

Исключительные точки в тримерах диэлектрических цилиндров

А. А. Дмитриев⁺¹⁾, К. В. Барышникова⁺, М. В. Рыбин^{+*}

⁺ Физико-технический мегафакультет, университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

^{*} Физико-технический институт им. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 2024 г.

После переработки 3 апреля 2024 г.

Принята к публикации 3 апреля 2024 г.

При помощи теории многоволнового рассеяния исследованы собственные моды в тримере из бесконечных цилиндров в форме равностороннего и равнобедренных треугольников. Получены уравнения на собственные частоты исключительных точек, в которых происходит вырождение собственных частот и собственных векторов. Симметрия равнобедренного треугольника обуславливает отделение мод, антисимметричных вдоль направления основания. В случае, когда треугольник равносторонний, моды распадаются на симметричные и дважды вырожденные вращательные моды. Обнаружено, что затухающие симметричные моды в тримере имеют большую добротность по сравнению с димером, что имеет значение для практических применений эффектов на основе исключительных точек. Также было исследовано поведение комплексных собственных частот в тримере в форме равнобедренного треугольника в зависимости от соотношения длин основания и боковой стороны. В точке, соответствующей равностороннему треугольнику, добротность симметричных мод имеет локальный максимум, а антисимметричных – локальный минимум.

DOI: 10.31857/S1234567824090131, EDN: BQHIGN

В последнее время, оптика систем с усилением и потерями стала одним из приоритетных направлений в нанофотонике [1–4]. Собственные частоты таких систем описываются неэрмитовыми гамильтонианами, а собственные моды не являются в общем случае ортогональными. В предельном случае, который достигается в так называемых исключительных точках (EP), гамильтониан не может быть диагонализирован (соответствующая матрица становится дефектной), что проявляется в вырождении собственных частот, а собственные векторы при этом становятся параллельными. Такое вырождение приводит к множеству оптических эффектов, таких как однонаправленная передача света без отражения [5, 6], нарушение взаимности [7] и расщепление собственных частот по корневому закону при снятии вырождения [8].

В фотонике исключительные точки обычно изучаются в контексте систем с симметрией четность–время (PT). В этом случае они соответствуют условиям перехода к режиму разрушения симметрии, в котором вместо двух вещественных частот появляются две комплексно сопряженные. Однако наличие в системе симметрии четность–время вовсе не является обязательным условием существования исключительных точек. Среди них – плазмон-

ные волноводы на основе структур диэлектрик–металл–диэлектрик [9], периодические массивы цилиндров [10], квадрумер из кремниевых дисков [11], асимметричный димер диэлектрических цилиндров без потерь [12], а также отдельные частицы в форме гантели [13], сфероида [14] и конуса [15].

Помимо этого, было обнаружено возникновение исключительных точек в симметричных димерах диэлектрических бесконечных цилиндров [16] и сфер [17] одинакового радиуса, выполненных из одного и того же материала без потерь. Установлено, что появление этих исключительных точек связано с наличием зависимости коэффициента связи между частицами от частоты [17].

Цель настоящего исследования состоит в исследовании возможности увеличения добротности мод исключительных точек за счет понижения симметрии, что имеет важное прикладное значение. В качестве объекта с более низкой, чем у димера, симметрией, рассматривается тример в форме равнобедренного треугольника, и, в частности, в форме равностороннего треугольника.

Объект исследования представляет собой двумерную систему из бесконечных цилиндров, центры которых находятся в вершинах равнобедренного треугольника с длиной основания d_1 и боковой стороны – d_2 (см. рис. 1). Радиус цилиндров $R < (d_1, d_2)$.

