

# Исключительные точки в тримерах диэлектрических цилиндров

А. А. Дмитриев<sup>+1)</sup>, К. В. Барышникова<sup>+</sup>, М. В. Рыбин<sup>+\*</sup>

<sup>+</sup> Физико-технический мегафакультет, университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

<sup>\*</sup> Физико-технический институт им. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 2024 г.

После переработки 3 апреля 2024 г.

Принята к публикации 3 апреля 2024 г.

При помощи теории многоволнового рассеяния исследованы собственные моды в тримере из бесконечных цилиндров в форме равностороннего и равнобедренных треугольников. Получены уравнения на собственные частоты исключительных точек, в которых происходит вырождение собственных частот и собственных векторов. Симметрия равнобедренного треугольника обуславливает отделение мод, антисимметричных вдоль направления основания. В случае, когда треугольник равносторонний, моды распадаются на симметричные и дважды вырожденные вращательные моды. Обнаружено, что затухающие симметричные моды в тримере имеют большую добротность по сравнению с димером, что имеет значение для практических применений эффектов на основе исключительных точек. Также было исследовано поведение комплексных собственных частот в тримере в форме равнобедренного треугольника в зависимости от соотношения длин основания и боковой стороны. В точке, соответствующей равностороннему треугольнику, добротность симметричных мод имеет локальный максимум, а антисимметричных – локальный минимум.

DOI: 10.31857/S1234567824090131, EDN: BQHIGN

В последнее время, оптика систем с усилением и потерями стала одним из приоритетных направлений в нанофотонике [1–4]. Собственные частоты таких систем описываются неэрмитовыми гамильтонианами, а собственные моды не являются в общем случае ортогональными. В предельном случае, который достигается в так называемых исключительных точках (EP), гамильтониан не может быть диагонализирован (соответствующая матрица становится дефектной), что проявляется в вырождении собственных частот, а собственные векторы при этом становятся параллельными. Такое вырождение приводит к множеству оптических эффектов, таких как однонаправленная передача света без отражения [5, 6], нарушение взаимности [7] и расщепление собственных частот по корневому закону при снятии вырождения [8].

В фотонике исключительные точки обычно изучаются в контексте систем с симметрией четность–время (PT). В этом случае они соответствуют условиям перехода к режиму разрушения симметрии, в котором вместо двух вещественных частот появляются две комплексно сопряженные. Однако наличие в системе симметрии четность–время вовсе не является обязательным условием существования исключительных точек. Среди них – плазмон-

ные волноводы на основе структур диэлектрик–металл–диэлектрик [9], периодические массивы цилиндров [10], квадрумер из кремниевых дисков [11], асимметричный димер диэлектрических цилиндров без потерь [12], а также отдельные частицы в форме гантели [13], сфероида [14] и конуса [15].

Помимо этого, было обнаружено возникновение исключительных точек в симметричных димерах диэлектрических бесконечных цилиндров [16] и сфер [17] одинакового радиуса, выполненных из одного и того же материала без потерь. Установлено, что появление этих исключительных точек связано с наличием зависимости коэффициента связи между частицами от частоты [17].

Цель настоящего исследования состоит в исследовании возможности увеличения добротности мод исключительных точек за счет понижения симметрии, что имеет важное прикладное значение. В качестве объекта с более низкой, чем у димера, симметрией, рассматривается тример в форме равнобедренного треугольника, и, в частности, в форме равностороннего треугольника.

Объект исследования представляет собой двумерную систему из бесконечных цилиндров, центры которых находятся в вершинах равнобедренного треугольника с длиной основания  $d_1$  и боковой стороны –  $d_2$  (см. рис. 1). Радиус цилиндров  $R < (d_1, d_2)$ .

