Письма в ЖЭТФ, том 119, вып. 9, с. 707 – 711

Дзета-регуляризация в эффекте разделения киральностей

З. В. Хайдуков[1)]

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный Россия

Поступила в редакцию 21 марта 2024 г.
После переработки 8 апреля 2024 г.
Принята к публикации 9 апреля 2024 г.

Показано, что выражение для эффекта разделения киральностей может быть получено при помощи дзета-регуляризации, которая диктуется термодинамическим описанием системы.

DOI: 10.31857/S1234567824090118, EDN: AAJMZD

Введение. Предсказание существования семейства недиссипативных токов [1–7], возникающих во внешнем магнитном поле и в однородном поле вращения, вызвало значительный интерес в научном сообществе и привело к активным исследованиям в области недиссипативного транспорта [8, 9]. Эти явления получили общее название “киральных эффектов”. В данной работе мы в основном будем обсуждать киральный магнитный эффект [3] и эффект разделения киральностей [1, 2, 10]. Первый из них заключается в возникновении электрического тока j^V, направленного вдоль внешнего магнитного поля в присутствии кирального химического потенциала μ_A, второй – в возникновении аксиального тока j^A, направленного вдоль внешнего магнитного поля в присутствии обыкновенного химического потенциала μ_V. Оба эффекта в безмассовом случае могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{j}^{A,V} = \frac{1}{2\pi^2}\mu_{V,A}\mathbf{B}. \tag{1}$$

Долгое время вопрос о необходимости корректной регуляризации для описания “киральных эффектов” оставался без внимания. Это мотивировалось тем, что вычисление токов проводилось в инфракрасной области, эффекты в основном были связаны с процессами на поверхности Ферми, и казалось очевидным, что влиянием ультрафиолетовой физики в этом случае можно пренебречь. Ошибочность такой аргументации была впервые продемонстрирована в рамках вычисления кирального магнитного эффекта на решетке и объяснена с точки зрения регуляризации Паули–Вилларса [11]. Дальнейшие исследования позволили объяснить результат, полученный в [11] с точки зрения решеточной регуляризации [12], и построить технику [13, 14], которая связала недиссипативный транспорт с топологическими инвариантами в импульсном пространстве[15]. Однако, при применении этой техники к описанию эффекта разделения киральностей [14] в непрерывном пределе возникала неоднозначность, которая требовала введения регуляризации. В [14] вычисления были проделаны при помощи введения конечного шага решетки, что оставило открытым вопрос о непосредственном получении всех результатов в непрерывной теории.

Целью написания данной работы является описание регуляризации, которая помогает избежать вышеописанных проблем и позволяет применить все методы, полученные в рамках работ [12, 13] для описания киральных эффектов непосредственно в непрерывном пределе.

Необходимость регуляризации. Остановимся на проблемах, возникающих при описании эффекта разделения киральностей в непрерывной теории. В рамках построения формализма, который позволил бы связать выражение для аксиального тока с топологическими инвариантами в импульсном пространстве [14], было получено выражение для аксиального тока во внешнем калибровочном поле:

$$j_k^5 = -\frac{i}{2}T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}Tr(\gamma^5\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\partial_{p_i}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}) \\ \partial_{p_j}\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})\partial_{p_k}\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}))F_{ij}. \tag{2}$$

В этой формуле $\mathcal{G}(\omega_n,\mathbf{p})$ – функция Грина в пространстве Евклида, которая вычисляется из функционального интеграла в соответствующей теории, $\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p})$ – обратная функция Грина, γ^μ – гамма матрицы Дирака. Подставим в это выражение пропагатор безмассовых невзаимодействующих фермионов:

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n,\mathbf{p}) = -i\gamma^\mu p_\mu, p_\mu = (\mathbf{p},\omega_n), \omega_n = 2\pi T\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

1)e-mail: khaidukov.zv@phystech.edu

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z (т.е. $F_{12} = -B_z$), тогда выражение для аксиального тока принимает вид:

$$j_z^5 = -4Ti \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_n}{((\omega_n)^2 + p^2)^2} B_z; \quad (4)$$

и после интегрирования по импульсам получаем:

$$j_z^5 = -\frac{Ti}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\omega_n) B_z. \quad (5)$$

Таким образом, формально, в случае безмассовых фермионов в отсутствии среды аксиальный ток равен сумме бесконечного числа единиц и минус единиц. Если в результате взаимодействия в среде $\mathcal{G}(\omega, \mathbf{p})$ изменится как $\omega_n \to f(\omega_n), p_i \to g(p_i)$, то из формулы (2) следует, что результат будет зависеть от $\mathrm{sgn}\, f(\omega_n)$.