¹⁾e-mail: alexey.dmitriev@metalab.ifmo.ru

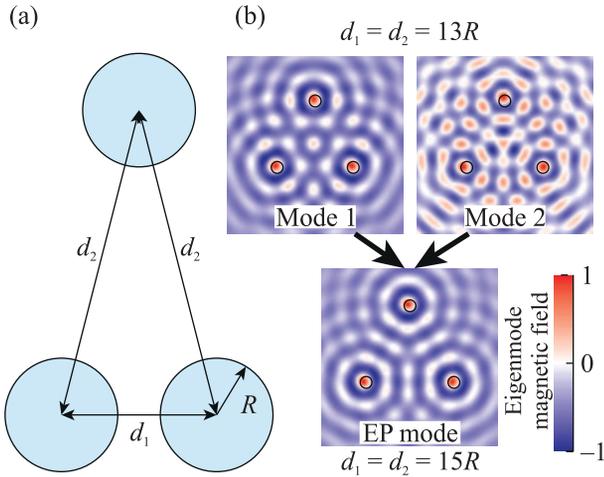


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Эскиз исследуемой системы – тримера бесконечных диэлектрических цилиндров в форме равнобедренного треугольника с основанием длиной d_1 и боковыми сторонами длиной d_2 . Все три цилиндра имеют одинаковый радиус и выполнены из диэлектрика с одинаковым показателем преломления. (б) – Иллюстрация вырождения распределения магнитного поля двух симметричных собственных мод тримеров бесконечных цилиндров с показателем преломления $n = 1.7 + 0.007i$ в форме равностороннего треугольника в исключительной точке (EP), которая образуется при $d_1 = d_2 = 15R$

Ось z выбрана вдоль осей цилиндров. В двумерной задаче решение распадается на ТЕ и ТМ поляризации, которые могут быть исследованы независимо. В данной работе будет рассматриваться ТЕ поляризация, в которой вектор магнитного поля $\mathbf{H} = [0, 0, \psi]^\top$ параллелен оси цилиндров; при этом для ТМ поляризации физическая картина не отличается, и детальное изложение этого случая оказывается излишним.

На основе теории многоволнового рассеяния [18–28] может быть записана система уравнений связанных диполей для системы из трех цилиндров [17, 29]

$$\begin{aligned}
 (\hat{E} - a_0 \hat{L}) \mathbf{p} &= a_0 \mathbf{p}_{\text{exc}}, \\
 \hat{L} &= \begin{bmatrix} 0 & \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) & \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \\ \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) & 0 & \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \\ \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) & \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где \hat{E} – единичная матрица, a_0 – дипольный коэффициент Лоренца–Ми для цилиндра, ω – частота, c – скорость света, \mathbf{p} – вектор дипольных амплитуд цилиндров, \mathbf{p}_{exc} – вектор возбуждения, а $\Xi(x) = H_0^{(1)}(x)$ – коэффициент связи дипольных мод ци-

линдров (функция Ханкеля; предполагается частотная зависимость $e^{-i\omega t}$).

Аппроксимируя коэффициент Лоренца–Ми вблизи резонанса простым полюсом $a_0 \simeq i\Gamma/(\omega - \omega_0)$, где ω_0 – полюс рассеяния, а $\Gamma = -i \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} a_0(\omega - \omega_0)$ – сила осциллятора, можно привести уравнение на собственные моды к виду $(\hat{\mathcal{H}} - \omega \hat{E}) \mathbf{p} = 0$ [29], где эффективный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) & \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \\ \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) & \omega_0 & \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \\ \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) & \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) & \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Данный гамильтониан зависит от собственной частоты ω , таким образом, задача о поиске его собственных чисел записывается в обобщенном виде поиска нулей функции $f(\omega) = \det(\hat{\mathcal{H}} - \omega \hat{E})$. Из-за симметрии равнобедренного треугольника, $f(\omega)$ может быть представлена в факторизованном виде

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= \left[\omega_0 - \omega - \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) \right] \times \\
 &\times \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma \Xi\left(\frac{\omega}{c} d_1\right) (\omega_0 - \omega) - 2\Gamma^2 \Xi^2\left(\frac{\omega}{c} d_2\right) \right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнения на частоту исключительной точки ω_{EP} , проследуем процедуре, описанной подробно в [16]. Разложим $f(\omega)$ в ряд Тейлора вокруг ω_{EP} . При равенстве нулю первых двух коэффициентов разложения корень имеет кратность не менее 2 и оказывается кандидатом на исключительную точку. Было показано [17], что такие двукратные корни действительно являются исключительными точками. Таким образом, уравнения на частоту исключительной точки получаются из условий $f(\omega_{\text{EP}}) = 0$ и $f'(\omega_{\text{EP}}) = 0$.

