. Было показано, что конические структуры могут возникать на поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , превышающей порог  $\varepsilon_c \approx 17.6$ . Кроме того, было установлено, что

полуугол конуса  $\beta$  зависит от  $\varepsilon$  и находится в диапазоне  $0 < \beta < \beta_T$ , т.е. всегда меньше угла Тейлора.

В работе Де Ла Мора [21] было учтено влияние на распределение электрического поля объемного заряда капель, испускаемых с вершины конического острия на поверхности идеально проводящей жидкости. Была определена связь между углом разлета капель и углом конуса. Показано, что угол  $\beta$  зависит от величины электрического тока, протекающего через конус. Как и для непроводящей жидкости,  $\beta$  всегда меньше, чем  $\beta_T$ . Возможность аналитического решения уравнений, описывающих распределение электрического поля и движение в нем заряженных капель, была обусловлена тем, что напряженность поля в области спрея подчиняется тейлоровскому скейлингу  $E \propto R^{-1/2}$ . Это позволило осуществить авторемодельную редукцию соответствующих уравнений и затем точно решить редуцированную задачу.

Далее, в работах Субботина и Семенова [22, 23] рассматривалось коническое образование на поверхности жидкости с ионной проводимостью. Было продемонстрировано, что вблизи вершины конуса поверхностный ток доминирует над током проводимости в объеме жидкости. В этом случае снова может реализовываться скейлинг  $E \propto R^{-1/2}$ , позволяющий решить задачу аналитически (см. также [24, 25]). В частности, анализ решений показал, что конические структуры в этой ситуации могут существовать при диэлектрической проницаемости жидкости  $\varepsilon$ , меньшей  $\varepsilon_c$ .

<sup>1)</sup>e-mail: nick@iep.uran.ru

Указанные выше работы [18, 20–23], учитывающие влияние различных факторов на конические образования, возникающие на поверхности жидкостей в электрическом поле, объединяет реализация одинакового, тейлоровского скейлинга  $E \propto R^{-1/2}$ . В настоящей работе мы продемонстрируем, что весьма многочисленные и сложные нелинейные уравнения, описывающие процессы в жидком конусе, допускают точное аналитическое решение при одновременном учете всех ключевых факторов, рассмотренных в [18, 20–23]. В итоге впервые в рамках единой модели будет описано влияние на геометрию жидкого острья и протекание через него электрического тока (i) объемного заряда эмитируемых с вершины и затем дрейфующих в окружающем газе капель, (ii) поверхностного свободного заряда дрейфующих по границе конуса ионов, а также (iii) поверхностного поляризационного заряда.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 выписаны уравнения, описывающие распределение электрического поля с учетом влияния поверхностного заряда дрейфующих по границе конуса ионов и объемного заряда эмитируемых с его вершины капель. В разделе 3 мы найдем точное самоподобное решение задачи, которое позволит определить связи между углом при вершине жидкого острья, углом разлета капель, величиной протекающего через систему электрического тока при различных значениях параметров задачи, таких как диэлектрическая проницаемость жидкости и подвижности носителей заряда. Соответствующие зависимости подробно исследованы в разделе 4, где построена карта возможных режимов и продемонстрировано, что результаты работ [18, 20–23] соответствуют различным асимптотикам предложенной модели.

**2. Исходные уравнения.** Будем полагать, что во внешнем электрическом поле жидкость принимает форму конуса с углом  $2\beta$  при вершине – см. рис. 1. Вершина конуса эмитирует поток заряженных капель в коническую область с углом  $2\gamma$ . Эти капли дрейфуют в окружающем газе.

Выпишем основные уравнения, описывающие распределение электрического поля с учетом влияния объемного и поверхностного электрических зарядов. Естественно использовать сферическую систему координат, где  $R$  – расстояние до вершины конуса, а  $\theta$  – полярный угол. В области спрея  $0 \leq \theta \leq \gamma$  (область 1 на рис. 1) имеется объемный заряд капель плотностью  $\rho$ . В области  $\gamma < \theta < \pi - \beta$  (область 2) заряженные частицы отсутствуют. Считаем также, что объем жидкости  $\pi - \beta \leq \theta \leq \pi$  (область 3) является электронейтральным. На гра-