При учете химического потенциала происходит замена $\omega_n \to \omega_n - i\mu$, и мы сталкиваемся с необходимостью аналитического продолжения функции знака на комплексную плоскость для получения выражения для тока. Эта проблема может быть решена при помощи введения решеточной регуляризации [14, 16], но в следующей части мы опишем метод, позволяющий получить все результаты непосредственно в непрерывной теории. Мы покажем, что окончательный ответ для тока будет совпадать с выражением, которое получается при первоначальном суммировании мацубаровских частот и последующем интегрировании по импульсам (1). Это означает, что формализм, развитый в работах [12–14, 16], может быть применим непосредственно для описания непрерывных теорий без необходимости введения решеточной регуляризации.

Использование дзета-функции. В случае отсутствия комплексных величин мы можем переписать функцию знак в (5) в виде:

$$\mathrm{sgn}(\omega_n) = \lim_{\alpha \to -0} A\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-\alpha}\right);$$

$$A = (2\pi T)^{-\alpha}; \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-\alpha} = \zeta_H(\alpha, 1/2), \quad (7)$$

в этом выражении $\zeta_H(\alpha, 1/2)$ означает дзета-функцию Гурвица [17], взятую в точке $(\alpha, 1/2)$. Подобная регуляризация сводит вычисление коэффициента в выражении для эффекта разделения киральностей к вычислению значения дзета-функции Гурвица или ее аналитического продолжения в точке $(-0, 1/2)$. Первое предсказание в рамках такой регуляризации – отсутствие аксиального тока в отсутствии химического потенциала[2)] с комплексным аргументом. Введем:

$$\zeta_H(\alpha, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2} - i\frac{\mu}{2\pi T})^{-\alpha}; \quad (8)$$

$$\zeta_H(\alpha, \bar{\eta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2} + i\frac{\mu}{2\pi T})^{-\alpha}; \quad (9)$$

$$\eta = \frac{1}{2} - i\frac{\mu}{2\pi T}, \quad (10)$$

с учетом этого выражение для аксиального тока можно переписать в виде:

$$j_z^5 = -\frac{Ti}{2\pi} \lim_{\alpha \to -0} (2\pi T)^{-\alpha} (\zeta_H(\alpha, \eta) - \zeta_H(\alpha, \bar{\eta})) B_z. \quad (11)$$

Воспользуемся стандартной формулой для значения дзета-функции Гурвица в нуле:

$$\zeta_H(-0, \eta) = \frac{1}{2} - \eta, \quad (12)$$

Для аксиального тока мы получаем:

$$j_z^5 = \frac{\mu}{2\pi^2} B_z; \quad (13)$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{j}^5 = \frac{\mu}{2\pi^2} \mathbf{B}. \quad (14)$$

Это выражение полностью совпадает с тем, которое получается при первоначальном суммировании мацубаровских частот и последующем интегрировании по импульсу (1). Подчеркнем, что в хорошо регуляризованных теориях суммирования и интегрирования должны быть перестановочны.

В верности предложенной нами регуляризации и формулы (11) можно убедиться еще из следующей аргументации: в работе [16] было предложено обобщение техники для поиска топологических инвариантов в импульсном пространстве в решеточной регуляризации на неоднородные среды [16], и получена формула для плотности аксиального тока в рамках теории линейного отклика, которая в случае обобщения на непрерывную теорию,[3)] может быть записана как:

$$j_k^5(x) = -\frac{i}{2} \sum_n T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} tr(\gamma^5 I F_{ij}) \quad (15)$$

[2)]Мы также можем переписать (5) при помощи дзета-функции Римана, в этом нет ничего удивительного, так как $\zeta_H(\alpha, \beta)$ переходит в дзета-функцию Римана [18] при $\beta = 1$. В случае присутствия химического потенциала нам необходимо использовать дзета-функцию Гурвица [17]

[3)]Это может быть сделано по аналогии с [19].