Важным обстоятельством является то, что в случае, когда функция $f(\omega)$ факторизуется, описанную процедуру можно выполнять для каждого сомножителя в отдельности. Для первого сомножителя в квадратных скобках, который соответствует собственным модам, антисимметричным относительно высоты, опущенной на основание треугольника (далее для краткости будем говорить “антисимметричным по направлению основания”), получаются такие уравнения на частоту исключительной точки и соответствующий полюс рассеяния одного цилиндра:

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_{\text{EP}} + \Gamma \Xi\left(\frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c}\right), \\ \frac{\Gamma d_1}{c} \Xi'\left(\frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c}\right) = -1. \end{cases} \quad (4)$$

Коэффициент связи между частицами содержит осциллирующую функцию $\Xi(x)$, следовательно, он является осциллирующей функцией частоты. Из этого следует наличие у системы (4) бесконечного числа решений [17]. Так, тример имеет бесконечное число антисимметричных дипольных мод с различным числом нулей поля на основании треугольника. Вырождение распределений поля двух таких мод и соответствует исключительной точке.

Стоит отдельно выделить тот факт, что уравнения (4) совпадают с таковыми для исключительных точек, образованных при совпадении двух антисимметричных мод в димерах диэлектрических частиц [17, 30]. Действительно, поле данных мод является нулевым на линии, на которой находится третий цилиндр (вершина), следовательно взаимодействие с этим цилиндром отсутствует, и эффективно в данной моде участвует лишь основание треугольника, то есть димер.

Для второго сомножителя получаются следующие уравнения на частоту исключительной точки:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma^2 d_1^2}{c^2} \left[\Xi \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) + \right. \\ & \left. + 8 \frac{d_2}{d_1} \Xi \left(\frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \right]^2 - \\ & - \left(\frac{\Gamma d_1}{c} \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) - 2 \right)^2 \times \\ & \times \left[\Xi^2 \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) + 8 \frac{d_2}{d_1} \Xi^2 \left(\frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \right] = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \omega_{EP} + \Gamma \frac{4 \frac{\Gamma d_2}{c} \Xi \left(\frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_2}{c} \right) + \Xi \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right)}{\frac{\Gamma}{c} d_1 \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) - 2}. \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно случай равностороннего треугольника ($d_1 = d_2 = d$). В этом случае, уравнение (3) может быть факторизовано иным способом:

$$f(\omega) = [\omega_0 - \omega + 2\Gamma\Xi(\frac{\omega d}{c})][\omega_0 - \omega - \Gamma\Xi(\frac{\omega d}{c})]^2. \quad (7)$$

Таким образом, исключительная точка, описываемая уравнениями (4) и соответствующая антисимметричной собственной моде, оказывается вырождена дважды. Действительно, из теории групп следует наличие в системе с симметрией C_3 двух вырожденных мод “вращения по и против часовой стрелки”, которые также могут быть представлены в неортогональном базисе из антисимметричных по двум ребрам мод, и симметричной моде, которой в данном случае соответствует первый сомножитель в квад-

ратных скобках. Уравнения на исключительную точку для него

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_{EP} - 2\Gamma\Xi \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right), \\ 2 \frac{\Gamma d_1}{c} \Xi' \left(\frac{\omega_{EP} d_1}{c} \right) = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Рассматривая случай ($d_1 = d_2$) в уравнениях (5) и (6) нетрудно также прийти к уравнениям (4) и (8). На рисунке 1b показано распределение поля симметричной моды в исключительной точке, которая образуется на частоте $\omega_{EP} = (1.728 + 0.066i)c/R$ при $d_1 = d_2 = 15R$. Для сравнения показаны две симметричные собственные моды тримера с $d_1 = d_2 = 13R$, которые в исключительной точке оказываются вырождены.