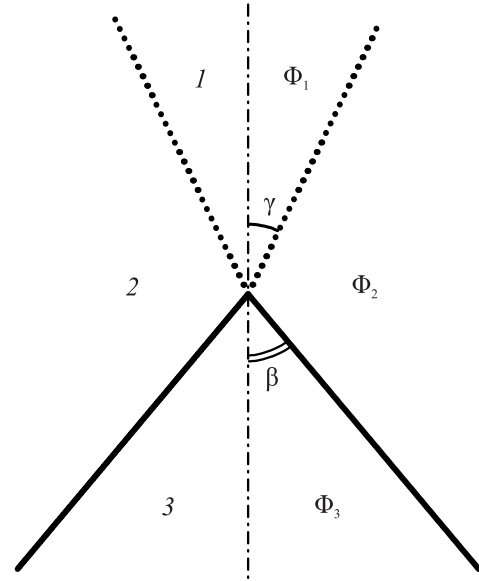


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи

нице областей 2 и 3, т.е. на поверхности жидкого конуса  $\theta = \pi - \beta$ , имеется электрический заряд с поверхностной плотностью, являющейся суммой плотностей свободных зарядов (дрейфующих по границе жидкости ионов) и связанных поляризационных зарядов:  $\sigma_{\Sigma} = \sigma + \sigma_p$  (см. также [22]).

Потенциалы электрического поля в областях 1, 2 и 3 обозначим как  $\Phi_{1,2,3}$ . Как и в [21], будем считать, что распределение электрического поля в области спрея является сферически симметричным, т.е.  $\Phi_1 = \Phi_1(R)$  и  $\rho = \rho(R)$ . Оно описывается одномерным уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (диэлектрическую проницаемость окружающего конуса газа считаем равной единице). В электронейтральных областях 2 и 3 потенциалы электрического поля удовлетворяют двумерным уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2,3}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_{2,3}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial \theta} = 0. \quad (2)$$

Запишем необходимые граничные условия. Тангенциальные компоненты напряженности электрического поля внутри и снаружи жидкости совпадают на границе, в то время как нормальная компонента электрической индукции претерпевает скачок, пропорциональный поверхностной плотности свободного заряда [19]:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial R}, \quad \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \theta = \pi - \beta. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость жидкости. Аналогичные условия на границе спрея принимают простой вид

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial R}, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} = 0, \quad \theta = \gamma. \quad (4)$$

Вектор напряженности электрического поля имеет только радиальную составляющую на оси симметрии задачи, так что

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta} = 0, \quad \theta = \pi. \quad (5)$$

Обозначим за  $\mu_v$  и  $\mu_s$  подвижности заряженных капель и ионов, которые дрейфуют через газ и, соответственно, по поверхности жидкости. Их скорости определяются соотношениями

$$V_v = -\mu_v \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}, \quad V_s = -\mu_s \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \Big|_{\theta=\pi-\beta}.$$

С их учетом стационарные уравнения непрерывности для капель и ионов запишутся следующим образом:

$$\rho \left( \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial\Phi_1}{\partial R} \right) + \frac{\partial\rho}{\partial R} \frac{\partial\Phi_1}{\partial R} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma \left( \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \right) + \frac{\partial\sigma}{\partial R} \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} = 0, \quad \theta = \pi - \beta. \quad (7)$$

Различие в коэффициентах связано с тем, что движение капель – трехмерное, а ионов – двумерное.

Для упрощения постановки задачи мы не будем рассматривать движение жидкости в области  $\mathcal{Z}$  и связанные с ним эффекты (соответствующие ограничения на применимость модели обсуждаются в разделе 4.4). Тогда условием равновесия свободной поверхности жидкости является взаимная компенсация на ней капиллярного и электростатического [19] давлений

$$p_s = p_E, \quad (8)$$

$$p_s = \alpha R^{-1} \cot \beta,$$

$$p_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{R^2} \left( \frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta} \right)^2 + (\varepsilon - 1) \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial R} \right)^2 \right),$$

где  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а выражение для  $p_E$  рассчитывается для угла  $\theta = \pi - \beta$ .

Система уравнений замыкается условием равенства электрических токов

$$I_s = I_v, \quad (9)$$

протекающих по поверхности жидкого конуса,

$$I_s = 2\pi R \mu_s \sin \beta \sigma \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \Big|_{\theta=\pi-\beta},$$

и через окружающий газ,

$$I_v = -2\pi R^2 \mu_v (1 - \cos \gamma) \rho \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}.$$

В следующем разделе мы покажем, что уравнения (1)–(9) допускают точное аналитическое решение, что позволит определить связь между углами  $\beta$  и  $\gamma$ , а также величину протекающего через систему электрического тока  $I$  для различных значений параметров задачи  $\mu_v$ ,  $\mu_s$  и  $\varepsilon$ .