<sup>1)</sup>e-mail: alexey.dmitriev@metalab.ifmo.ru

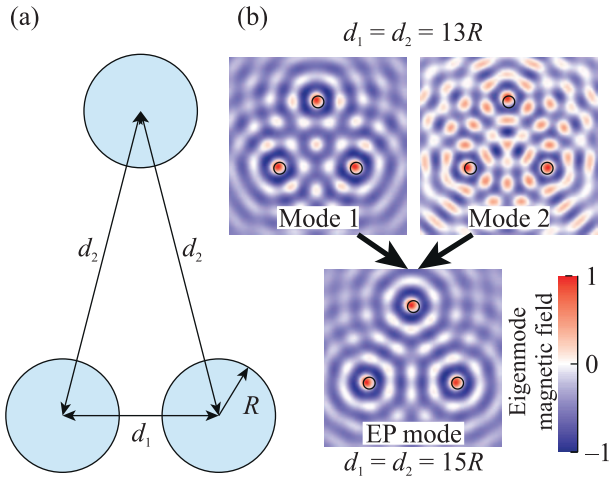


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Эскиз исследуемой системы – тримера бесконечных диэлектрических цилиндров в форме равнобедренного треугольника с основанием длиной  $d_1$  и боковыми сторонами длиной  $d_2$ . Все три цилиндра имеют одинаковый радиус и выполнены из диэлектрика с одинаковым показателем преломления. (б) – Иллюстрация вырождения распределения магнитного поля двух симметричных собственных мод тримеров бесконечных цилиндров с показателем преломления  $n = 1.7 + 0.007i$  в форме равностороннего треугольника в исключительной точке (EP), которая образуется при  $d_1 = d_2 = 15R$

Ось  $z$  выбрана вдоль осей цилиндров. В двумерной задаче решение распадается на ТЕ и ТМ поляризации, которые могут быть исследованы независимо. В данной работе будет рассматриваться ТЕ поляризация, в которой вектор магнитного поля  $\mathbf{H} = [0, 0, \psi]^T$  параллелен оси цилиндров; при этом для ТМ поляризации физическая картина не отличается, и детальное изложение этого случая оказывается излишним.

На основе теории многоволнового рассеяния [18–28] может быть записана система уравнений связанных диполей для системы из трех цилиндров [17, 29]

$$\begin{aligned}
 (\hat{E} - a_0 \hat{L}) \mathbf{p} &= a_0 \mathbf{p}_{\text{exc}}, \\
 \hat{L} &= \begin{bmatrix} 0 & \Xi(\frac{\omega}{c} d_1) & \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) \\ \Xi(\frac{\omega}{c} d_1) & 0 & \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) \\ \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) & \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $\hat{E}$  – единичная матрица,  $a_0$  – дипольный коэффициент Лоренца–Ми для цилиндра,  $\omega$  – частота,  $c$  – скорость света,  $\mathbf{p}$  – вектор дипольных амплитуд цилиндров,  $\mathbf{p}_{\text{exc}}$  – вектор возбуждения, а  $\Xi(x) = H_0^{(1)}(x)$  – коэффициент связи дипольных мод ци-

линдров (функция Ханкеля; предполагается частотная зависимость  $e^{-i\omega t}$ ).

Аппроксимируя коэффициент Лоренца–Ми вблизи резонанса простым полюсом  $a_0 \simeq i\Gamma/(\omega - \omega_0)$ , где  $\omega_0$  – полюс рассеяния, а  $\Gamma = -i \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} a_0(\omega - \omega_0)$  – сила осциллятора, можно привести уравнение на собственные моды к виду  $(\hat{\mathcal{H}} - \omega \hat{E}) \mathbf{p} = 0$  [29], где эффективный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_1) & \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) \\ \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_1) & \omega_0 & \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) \\ \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) & \Gamma \Xi(\frac{\omega}{c} d_2) & \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Данный гамильтониан зависит от собственной частоты  $\omega$ , таким образом, задача о поиске его собственных чисел записывается в обобщенном виде поиска нулей функции  $f(\omega) = \det(\hat{\mathcal{H}} - \omega \hat{E})$ . Из-за симметрии равнобедренного треугольника,  $f(\omega)$  может быть представлена в факторизованном виде