На рисунке 2 показаны собственные частоты димера с расстоянием $d = 15R$ между центрами цилиндров и тримера в форме равностороннего треугольника со стороной $d_1 = d_2 = 15R$. Комплекс-

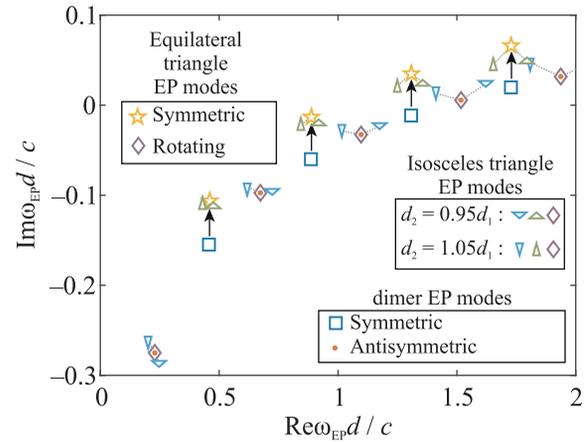


Рис. 2. (Цветной онлайн) Комплексные собственные частоты димера и тримера в виде равностороннего ($d_1 = d_2 = d$) и равнобедренных треугольников из бесконечных диэлектрических цилиндров, соответствующие исключительным точкам. Маркеры различной формы соответствуют модам: симметричной в димере (квадрат), антисимметричной в димере (точка), симметричной в тримере в форме равностороннего треугольника (звезда) и вращательным в тримере (ромб); маркеры в форме остроугольных треугольников, направленных вверх и вниз, показывают собственные частоты тримера в форме равнобедренного треугольника с $d_2 = 1.05d_1$, а тупоугольных – с $d_2 = 0.95d_1$. Стрелки показывают увеличение добротности при переходе от симметричных мод димера к тримеру. TE поляризация, $d = 15R$

ные собственные частоты вращательных мод тримера совпадают с частотами антисимметричных мод

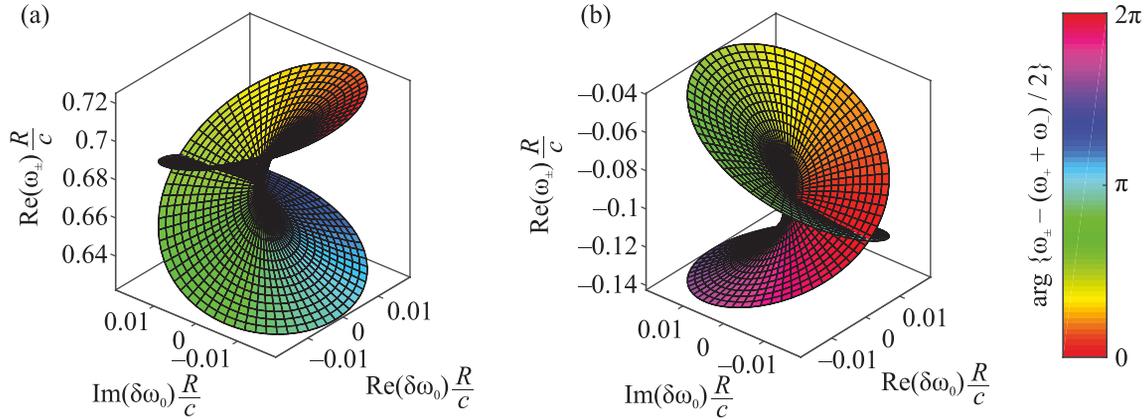


Рис. 3. (Цветной онлайн) Собственные частоты тримера в форме равностороннего треугольника ($d_1 = d_2 = 15R$), как зависимость комплексной отстройки $\delta\omega - i\delta\gamma$ от исключительной точки: частота собственной моды (а), коэффициент затухания собственной моды (б)