**3. Точное решение.** Согласно условию баланса давлений на поверхности жидкого конуса (8), электрическое поле, как и для классического конуса Тейлора, должно уменьшаться с расстоянием  $R$  как  $R^{-1/2}$ . Тогда потенциалы электрического поля будут удовлетворять одинаковому степенному закону  $\Phi_{1,2,3} \propto R^{1/2}$ . Как видно из (1), для плотности объемного заряда в таком случае должна выполняться зависимость  $\rho \propto R^{-3/2}$ . Важно отметить, что данное соотношение автоматически обеспечивает тождественное выполнение уравнения непрерывности (6). Далее, из уравнения (3) следует, что для плотности поверхностного заряда должен выполняться скейлинг  $\sigma \propto R^{-1/2}$ , что, в свою очередь, обеспечивает выполнение уравнения непрерывности (7). Тот факт, что тейлоровский скейлинг  $\Phi \propto R^{1/2}$  не нарушается при учете объемного заряда капель, испускаемых с вершины жидкого конуса и затем дрейфующих в конической области, был установлен в [21]. В [22] было показано, что этот скейлинг остается в силе при учете поверхностного ионного тока.

Соответствующая требуемому скейлингу подстановка  $\Phi = f(\theta)R^{1/2}$ , где  $f$  – некоторая функция полярного угла, сводит уравнение Лапласа (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению на угловое распределение потенциала электрического поля:

$$3f/4 + f_{\theta\theta} + f_{\theta} \cot \theta = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$f = c_1 P_{1/2}(\cos \theta) + c_2 P_{1/2}(-\cos \theta),$$

где  $c_{1,2}$  – некоторые константы, а  $P_{1/2}$  – функция Лежандра порядка  $1/2$  (она выражается через гипергеометрическую функцию как  $P_{1/2}(x) = F(3/2, -1/2, 1, (1-x)/2)$ ). При использовании подстановок

$$\rho = BR^{-3/2}, \quad \sigma = DR^{-1/2}, \quad \Phi_1 = AR^{1/2},$$

$$\Phi_2 = C_1 P_{1/2}(\cos \theta) R^{1/2} + C_2 P_{1/2}(-\cos \theta) R^{1/2},$$

$$\Phi_3 = C_3 P_{1/2}(-\cos \theta) R^{1/2}$$

уравнения (1)–(9) сводятся к алгебраическим уравнениям на постоянные  $A, B, C_{1,2,3}$  и  $D$ . Они легко решаются, давая тем самым точное аналитическое решение рассматриваемой задачи.

Согласно получаемым решениям, ключевые параметры задачи  $\beta, \gamma, \varepsilon$ , а также отношение подвижностей  $m \equiv \mu_v/\mu_s$  связаны довольно громоздким соотношением:

$$\frac{(1 - \varepsilon - G(\gamma)G(\beta) - \varepsilon F(\beta)G(\gamma))(F(\beta)G(\gamma) + 1)}{(G(\gamma) + F(\gamma))^2} = \frac{3m(1 - \cos \gamma) P_{1/2}^2(\cos \gamma)}{4 \sin^2 \beta P_{1/2}(\cos \beta) P'_{1/2}(\cos \beta)}, \quad (10)$$

где  $P'_{1/2}$  – производная функции Лежандра по аргументу, а также мы обозначили

$$F(x) = \frac{P_{1/2}(-\cos x)}{P_{1/2}(\cos x)}, \quad G(x) = \frac{P'_{1/2}(-\cos x)}{P'_{1/2}(\cos x)}.$$

Протекающий через систему электрический ток в рамках модели определяется выражением

$$I = I_s = I_v = -\pi \mu_v (1 - \cos \gamma) AB.$$

Введем также по аналогии с [22, 23] долю подвижного заряда  $w$  на поверхности конуса,

$$w = \frac{\sigma}{\sigma_\Sigma} = \frac{\sigma}{\sigma + \sigma_p},$$

где плотность поляризационного заряда задается выражением

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{R^{1/2}} C_3 P'_{1/2}(\cos \beta) \sin \beta.$$

Использование величины  $w$  оказывается полезным для интерпретации полученных решений.

**4. Анализ решений.** Полученное точное решение исходных уравнений позволяет построить зависимости угла разлета каплей  $\gamma$ , тока  $I$  и доли свободного заряда  $w$  от полуугла конуса  $\beta$  при различных значениях проницаемости  $\varepsilon$  и отношения подвижностей  $m$ . Анализируя эти зависимости, можно выделить в параметрической плоскости  $\{m, \varepsilon\}$  области с различным поведением системы. Карта режимов продемонстрирована на рис. 2. Имеется три области I, II и III, разделенные сепаратрисами (сплошная синяя и штриховая красная линии). Общей (тройной) точкой областей является  $m = m_c = 1$  и  $\varepsilon = \varepsilon_c \approx 17.6$ . Проанализируем режимы, соответствующие представленной на рис. 2 классификации.