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= \left[ \omega_0 - \omega - \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) \right] \times \\
 &\times \left[ (\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) (\omega_0 - \omega) - 2\Gamma^2 \Xi^2\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнения на частоту исключительной точки  $\omega_{\text{EP}}$ , проследуем процедуре, описанной подробно в [16]. Разложим  $f(\omega)$  в ряд Тейлора вокруг  $\omega_{\text{EP}}$ . При равенстве нулю первых двух коэффициентов разложения корень имеет кратность не менее 2 и оказывается кандидатом на исключительную точку. Было показано [17], что такие двукратные корни действительно являются исключительными точками. Таким образом, уравнения на частоту исключительной точки получаются из условий  $f(\omega_{\text{EP}}) = 0$  и  $f'(\omega_{\text{EP}}) = 0$ .

Важным обстоятельством является то, что в случае, когда функция  $f(\omega)$  факторизуется, описанную процедуру можно выполнять для каждого сомножителя в отдельности. Для первого сомножителя в квадратных скобках, который соответствует собственным модам, антисимметричным относительно высоты, опущенной на основание треугольника (далее для краткости будем говорить “антисимметричным по направлению основания”), получаются таким образом следующие уравнения на частоту исключительной точки и соответствующий полюс рассеяния одного цилиндра:

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_{\text{EP}} + \Gamma \Xi\left(\frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c}\right), \\ \frac{\Gamma d_1}{c} \Xi'\left(\frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c}\right) = -1. \end{cases} \quad (4)$$

Коэффициент связи между частицами содержит осциллирующую функцию  $\Xi(x)$ , следовательно, он является осциллирующей функцией частоты. Из этого следует наличие у системы (4) бесконечного числа решений [17]. Так, тример имеет бесконечное число антисимметричных дипольных мод с различным числом нулей поля на основании треугольника. Вырождение распределений поля двух таких мод и соответствует исключительной точке.

Стоит отдельно выделить тот факт, что уравнения (4) совпадают с таковыми для исключительных точек, образованных при совпадении двух антисимметричных мод в димерах диэлектрических частиц [17, 30]. Действительно, поле данных мод является нулевым на линии, на которой находится третий цилиндр (вершина), следовательно взаимодействие с этим цилиндром отсутствует, и эффективно в данной моде участвует лишь основание треугольника, то есть димер.

Для второго сомножителя получаются следующие уравнения на частоту исключительной точки:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma^2 d_1^2}{c^2} \left[ \Xi \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) + \right. \\ & \left. + 8 \frac{d_2}{d_1} \Xi \left( \frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \right]^2 - \\ & - \left( \frac{\Gamma d_1}{c} \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) - 2 \right)^2 \times \\ & \times \left[ \Xi^2 \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) + 8 \frac{d_2}{d_1} \Xi^2 \left( \frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \right] = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \omega_{EP} + \Gamma \frac{4 \frac{\Gamma d_2}{c} \Xi \left( \frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) + \Xi \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right)}{\frac{\Gamma}{c} d_1 \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) - 2}. \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно случай равностороннего треугольника ( $d_1 = d_2 = d$ ). В этом случае, уравнение (3) может быть факторизовано иным способом:

$$f(\omega) = [\omega_0 - \omega + 2\Gamma\Xi(\frac{\omega d}{c})][\omega_0 - \omega - \Gamma\Xi(\frac{\omega d}{c})]^2. \quad (7)$$

Таким образом, исключительная точка, описываемая уравнениями (4) и соответствующая антисимметричной собственной моде, оказывается вырождена дважды. Действительно, из теории групп следует наличие в системе с симметрией  $C_3$  двух вырожденных мод “вращения по и против часовой стрелки”, которые также могут быть представлены в неортогональном базисе из антисимметричных по двум ребрам мод, и симметричной моде, которой в данном случае соответствует первый сомножитель в квад-

ратных скобках. Уравнения на исключительную точку для него

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_{EP} - 2\Gamma\Xi \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right), \\ 2 \frac{\Gamma d_1}{c} \Xi' \left( \frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Рассматривая случай ( $d_1 = d_2$ ) в уравнениях (5) и (6) нетрудно также прийти к уравнениям (4) и (8). На рисунке 1b показано распределение поля симметричной моды в исключительной точке, которая образуется на частоте  $\omega_{EP} = (1.728 + 0.066i)c/R$  при  $d_1 = d_2 = 15R$ . Для сравнения показаны две симметричные собственные моды тримера с  $d_1 = d_2 = 13R$ , которые в исключительной точке оказываются вырождены.