$$I=(G_W^0\star(\partial_{p_i}Q_W^0)\star G_W^0\star(\partial_{p_j}Q_W^0)\star G_W^0)\partial_{p_k}Q_W^0. \quad (16)$$

Здесь G_W^0 - символ Вейля функции Грина, которая может описывать неоднородные системы, индекс "0" подчеркивает, что она вычисляется в невозмущенной по внешнему полю теории [16], под знаком "$\star$" подразумевается оператор $\exp(\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_x\overrightarrow{\partial}_p-\overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_x)$, где стрелки обозначают направления действия соответствующих производных, а $Q_W\star G_W=1$. Теперь найдем дивергенцию аксиального тока вдоль оси z, предполагая слабую неоднородность химического потенциала ($l^2\partial_i\mu(\mathbf{x})\ll 1$, здесь l – характерный масштаб системы). В этом случае в первом приближении можно опустить символ „$\star$" в (16), тогда выражение для плотности аксиального тока в непрерывной теории можно записать:

$$j_z^5(\mathbf{x})=-4iT\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_n-i\mu(\mathbf{x})}{((\omega_n-i\mu(\mathbf{x}))^2+p^2)^2}B_z.$$

Проведем интегрирование по импульсам и получим:

$$j^{5z}(\mathbf{x})=-\frac{Ti}{2\pi}\lim_{\alpha\to-0}A(\zeta_H(\alpha,\eta(\mathbf{x}))-\zeta_H(\alpha,\bar\eta(\mathbf{x})))B^z.$$

В этом случае выражения для химического потенциала в (10) становятся зависящими от пространственных координат, коэффициент A задается формулой (6). Тогда выражение для дивергенции принимает вид:

$$\partial_z j^{5z}=\frac{Ti}{2\pi}\lim_{\alpha\to-0}\alpha AW_zB^z; \quad (17)$$

$$W_z=\zeta_H(\alpha+1,\eta(\mathbf{x}))\partial_z\eta(\mathbf{x})-\zeta_H(\alpha+1,\bar\eta(\mathbf{x}))\partial_z\bar\eta(\ \mathbf{x});$$

$$\partial_z\eta=-\frac{i}{2\pi T}\partial_z\mu(\mathbf{x})\equiv\frac{i}{2\pi T}E_z(\mathbf{x}), \quad (18)$$

теперь нам необходимо воспользоваться формулой:

$$\lim_{\alpha\to 0}(\zeta_H(\alpha+1,\eta)-\frac{1}{\alpha})=-\psi(\eta), \quad (19)$$

здесь $\psi(\eta)$ – дигамма-функция, которая при данном наборе параметров регулярна, что приводит к:

$$\partial_\mu j^{5\mu}\equiv\partial_z j^{5z}=\frac{iT}{2\pi}\lim_{\alpha\to-0}\frac{iA}{\pi T}E_zB^z\alpha(\frac{1}{\alpha}+...), \quad (20)$$

где три точки обозначают регулярную часть. Значит, из выражения для эффекта разделения киральностей мы получили выражение для аксиальной аномалии, которое в векторном виде мы можем переписать как:

$$\partial_\mu j^{5\mu}=-\frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}. \quad (21)$$

Дзета-регуляризация и термодинамика.[4)] Может сложиться впечатление, что мы просто удачно "угадали" способ регуляризации в (11), однако, как мы сейчас покажем, этот способ диктуется термодинамическим описанием системы [18]. Вычисление статсуммы подразумевает нахождение дзета-функции для детерминанта оператора, входящего в нее. Для большей наглядности проделаем все вычисления для безмассовых фермионов, запишем:

$$Z=\tilde C\det(D), D=\prod_{\{P\}}(\det(P^2\cdot\mathbf{1}_{4\times4}))^{1/2}. \quad (22)$$

Здесь под P подразумевается квантовые числа всех возможных состояний, в которых могут находиться фермионы. Этот детерминант мы можем переписать в виде:

$$Z=\tilde C\prod_{\{P\}}(P^2)^2, \quad (23)$$

для нас самое важное, что такая форма (22) диктует способ введения дзета-регуляризации.