**4.1. Область I.** Рассматриваемая область представляет собой полосу  $1 < \varepsilon < \varepsilon_c \approx 17.6$ . Для понимания характера зависимостей  $\gamma, I$  и  $w$  от  $\beta$  удобно совместить данные при выбранном фиксированном значении  $\varepsilon$  и нескольких различных  $m$  (мы взяли  $\varepsilon = 5$  и

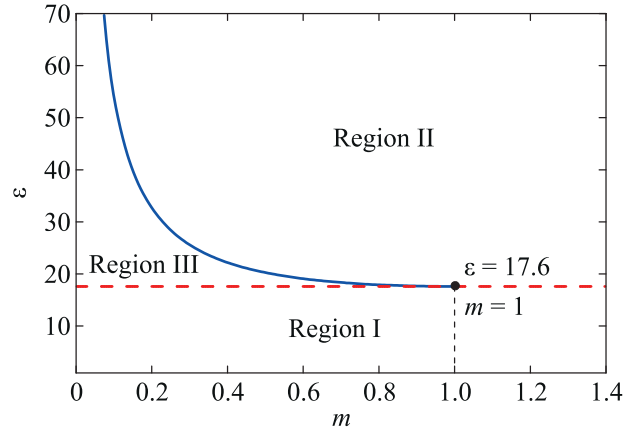


Рис. 2. (Цветной онлайн) Карта различных режимов на параметрической плоскости  $\{m, \varepsilon\}$

$m = 0.1, 0.5, 1$ ). Характерные зависимости  $\gamma$  от  $\beta$  показаны на рис. 3а. Видно, что угол разлета каплей  $\gamma$  монотонно убывает с увеличением угла конуса  $\beta$ . Таким образом, при наличии свободных поверхностных зарядов возможно существование конических острий на поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью, меньшей  $\varepsilon_c$  (напомним, что в отсутствие свободных зарядов равновесные конические образования в этой области не существуют – см. [20]). Обратим внимание на то, что решения имеются только в диапазоне углов конуса  $0 < \beta \leq \beta_T \approx 49.3^\circ$ . Таким образом, конус всегда заостряется относительно конуса Тейлора (эта тенденция является общей – она сохраняется и в областях II, III). Следует отметить, что различные углы  $\beta$  соответствуют разным значениям приложенной к системе разности потенциалов, которую естественно рассматривать в качестве внешнего управляющего параметра [25].

Как видно из рис. 3б, где представлены зависимости  $w$  от  $\beta$ , на поверхности конуса доминирует свободный заряд (величина  $w$  близка к единице). Поляризационный заряд отсутствует для крайних углов конуса  $\beta \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow \beta_T$ , а его доля достигает максимума при углах около  $30^\circ$ . В целом доля свободного заряда незначительно уменьшается с ростом  $m$ .

На рисунке 3с показаны угловые зависимости безразмерного тока  $I/i_0$  (он нормирован на величину  $i_0 = \alpha \mu_v$ ). Как видно, ток обращается в нуль для крайних углов конуса  $\beta \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow \beta_T$ , и достигает максимума при относительно малых углах  $< 15^\circ$ .

При  $m \rightarrow 0$  полученные зависимости будут стремиться к зависимостям, полученным Де Ла Мором для идеально проводящей жидкости [21]. Отметим, что в [21] демонстрировалось неплохое согласие между модельным соотношением между углами  $\gamma$  и  $\beta$  и экспериментальными данными для нескольких ре-