На рисунке 2 показаны собственные частоты димера с расстоянием  $d = 15R$  между центрами цилиндров и тримера в форме равностороннего треугольника со стороной  $d_1 = d_2 = 15R$ . Комплекс-

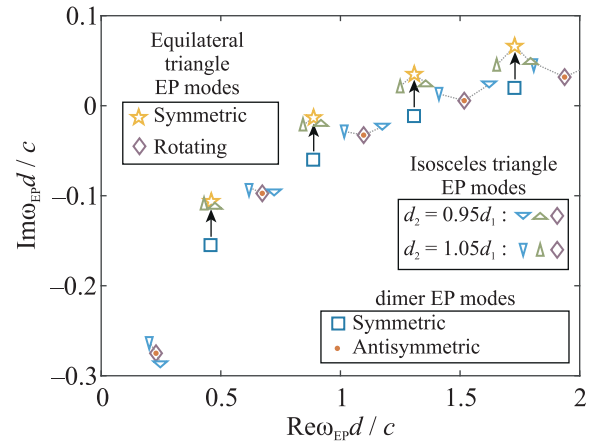


Рис. 2. (Цветной онлайн) Комплексные собственные частоты димера и тримера в виде равностороннего ( $d_1 = d_2 = d$ ) и равнобедренных треугольников из бесконечных диэлектрических цилиндров, соответствующие исключительным точкам. Маркеры различной формы соответствуют модам: симметричной в димере (квадрат), антисимметричной в димере (точка), симметричной в тримере в форме равностороннего треугольника (звезда) и вращательным в тримере (ромб); маркеры в форме остроугольных треугольников, направленных вверх и вниз, показывают собственные частоты тримера в форме равнобедренного треугольника с  $d_2 = 1.05d_1$ , а тупоугольных – с  $d_2 = 0.95d_1$ . Стрелки показывают увеличение добротности при переходе от симметричных мод димера к тримеру. TE поляризация,  $d = 15R$

ные собственные частоты вращательных мод тримера совпадают с частотами антисимметричных мод

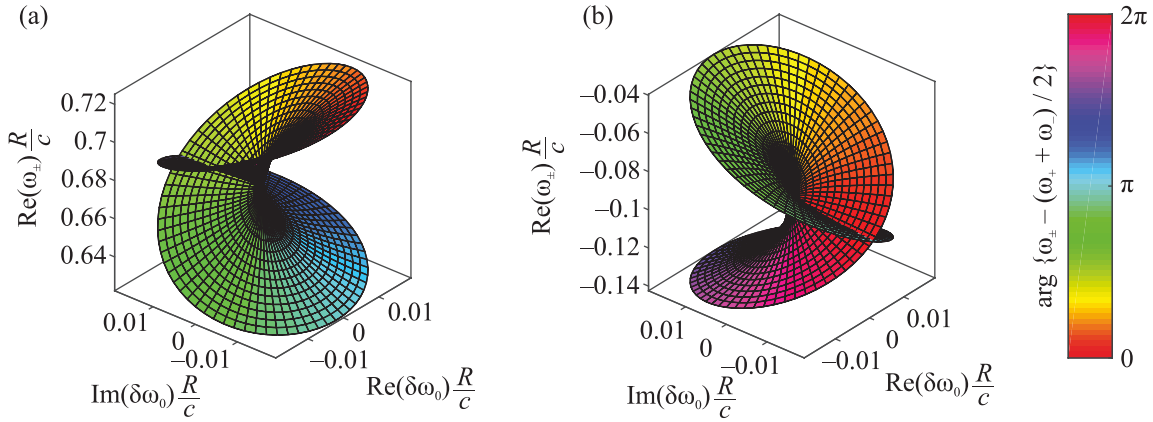


Рис. 3. (Цветной онлайн) Собственные частоты тримера в форме равностороннего треугольника ( $d_1 = d_2 = 15R$ ), как зависимость комплексной отстройки  $\delta\omega - i\delta\gamma$  от исключительной точки: частота собственной моды (а), коэффициент затухания собственной моды (б)