Пусть λ_n - собственное значение оператора D, тогда введем дзета-функцию согласно

$$\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n)^{-s}. \quad (24)$$

В нашем случае

$$\lambda_n=((2\pi T(n+1/2)+i\mu)^2+k^2). \quad (25)$$

Запись выражения (24) носит символический характер, поскольку мы должны учесть плотность числа собственных значений, последняя в непрерывной теории задается в виде:

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k, \quad (26)$$

с учетом вышеописанного, для вычисления $\det D$ нам необходимо найти

$$\det D=\exp\left(+2\frac{d\zeta}{ds}|_{s=0}\right), \quad (27)$$

учет константы $\tilde C$ в (23) приводит к

$$\ln Z=2\frac{d\zeta}{ds}|_{s=0}+\tilde C\zeta(0). \quad (28)$$

4) Само собой использование дзета-функции Гурвица не является чем-то новым с точки зрения описание термодинамики фермионных систем [20], но автора будет интересовать иллюстрация взаимосвязи между статсуммой и дзета-функцией детерминанта оператора в смысле, рассмотренном Хокингом [18].

Теперь мы можем приступить к вычислению дзета-функции для оператора (начнем со случая отсутствия химического потенциала):

$$\zeta(s) = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk (\sum_{n=0}^{\infty} ((2\pi(n+1/2))^2 + k^2)^{-s}. \quad (29)$$

Интегрируем по частям и получаем:

$$\zeta(s) = -\frac{8\pi V}{(2\pi)^3} (2\pi T)^{3-2s} \zeta_H(2s-3, 1/2) \times \\ \times (4-4s)^{-1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s-1)}. \quad (30)$$

При s, стремящемся к нулю, у гамма-функции Эйлера присутствует полюс, а это значит, что в (29) $\zeta(0) = 0$, но при этом

$$\zeta'(0) = -T^3 \frac{8\pi^2}{3} \zeta_H(-3, 1/2). \quad (31)$$

Для дзета-функции Гурвица мы можем использовать ее связь с полиномами Бернулли:

$$\zeta_H(-3, 1/2) = -\frac{B_4(1/2)}{4} = -\frac{7}{960}, \quad (32)$$

где $B_4(x)$ – четвертый многочлен Бернулли:

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \quad (33)$$

Собирая все вместе, получаем:

$$\ln Z/V = \frac{7\pi^2}{180} T^3. \quad (34)$$

Для того чтобы получить результат в случае присутствия химического потенциала, необходимо проделать такие же вычисления, но с учетом того, что

$$2\sum_{n=0}^{\infty} ((2\pi T(n+1/2))^2 + k^2)^{-s} \to I_1 + \bar{I}_1; \quad (35)$$

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} ((2\pi T(n+1/2) - i\mu)^2 + k^2)^{-s}; \quad (36)$$

$$\bar{I}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} ((2\pi T(n+1/2) + i\mu)^2 + k^2)^{-s}. \quad (37)$$

В результате получаем:

$$\zeta'(0) = -T^3 \frac{8\pi^2}{6} (\zeta_H(-3, \eta) + \zeta_H(-3, \bar{\eta})), \quad (38)$$

что в итоге дает:

$$\ln \det D = \ln(Z)/V = \frac{7\pi^2}{180} T^3 + \frac{\mu^4}{12T\pi^2} + \frac{\mu^2 T}{6}. \quad (39)$$

Именно вычисление дзета-функции для детерминанта оператора D позволяет нам ввести корректную регуляризацию для выражения (11). Более того, из этого рассмотрения следует, что при работе с эффективными теориями можно со значительной уверенностью не вводить регуляторы для вычислений киральных эффектов в том случае, если возможно вычислить статсумму или, что то же самое, построить термодинамическое описание системы.

Заключение. Мы исследовали возможность использования дзета-регуляризации для вычисления аксиального тока в эффекте разделения киральностей. Было показано, что расходимость в выражении для аксиального тока может быть регуляризована с использованием дзета-функции Гурвица. В верности этой регуляризации и формулы (11) можно убедиться с помощью вычисления выражения для аксиальной аномалии, которая связана с вычетом в полюсе дзета-функции. Было показано, что такая регуляризация позволяет также получить полное термодинамическое описание системы и не требует какихлибо дополнительных предположений. Эти утверждения в безмассовом случае, в принципе, сводят вопрос о существовании киральных эффектов к вопросу о правильном нахождении термодинамического равновесия системы, поскольку позволяют правильно вычислить выражение для детерминанта оператора, входящего в выражение для статсуммы. Если последнее найдено корректно, то можно опустить введение регуляризации в выражение для токов, наподобие того, как мы опускаем введение ультрафиолетовой регуляризации при вычислении в рамках термальной теории поля.