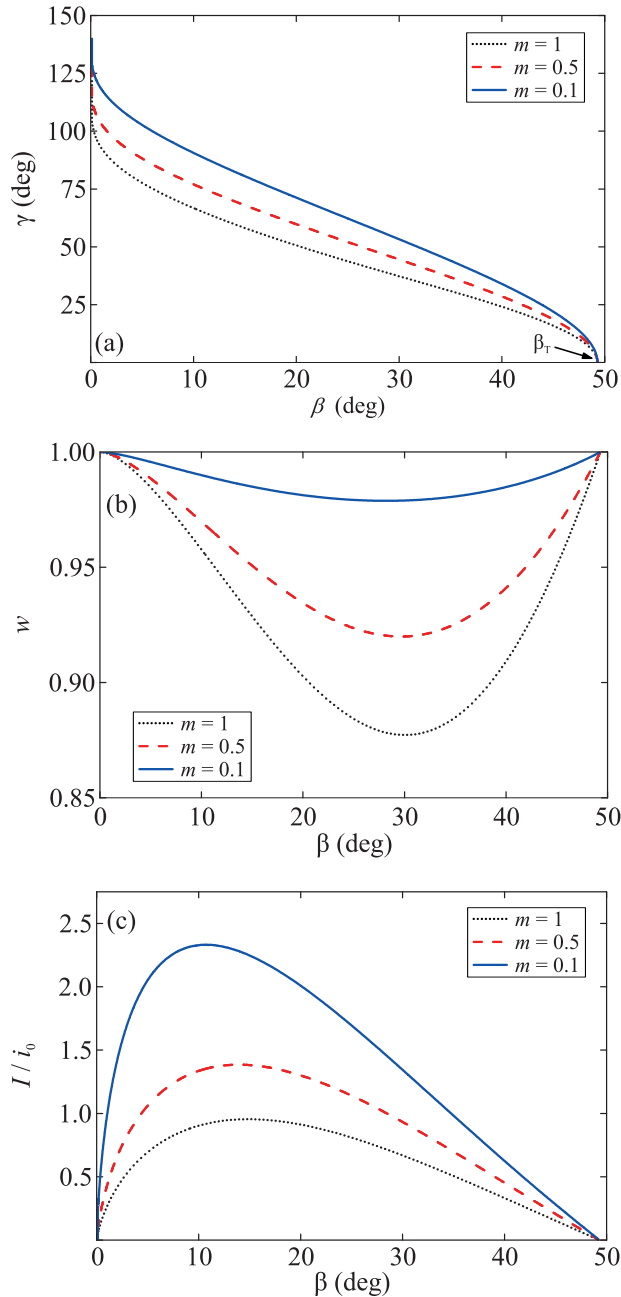


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости от полуугла раствора жидкого конуса  $\beta$ : (a) – угла разлета капель  $\gamma$ , (b) – доли свободного поверхностного заряда  $w$  и (c) – нормированного на величину  $i_0 = \alpha\mu_v$  электрического тока  $I$  при  $\varepsilon = 5$  и  $m = 0.1, 0.5, 1$  (область I)

альных жидкостей (наблюдаемые углы относились к интервалам  $32^\circ < \beta < \beta_T$  и  $0 < \gamma < 42^\circ$ ).

При значениях  $m \gg 1$  влияние объемного заряда эмитируемых с вершины капель будет пренебрежимо малым – капли в силу большой подвижности быстро покидают прилегающую к острию область. Это соответствует рассмотренному в работах Субботина и

Семенова [22, 23] случаю, когда область вне жидкости электронейтральна.

4.2. *Области II и III.* При  $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 17.6$  характер всех зависимостей становится значительно более сложным, и он радикально меняется при вариации  $m$ . Здесь, согласно рис. 2, существует два типа решений, разделенных сепаратрисой (синия сплошная линия). На рисунке 4 показаны зависимости от полуугла раствора жидкого конуса  $\beta$  угла разлета капель  $\gamma$ , доли свободного заряда на поверхности конуса  $w$  и протекающего через систему электрического тока  $I$  при  $\varepsilon = 25$  для  $m = 0.2, 0.3139, 1$ . Первое значение  $m$  попадает в область III, расположенную слева от сепаратрисы. Второе значение соответствует сепаратрисе. Третье значение  $m$  попадает в область II, расположенную справа от сепаратрисы.

Как видно, в области II (черные пунктирные линии на рис. 4) решения разделились на две отдельные ветви, соответствующие более острым и более тупым конусам. Решения существуют в диапазонах  $0 < \beta \leq \beta_1$  и  $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_T$ , разделенных промежутком  $\beta_1 < \beta < \beta_2$ , в котором решений нет. При  $\beta = \beta_{1,2,T}$  имеем  $\gamma = 0$  (т.е. поток капель отсутствует) и, как следствие, электрический ток через конус не протекает. При этом для  $\beta = \beta_{1,2}$  будет  $w = 0$ , т.е. свободного поверхностного заряда нет. Эти точки соответствуют решениям Рамоса и Кастельяноса [20] для идеальной диэлектрической жидкости. Напротив, в точке  $\beta = \beta_T$  отсутствует поляризационный заряд,  $w = 1$ . Имеющийся свободный поверхностный заряд полностью экранирует поле внутри жидкости, что формально соответствует решению Тейлора. Предельный случай  $m \gg 1$  соответствует работам Субботина и Семенова [22, 23], где при значениях проницаемости  $\varepsilon > \varepsilon_c$  также имелся диапазон углов, в котором не было конических решений.

В области III (синие сплошные линии на рис. 4) также имеются две ветви решений, но уже совершенно иного типа – верхняя и нижняя. Верхняя ветвь родственна решениям из области I: угол разлета  $\gamma$  монотонно уменьшается во всем допустимом диапазоне углов жидкого конуса  $0 < \beta \leq \beta_T$ . Эта ветвь может рассматриваться как деформация решения Де Ла Мора для проводящего конуса [21] (оно совпадет с нашими решениями в пределе  $m \rightarrow 0$ ). В этом случае на поверхности доминирует свободный поверхностный заряд дрейфующих ионов (рис. 4b). Нижняя ветвь решений имеет колоколообразную форму и реализуется в промежутке  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$  с нулями, соответствующими решению Рамоса и Кастельяноса [20]. Здесь, в отличие от верхней ветви, доминирует поляризационный заряд (см. рис. 4b). При этом всю-