димера, в то время, как частоты симметричных мод тримера располагаются в области больших значений по мнимой оси по сравнению с частотами симметричных мод димера. Отрицательная мнимая часть частоты соответствует затухающим модам, а положительная – усиливающимся, таким образом, для частот, находящихся на отрицательной мнимой полуоси симметричные моды тримера имеют увеличенную добротность  $Q = -\text{Re}\omega_{\text{EP}}/\text{Im}2\omega_{\text{EP}}$  по сравнению с димером, а на положительной – большой коэффициент усиления. Таким образом, добавление третьего цилиндра не приводит к изменению частоты (рис. 2), но приводит к увеличению добротности за счет понижения симметрии системы.

На рисунке 3 показаны собственные частоты  $\omega_{\pm}$  тримера в форме равностороннего треугольника с длиной стороны  $d = 15R$  в окрестности исключительной точки  $\omega_{\text{EP}} = (0.67 - 0.1i)c/R$ , которая соответствует вращательным модам. Для данной исключительной точки  $\omega_0 = (0.68 - 0.03i)c/R$ , что соответствует показателю преломления  $n = 3.41 - 0.16i$ . Топология листов собственных частот соответствует поверхности Римана квадратного корня, что говорит о том, что исключительная точка имеет первый порядок, т.е. в ней происходит вырождение распределения поля только двух мод.

Рассмотрим отдельно характер этого вырождения. Сомножителям в (7) соответствуют различные собственные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & e^{i(2\pi/3)} & e^{i(4\pi/3)} \end{bmatrix}^{\top}, \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-i(2\pi/3)} & e^{-i(4\pi/3)} \end{bmatrix}^{\top}, \end{aligned} \quad (9)$$

из которых симметричная мода  $\mathbf{v}_1$  соответствует первому сомножителю в квадратных скобках, а вырожденные вращательные моды  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_3$  – второму. Таким образом, каждая точка на листах собственных частот на рис. 3 соответствует двукратно вырожденным вращательным модам, а они, в свою очередь, имеют разные распределения поля, исходя из симметрии. Помимо этого, исключительные точки симметричных мод находятся на других частотах, а симметрия также запрещает вырождение распределений поля между симметричными и вращательными модами. Из этого следует, что существование исключительных точек высшего порядка в симметричных тримерах невозможно. Если же записать систему уравнений, приравнивающую нулю не два, а три первых члена разложения ряда Тейлора, что соответствует исключительной точке третьего порядка, образованной модами одинаковой симметрии, система (4) дополняется уравнением

$$\Xi'' \left( \frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c} \right) = 0, \quad (10)$$

и не имеет решений с  $\text{Re}\omega_{\text{EP}} > 0$ .

Одним из способов достижения большей добротности мод является понижение симметрии системы [14, 31, 32], поэтому для понижения симметрии тримера с  $C_3$  до  $C_2$  рассмотрим равнобедренный треугольник с  $d_1 \neq d_2$ . Частоты его исключительных точек описываются системой уравнений (4) для антисимметричных по направлению направления основания мод, и (5), (6) – для оставшихся двух типов мод, которые в случае равностороннего треугольника превращаются в симметричные и антисимметричные по направлению одной из боковых сторон. На рисунке 4 показаны зависимости комплексных собствен-