димера, в то время, как частоты симметричных мод тримера располагаются в области больших значений по мнимой оси по сравнению с частотами симметричных мод димера. Отрицательная мнимая часть частоты соответствует затухающим модам, а положительная – усиливающимся, таким образом, для частот, находящихся на отрицательной мнимой полуоси симметричные моды тримера имеют увеличенную добротность $Q = -\text{Re}\omega_{\text{EP}}/\text{Im}2\omega_{\text{EP}}$ по сравнению с димером, а на положительной – большой коэффициент усиления. Таким образом, добавление третьего цилиндра не приводит к изменению частоты (рис. 2), но приводит к увеличению добротности за счет понижения симметрии системы.

На рисунке 3 показаны собственные частоты ω_{\pm} тримера в форме равностороннего треугольника с длиной стороны $d = 15R$ в окрестности исключительной точки $\omega_{\text{EP}} = (0.67 - 0.1i)c/R$, которая соответствует вращательным модам. Для данной исключительной точки $\omega_0 = (0.68 - 0.03i)c/R$, что соответствует показателю преломления $n = 3.41 - 0.16i$. Топология листов собственных частот соответствует поверхности Римана квадратного корня, что говорит о том, что исключительная точка имеет первый порядок, т.е. в ней происходит вырождение распределения поля только двух мод.

Рассмотрим отдельно характер этого вырождения. Сомножителям в (7) соответствуют различные собственные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & e^{i(2\pi/3)} & e^{i(4\pi/3)} \end{bmatrix}^{\top}, \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-i(2\pi/3)} & e^{-i(4\pi/3)} \end{bmatrix}^{\top}, \end{aligned} \quad (9)$$

из которых симметричная мода \mathbf{v}_1 соответствует первому сомножителю в квадратных скобках, а вырожденные вращательные моды \mathbf{v}_2 и \mathbf{v}_3 – второму. Таким образом, каждая точка на листах собственных частот на рис. 3 соответствует двукратно вырожденным вращательным модам, а они, в свою очередь, имеют разные распределения поля, исходя из симметрии. Помимо этого, исключительные точки симметричных мод находятся на других частотах, а симметрия также запрещает вырождение распределений поля между симметричными и вращательными модами. Из этого следует, что существование исключительных точек высшего порядка в симметричных тримерах невозможно. Если же записать систему уравнений, приравнивающую нулю не два, а три первых члена разложения ряда Тейлора, что соответствует исключительной точке третьего порядка, образованной модами одинаковой симметрии, система (4) дополняется уравнением

$$\Xi'' \left(\frac{\omega_{\text{EP}} d_1}{c} \right) = 0, \quad (10)$$

и не имеет решений с $\text{Re}\omega_{\text{EP}} > 0$.

Одним из способов достижения большей добротности мод является понижение симметрии системы [14, 31, 32], поэтому для понижения симметрии тримера с C_3 до C_2 рассмотрим равнобедренный треугольник с $d_1 \neq d_2$. Частоты его исключительных точек описываются системой уравнений (4) для антисимметричных по направлению направления основания мод, и (5), (6) – для оставшихся двух типов мод, которые в случае равностороннего треугольника превращаются в симметричные и антисимметричные по направлению одной из боковых сторон. На рисунке 4 показаны зависимости комплексных собствен-