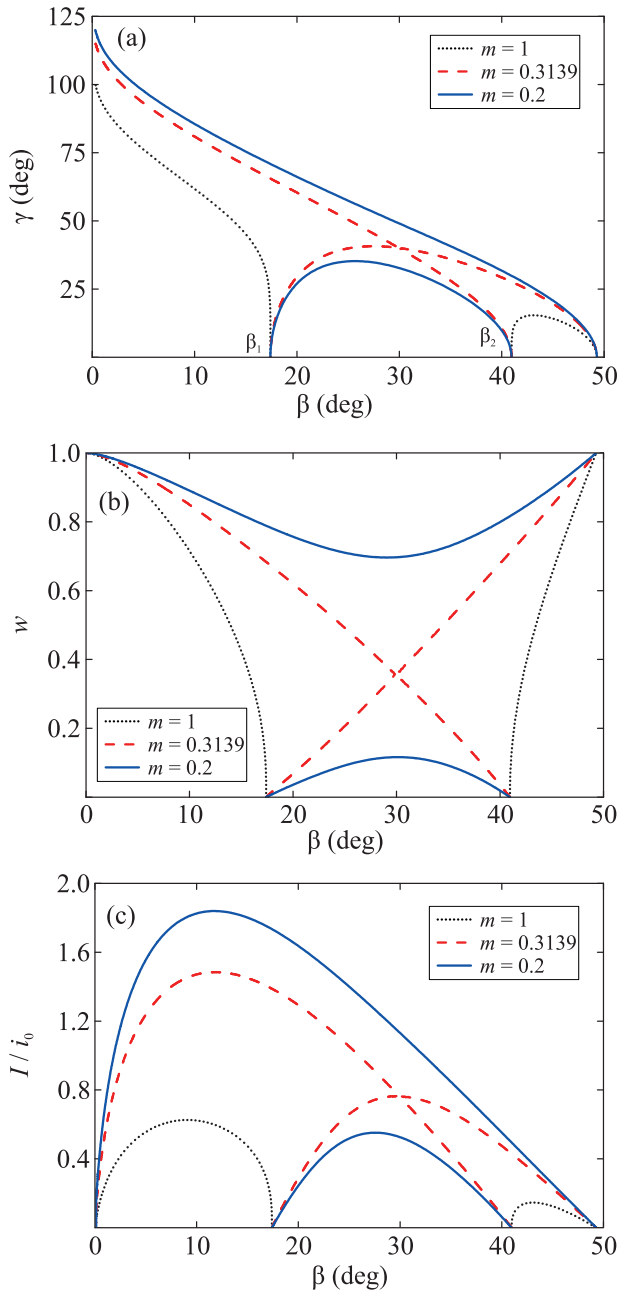


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости от полуугла раствора жидкого конуса  $\beta$ : (а) – угла разлета капель  $\gamma$ , (б) – доли свободного поверхностного заряда  $w$  и (с) – нормированного на величину  $i_0$  электрического тока  $I$  при  $\varepsilon = 25$  и  $m = 0.2, 0.3139, 1$  (области II и III)

ду, за исключением крайних точек, свободного поверхностного заряда достаточно для протекания тока (рис. 4с). При высоких значениях  $\varepsilon$  для нижней ветви будет  $\beta_1 \rightarrow 0$  и  $\beta_2 \rightarrow \beta_T$ , а соответствующие ей решения асимптотически приближаются к верхней ветви. Это связано с тем, что при больших значениях диэлектрической проницаемости электрическое поле

не будет проникать в среду, т.е. его распределение будет таким же, как для проводящей жидкости.

На рисунке 4 также показаны зависимости (красные штриховые линии), соответствующие границе областей II и III на рис. 2. Видно, каким образом происходит пересоединение ветвей различного типа, реализующихся в областях II и III.

4.3. Граница области I и областей II, III. Рассмотрим теперь, что происходит на границе области I с областью III ( $\varepsilon = \varepsilon_c$  и  $m < 1$ ) и с областью II ( $\varepsilon = \varepsilon_c$  и  $m > 1$ ). Как видно из рис. 5а (мы взяли  $m = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ ), при относительно малых значениях  $m$  мы имеем монотонно убывающую зависимость угла разлета  $\gamma$  от угла конуса  $\beta$  во всем допустимом диапазоне  $0 < \beta \leq \beta_T$ . Кроме того при  $\beta = 30^\circ$  на оси абсцисс  $\gamma = 0$  имеется отдельное решение в виде изолированной точки. В нее вырождается рассмотренное нами ранее – см. рис. 4 – куполообразное решение. С увеличением  $m$  зависимость перестает быть монотонной; на кривой появляется минимум. В точке  $m = 1$  (тройная точка на карте режимов – см. рис. 2) этот минимум превращается в клюв, который касается оси абсцисс при  $\beta = 30^\circ$  (указанная выше изолированная точка). Далее с ростом  $m$  клюв преобразуется в угол. Из рисунка 5б видно, что доля свободного поверхностного заряда минимальна при полуугле конуса в  $30^\circ$ , причем в этом минимуме величина  $w$  снижается с ростом  $m$ , достигая нуля при значениях  $m \geq 1$ . Как показывает рис. 5с, это сопровождается появлением локального минимума в угловой зависимости тока, причем ток обращается в нуль при  $\beta = 30^\circ$  для  $m \geq 1$ . Это связано с тем, что, с одной стороны, в этом случае отсутствуют свободные поверхностные заряды,  $\sigma = 0$ , и, с другой стороны, в нуль обращается угловой размер области спрея.