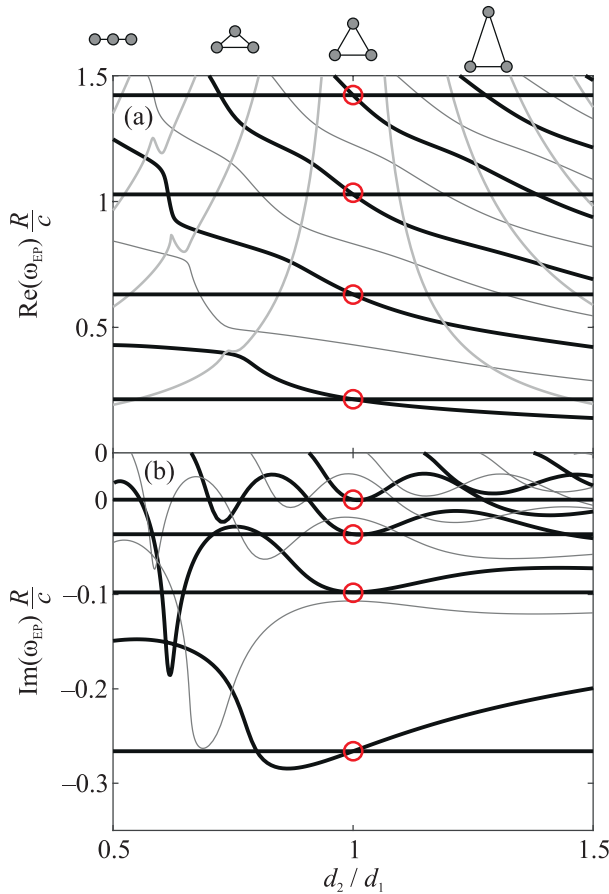


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости вещественных (a) и мнимых (b) частей частот исключительных точек в тримерах в форме равнобедренного треугольника от соотношения сторон  $d_2/d_1$  треугольника. Горизонтальными линиями показаны частоты мод, нечетных по направлению основания треугольника – их частоты не зависят от соотношения сторон. Кругами показаны точки вырождения частот за счет симметрии в равносортном треугольнике

ных частот этих мод от соотношения сторон  $d_2/d_1$  треугольника с  $d_1 = 15R$ . Из рисунка 4b видно, что добротности мод имеют осцилляционный характер, при этом мнимые части частот тех мод, которые при  $d_2 = d_1$  превращаются в антисимметричные, имеют локальный минимум в этой точке (кроме моды с самой нижней частотой, не имеющей в этой точке экстремума), а мнимые части частот остальных мод, которые превращаются в симметричные, имеют в этой точке максимум. Также имеется набор мод, вещественные части частот которых при приближении к точке  $d_2/d_1$  возрастают и уходят выше квадрупольного резонанса, поэтому они не могут быть использованы для увеличения добротности. Их мнимые части на панели рис. 4b не показаны, дабы не перегружать рисунок.

На рисунке 2 показаны также собственные частоты тримеров в форме равнобедренных треугольников с  $d_2 = 0.95d_1$  и с  $d_2 = 1.05d_1$ . Из рисунка 2 также видно, что при небольшом отклонении соотношения сторон от случая равностороннего треугольника, добротность симметричных мод уменьшается, а вырожденные антисимметричные моды расщепляются, причем для мод, антисимметричных вдоль боковой стороны треугольника, добротность увеличивается, а для антисимметричных вдоль основания – остается неизменной. При этом частоты всех мод, кроме поднабора антисимметричных вдоль основания треугольника, изменяются в зависимости от соотношения сторон.

Таким образом, нарушение симметрии вследствие перехода от равностороннего треугольника к равнобедренному вносит еще одну степень свободы, позволяя более точно настроить добротность, однако в этом случае изменение добротности будет сопровождаться и перестройкой резонансной частоты.

**Закключение.** Был рассмотрен тример цилиндров в форме равностороннего и равнобедренных треугольников. Мы продемонстрировали, что, при переходе от димера к тримеру антисимметричные моды, распределение поля и комплексные собственные частоты исключительных точек антисимметричных мод не изменяются, а частоты симметричных мод сдвигаются в сторону больших значений вдоль мнимой оси. Таким образом, затухающие симметричные моды в тримере имеют большую добротность по сравнению с димером. Также было исследовано поведение комплексных собственных частот в тримере в форме равнобедренного треугольника в зависимости от соотношения длин основания и боковой стороны. Обнаружено, что в одном подмножестве мод собственные частоты не зависят от соотношения длин, в то время как остальные моды демонстрируют наличие такой зависимости. Зависимость добротности этих мод от соотношения сторон имеет осцилляционный характер. Таким образом, в системе появляется дополнительная степень свободы, оптимизация которой позволяет более точно настроить добротность тримера, однако в этом случае изменение добротности будет сопровождаться и перестройкой резонансной частоты.