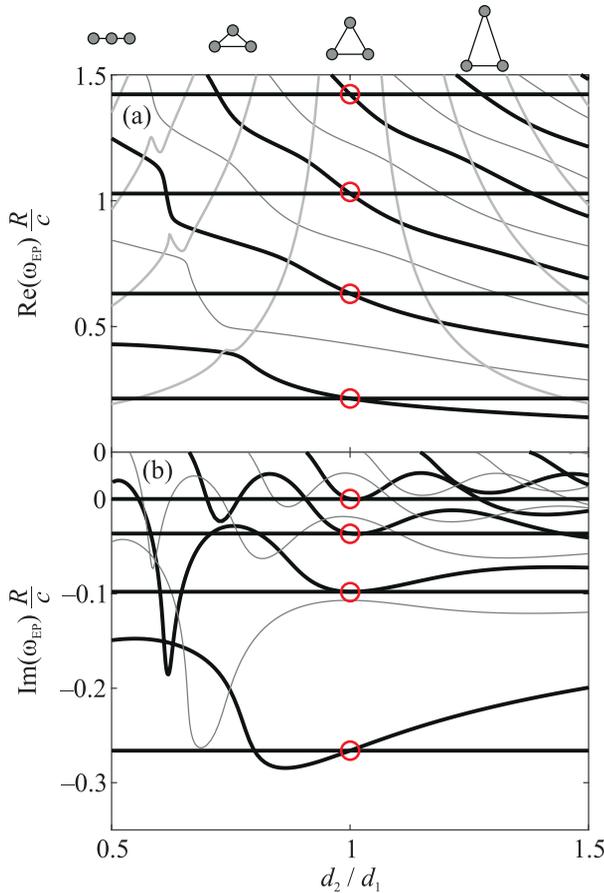


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости вещественных (a) и мнимых (b) частей частот исключительных точек в тримерах в форме равнобедренного треугольника от соотношения сторон d_2/d_1 треугольника. Горизонтальными линиями показаны частоты мод, нечетных по направлению основания треугольника – их частоты не зависят от соотношения сторон. Кругами показаны точки вырождения частот за счет симметрии в равнобедренном треугольнике

ных частот этих мод от соотношения сторон d_2/d_1 треугольника с $d_1 = 15R$. Из рисунка 4b видно, что добротности мод имеют осцилляционный характер, при этом мнимые части частот тех мод, которые при $d_2 = d_1$ превращаются в антисимметричные, имеют локальный минимум в этой точке (кроме моды с самой нижней частотой, не имеющей в этой точке экстремума), а мнимые части частот остальных мод, которые превращаются в симметричные, имеют в этой точке максимум. Также имеется набор мод, вещественные части частот которых при приближении к точке d_2/d_1 возрастают и уходят выше квадрупольного резонанса, поэтому они не могут быть использованы для увеличения добротности. Их мнимые части на панели рис. 4b не показаны, дабы не перегружать рисунок.

На рисунке 2 показаны также собственные частоты тримеров в форме равнобедренных треугольников с $d_2 = 0.95d_1$ и с $d_2 = 1.05d_1$. Из рисунка 2 также видно, что при небольшом отклонении соотношения сторон от случая равностороннего треугольника, добротность симметричных мод уменьшается, а вырожденные антисимметричные моды расщепляются, причем для мод, антисимметричных вдоль боковой стороны треугольника, добротность увеличивается, а для антисимметричных вдоль основания – остается неизменной. При этом частоты всех мод, кроме поднабора антисимметричных вдоль основания треугольника, изменяются в зависимости от соотношения сторон.

Таким образом, нарушение симметрии вследствие перехода от равностороннего треугольника к равнобедренному вносит еще одну степень свободы, позволяя более точно настроить добротность, однако в этом случае изменение добротности будет сопровождаться и перестройкой резонансной частоты.

Заключение. Был рассмотрен тример цилиндров в форме равностороннего и равнобедренных треугольников. Мы продемонстрировали, что, при переходе от димера к тримеру антисимметричные моды, распределение поля и комплексные собственные частоты исключительных точек антисимметричных мод не изменяются, а частоты симметричных мод сдвигаются в сторону больших значений вдоль мнимой оси. Таким образом, затухающие симметричные моды в тримере имеют большую добротность по сравнению с димером. Также было исследовано поведение комплексных собственных частот в тримере в форме равнобедренного треугольника в зависимости от соотношения длин основания и боковой стороны. Обнаружено, что в одном подмножестве мод собственные частоты не зависят от соотношения длин, в то время как остальные моды демонстрируют наличие такой зависимости. Зависимость добротности этих мод от соотношения сторон имеет осцилляционный характер. Таким образом, в системе появляется дополнительная степень свободы, оптимизация которой позволяет более точно настроить добротность тримера, однако в этом случае изменение добротности будет сопровождаться и перестройкой резонансной частоты.