4.4. Ограничения на применимость модели. Основное ограничение связано с наличием факторов, приводящих к нарушению тейлоровского скейлинга. Так, если принять во внимание радиальный поток жидкости в области 3 с расходом  $Q$ , то в балансе давлений (8) появятся дополнительные слагаемые, ответственные за динамическое давление  $\rho u^2 \propto R^{-4}$  и вязкое напряжение  $\eta u R^{-1} \propto R^{-3}$ , где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\eta$  – ее динамическая вязкость,  $u \propto QR^{-2}$  – скорость. Эти величины нарастают при приближении к вершине конуса быстрее капиллярного и электростатического давлений  $p_s \propto p_E \propto R^{-1}$ , что приводит на масштабе, меньшем  $(\rho Q^2/\alpha)^{1/3}$  [21] или  $(\eta Q/\alpha)^{1/2}$  [23] к отклонению формы поверхности от конической – формированию микроструй.

Далее, при формулировке математической модели (1)–(9) мы не стали рассматривать вихревое тече-

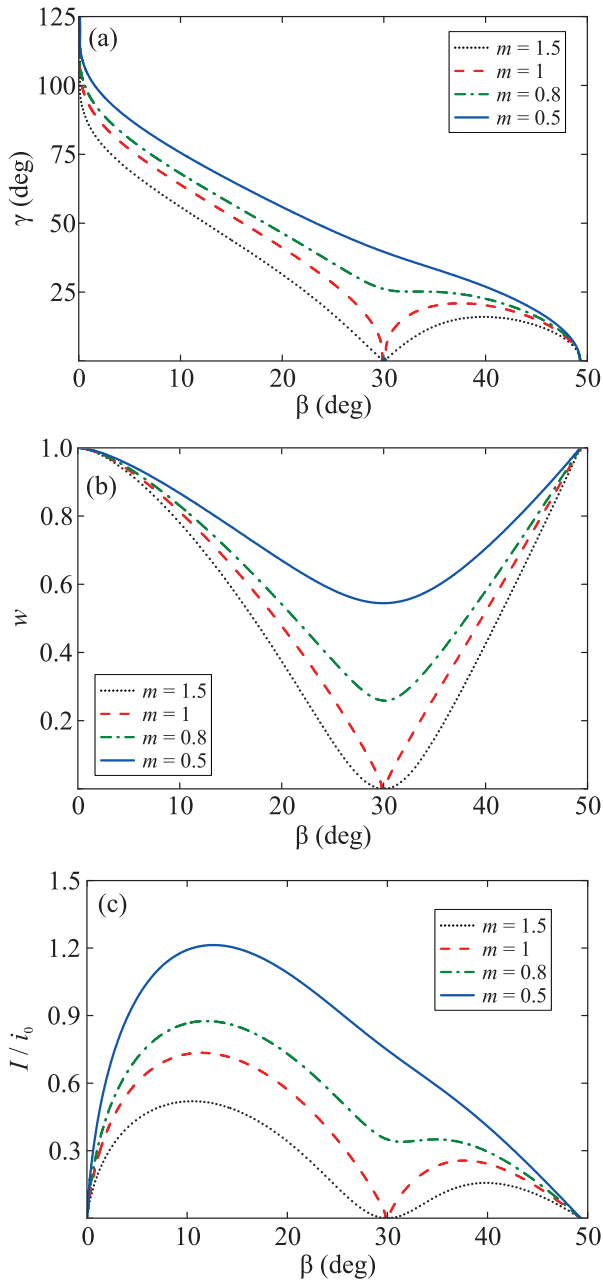


Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимости от угла  $\beta$  жидкого конуса: (а) – угла разлета капель  $\gamma$ , (б) – доли свободного поверхностного заряда  $w$  и (с) – нормированного на  $i_0$  электрического тока  $I$  при  $\varepsilon = \varepsilon_c \approx 17.6$  и  $m = 0.5, 0.8, 1, 1.5$  (граница области I и областей II, III)