Полученные результаты могут быть полезны для проектирования метаповерхностей, работающих в режимах, близких к исключительной точке.

Авторский коллектив благодарит за финансовую поддержку Российский научный фонд (грант # 21-79-10190).

**Конфликт интересов.** Конфликт интересов отсутствует.

1. R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, *Nat. Phys.* **14**, 11 (2018).
2. L. Feng, R. El-Ganainy, and L. Ge, *Nat. Photon.* **11**, 752 (2017).
3. M.-A. Miri and A. Alù, *Science* **363**, eaar7709 (2019).
4. Ş. K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori, and L. Yang, *Nat. Mater.* **18**, 783 (2019).
5. Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, and D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213901 (2011).
6. L. Feng, X. Zhu, S. Yang, H. Zhu, P. Zhang, X. Yin, Y. Wang, and X. Zhang, *Opt. Express* **22**, 1760 (2013).
7. L. Feng, M. Ayache, J. Huang, Y.-L. Xu, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, Y. Fainman, and A. Scherer, *Science* **333**, 729 (2011).
8. K. J. H. Peters and S. R. K. Rodriguez., *Phys. Rev. Lett.* **129**, 013901 (2022).
9. S. Y. Min, J. Y. Kim, S. Yu, S. G. Menabde, and M. S. Jang, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 054041 (2020).
10. A. Abdrabou and Y. Y. Lu, *J. Opt. Soc. Am. B* **36**, 1659 (2019).
11. K. Pichugin, A. Sadreev, and E. Bulgakov, *Photonics* **8**, 460 (2021).
12. A. C. Valero, *J. Phys. Conf. Ser.* **2015**, 012028 (2021).
13. W. Yan, P. Lalanne, and M. Qiu, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 013901 (2020).
14. E. Bulgakov, K. Pichugin, and A. Sadreev, *Phys. Rev. A* **104**, 053507 (2021).
15. A. C. Valero, V. Bobrovs, D. Redka, A. S. Shalin, and Y. Kivshar, arXiv preprint arXiv:2205.05735 (2022).
16. A. Dmitriev and M. Rybin, *AIP Conf. Proc.* **2300**, 020022 (2020).
17. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **108**, 013518 (2023).
18. P. Lloyd and P. Smith, *Adv. Phys.* **21**, 69 (1972).
19. K. M. Leung and Y. Qiu, *Phys. Rev. B* **48**, 7767 (1993).
20. X. Wang, X.-G. Zhang, Q. Yu, and B. Harmon, *Phys. Rev. B* **47**, 4161 (1993).
21. D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2526 (1994).
22. A. Moroz, *J. Phys. Condens. Matter* **6**, 171 (1994).
23. N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, and L. C. Botten, *Physical Review E* **52**, 1135 (1995).
24. G. Tayeb and S. Enoch., *Journal of the Optical Society of America A* **21**, 1417 (2004).
25. P. Markoš and V. Kuzmiak, *Physical Review A* **94**, 033845 (2016).
26. P. Markoš, *Optics Communications* **361**, 65 (2016).
27. A. Egel, L. Pattelli, G. Mazzamuto, D. S. Wiersma, and U. Lemmer, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **199**, 103 (2017).
28. E. E. Maslova, M. F. Limonov, and M. V. Rybin, *Optics Letters* **43**, 5516 (2018).
29. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **99**, 063837 (2019).
30. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **103**, 053514 (2021).
31. H. M. Lai, P. T. Leung, and K. Young, *Phys. Rev. A* **41**, 5199 (1990).
32. C. C. Lam, P. T. Leung, and K. Young, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 1585 (1992).