Из всего вышеописанного следует, что формализм, рассмотренный в работах [12–14], без ограничений можно применять в случае непрерывной теории. В частности, можно будет легко обобщить результаты, полученные в рамках решеточной регуляризации, и показать отсутствие равновесного кирального магнитного эффекта как в непрерывной четырехмерной теории, так и его аналога в двух измерениях.[5)] В безмассовом случае этот результат особенно интересен из-за противоречия между работами [6] и [11], в первой – рассматривается система с точной киральной симметрией, которая описывает экспериментальные наблюдения в тонких проволочках, в то время, как во второй – все результаты получены при помо-

[5)] Для кирального магнитного эффекта требуется более строгий анализ ультрафиолетовых расходимостей в случае присутствия или отсутствия массового члена при термодинамическом описании системы [22].

щи решеточного моделирования, что приводит либо к отсутствию точной киральной симметрии, либо к проблеме дублеров [21]. Из рассмотренной в работе взаимосвязи между регуляризацией выражения для кирального эффекта и вычисления детерминанта оператора, который входит в статсумму, можно сделать предположение, что в случае рассмотрения системы с киральным химическим потенциалом первым существенным признаком отсутствия эффекта является невозможность построения обыкновенной термодинамики в следствии расходимостей. В случае аналога кирального магнитного эффекта в двух измерениях подобное рассмотрение действительно приводит к проблемам с построением термодинамики в регуляризации Паули–Вилларса [22].

Одним из существенных следствий рассмотренного нами метода является возможность изучения взаимосвязи между киральными эффектами и аномалиями, так как последние очень просто вычисляются в теориях с дзета-регуляризацией.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" # 22-1-3-59-1.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии потенциального конфликта интересов, требующего раскрытия в данной статье.

1. M.A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2006).
2. M. Puhr and P. V. Buividovich, Phys. Rev. Lett. **118**(19), 192003 (2017); arXiv: 1611.07263 [hep-lat].
3. K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
4. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **21**, 2260 (1980).
5. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **20**, 1807 (1979).
6. A. Alekseev, V. Cheianov, and J. Froehlich, Phys. Rev. Lett. **81**, 3503 (1998); arXiv:cond-mat/9803346.
7. K. Landsteiner, E. Megias, and F. Pena-Benitez, Lect. Notes Phys. **871**, 433 (2013); arXiv:1207.5808 [hep-th].
8. M.,N. Chernodub, A. Cortijo, A. G. Grushin, K. Landsteiner, and M. A. Vozmediano, Phys. Rev. B **89**, 081407(R) (2014); arXiv:1311.0878.
9. V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rept. **576**, 1 (2015); arXiv:1503.00732 [hep-ph].
10. Z. V. Khaidukov, JETP Lett. **117**, 721 (2023).
11. P. V. Buividovich, Nucl. Phys. A **925**, 218 (2014); arxiv:1312.1843 [hep-lat].
12. M. A. Zubkov Phys. Rev. D **93**(10), 105036 (2016); arXiv:1605.08724 [hep-ph].
13. M. A. Zubkov, Ann. Phys. **373**, 298 (2016); arXiv:1603.03665 [cond-mat.mes-hall].
14. Z. V. Khaidukov and M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **95**, 074502 (2017); arXiv: 1701.03368.
15. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
16. M. Suleymanov and M.A. Zubkov, Phys. Rev. D **102**, 076019 (2020).
17. T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory, Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, N.Y., Heidelberg (1976).
18. S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
19. J. Varynen, The gradient expansion and topological insulators (2011); https://helka.helsinki.fi/permalink/358UOH$_I$NST/11k3puc/alma9922688853506253.
20. M. Laine and A. Vuorinen, Lect. Notes Phys. **925**, 1 (2016).
21. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B. **105**(2–3), 219 (2016).
22. Z. V. Khaidukov, JETP Lett. **116**, 754 (2022); DOI 10.1134/S0021364022602366.