Полученные результаты могут быть полезны для проектирования метаповерхностей, работающих в режимах, близких к исключительной точке.

Авторский коллектив благодарит за финансовую поддержку Российский научный фонд (грант # 21-79-10190).

Конфликт интересов. Конфликт интересов отсутствует.

1. R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, *Nat. Phys.* **14**, 11 (2018).
2. L. Feng, R. El-Ganainy, and L. Ge, *Nat. Photon.* **11**, 752 (2017).
3. M.-A. Miri and A. Alù, *Science* **363**, eaar7709 (2019).
4. Ş. K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori, and L. Yang, *Nat. Mater.* **18**, 783 (2019).
5. Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, and D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213901 (2011).
6. L. Feng, X. Zhu, S. Yang, H. Zhu, P. Zhang, X. Yin, Y. Wang, and X. Zhang, *Opt. Express* **22**, 1760 (2013).
7. L. Feng, M. Ayache, J. Huang, Y.-L. Xu, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, Y. Fainman, and A. Scherer, *Science* **333**, 729 (2011).
8. K. J. H. Peters and S. R. K. Rodriguez., *Phys. Rev. Lett.* **129**, 013901 (2022).
9. S. Y. Min, J. Y. Kim, S. Yu, S. G. Menabde, and M. S. Jang, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 054041 (2020).
10. A. Abdrabou and Y. Y. Lu, *J. Opt. Soc. Am. B* **36**, 1659 (2019).
11. K. Pichugin, A. Sadreev, and E. Bulgakov, *Photonics* **8**, 460 (2021).
12. A. C. Valero, *J. Phys. Conf. Ser.* **2015**, 012028 (2021).
13. W. Yan, P. Lalanne, and M. Qiu, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 013901 (2020).
14. E. Bulgakov, K. Pichugin, and A. Sadreev, *Phys. Rev. A* **104**, 053507 (2021).
15. A. C. Valero, V. Bobrovs, D. Redka, A. S. Shalin, and Y. Kivshar, arXiv preprint arXiv:2205.05735 (2022).
16. A. Dmitriev and M. Rybin, *AIP Conf. Proc.* **2300**, 020022 (2020).
17. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **108**, 013518 (2023).
18. P. Lloyd and P. Smith, *Adv. Phys.* **21**, 69 (1972).
19. K. M. Leung and Y. Qiu, *Phys. Rev. B* **48**, 7767 (1993).
20. X. Wang, X.-G. Zhang, Q. Yu, and B. Harmon, *Phys. Rev. B* **47**, 4161 (1993).
21. D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2526 (1994).
22. A. Moroz, *J. Phys. Condens. Matter* **6**, 171 (1994).
23. N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, and L. C. Botten, *Physical Review E* **52**, 1135 (1995).
24. G. Tayeb and S. Enoch., *Journal of the Optical Society of America A* **21**, 1417 (2004).
25. P. Markoš and V. Kuzmiak, *Physical Review A* **94**, 033845 (2016).
26. P. Markoš, *Optics Communications* **361**, 65 (2016).
27. A. Egel, L. Pattelli, G. Mazzamuto, D. S. Wiersma, and U. Lemmer, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **199**, 103 (2017).
28. E. E. Maslova, M. F. Limonov, and M. V. Rybin, *Optics Letters* **43**, 5516 (2018).
29. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **99**, 063837 (2019).
30. A. A. Dmitriev and M. V. Rybin, *Phys. Rev. A* **103**, 053514 (2021).
31. H. M. Lai, P. T. Leung, and K. Young, *Phys. Rev. A* **41**, 5199 (1990).
32. C. C. Lam, P. T. Leung, and K. Young, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 1585 (1992).