ние в объеме жидкого конуса, возникающее за счет касательных электростатических сил на его границе. Согласно анализу [22, 23] характерная скорость течения оценивается как  $u \propto I/(\mu_s \eta)$  (здесь и ниже опущены коэффициенты, зависящие от угла  $\beta$ ), а тогда вязкое напряжение, которое следует учитывать в балансе давлений (8), не нарушает тейлоровско-

го скейлинга:  $\eta u R^{-1} \propto (I/\mu_s) R^{-1}$ . Соответствующая поправка в (8) будет мала и ей можно пренебречь при выполнении условия  $I \ll \mu_s \alpha$ . Важно, что при составлении карты режимов (рис. 2) и определении зависимостей угла разлета капель  $\gamma$  и доли свободного поверхностного заряда  $w$  от угла жидкого конуса  $\beta$  (рис. 3–5а, б) условие баланса давлений в упрощенном виде (8) напрямую не использовалось: принимался во внимание лишь следующий из него скейлинг  $\Phi \propto R^{1/2}$ . Как следствие, соответствующие зависимости останутся неизменными при учете вихревого движения жидкости. Поправка к (8) при невыполнении условия  $I \ll \mu_s \alpha$  приведет лишь к некоторой, не меняющей общую картину, деформации верхних частей угловых зависимостей тока (рис. 3–5с).

**5. Заключение.** В работе было исследовано коническое образование на свободной поверхности жидкости с поверхностной ионной проводимостью, вершина которого испускает в окружающий газ поток заряженных капель. Удалось найти точное аналитическое решение для распределения электрического поля вблизи вершины острия, а также для движения в этом поле заряженных частиц – ионов и капель. Полученное решение позволило определить зависимости между ключевыми параметрами задачи – углами жидкого конуса  $\beta$  и разлета капель  $\gamma$ , электрическим током  $I$ , долей свободного поверхностного заряда  $w$  при различных значениях диэлектрической проницаемости жидкости  $\varepsilon$  и отношения подвижностей носителей заряда, капель и ионов,  $m$ . Как видно из рис. 3–5, решения имеют весьма сложную, с различными сосуществующими ветвями, форму, которая качественно отличается в различных областях параметрической плоскости  $\{m, \varepsilon\}$  – см. карту возможных режимов на рис. 2. Полученные нами многопараметрические решения в частных и предельных случаях переходят в решения Тейлора [18] ( $\gamma = 0$  и  $w = 1$ ), Де Ла Мора [21] ( $m \rightarrow 0$ ), Рамоса и Кастельяноса [20] ( $\gamma = 0$  и  $w = 0$ ), Субботина и Семенова [22, 23] ( $m \rightarrow \infty$ ). Наши решения, соответственно, можно рассматривать как их обобщение.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 23-71-10012, <https://rscf.ru/project/23-71-10012/>.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

1. L. Tonks, *Phys. Rev.* **48**, 562 (1935).
2. Я. И. Френкель, *ЖЭТФ* **6**(4), 348 (1936).
3. J.R. Melcher, *Field-Coupled Surface Waves*, MIT, Cambridge (1963).

4. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, ДАН СССР **188**(6), 1261 (1969).
5. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
6. Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, ЖТФ **71**(7), 21 (2001).
7. А. И. Жакин, УФН **183**, 153 (2013).
8. L. M. Baskin, A. V. Batrakov, S. A. Popov, and D. I. Proskurovsky, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. **2**, 231 (1995).
9. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **73**(10), 613 (2001).
10. N. M. Zubarev, Phys. Rev. E **65**, 055301(R) (2002).
11. V. G. Suvorov and N. M. Zubarev, J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 289 (2004).
12. C. Zhou and S. M. Troian, Phys. Rev. Appl. **15**, 044001 (2021).
13. I. V. Uimanov, D. L. Shmelev, and S. A. Barenholts, Vacuum **220**, 112823 (2024).
14. М. Д. Габович, УФН **140**, 137 (1983).
15. W. Driesel, C. Dietzsch, and R. Mühle, J. Vac. Sci. Technol. B **14**, 3367 (1996).
16. R. G. Forbest, Vacuum **48**, 85 (1997).
17. S. Cândido and J. C. Páscoa, Phys. Fluids **35**, 052110 (2023).
18. G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London, Ser. A **280**, 383 (1964).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, ГИИТЛ, М. (1957).
20. A. Ramos and A. Castellanos, Phys. Lett. A **184**, 268 (1994).
21. J. F. De La Mora, J. Fluid Mech. **243**, 561 (1992).
22. А. В. Субботин, Письма в ЖЭТФ **100**, 741 (2014).
23. A. V. Subbotin and A. N. Semenov, Proc. R. Soc. A **471**, 20150290 (2015).
24. A. V. Subbotin and A. N. Semenov, JETP Lett. **107**, 186 (2018).
25. М. А. Беляев, N. M. Zubarev, and O. V. Zubareva, J. Electrostat. **107**, 103478 (2020).