Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.9, стр.477 - 482 10 мая 1992 г.

СПЕКТР АДИАБАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ВСЕЛЕННОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПОТЕНЦИАЛЕ ИНФЛАТОНА

А.А.Старобинский

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

117334, Москва

Поступила в редакцию 9 апреля 1992 г.

Особенность типа сглаженного излома в потенциале эффективного скалярного поля, управляющего де-ситтеровской (инфляционной) стадией в ранней Вселенной, приводит к появлению ступеньки универсального вида с наложенными модуляциями в спектре адиабатических возмущений, а особенность вида сглаженного скачка потенциала - к горке в спектре.

Как неоднократно подчеркивалось, начиная с работы [1], одним из главных достоинств космологического сценария с начальной стадией квазиэкспоненциального расширения (де-ситтеровской, или инфляционной), в результате распада которой возникает фридмановская горячая Вселенная, является возможность опровергнуть или подтвердить любой конкретный вариант этого сценария с помощью наблюдательных данных о современной Вселенной. Среди таких тестов наиболее легко проверяемы предсказания о спектре и статистике адиабатических возмущений метрики Фридмана, ведущих к образованию галактик и других компактных объектов во Вселенной. Во всех простейших вариантах инфляционной модели предполагается, что инфляционная стадия создается одним эффективным скалярным полем (инфлатоном) с некоторым потенциалом $V(\varphi)$, причем на инфляционной стадии поле находится в режиме медленного скатывания, характеризуемом условиями:

$$|\ddot{\varphi}| \ll 3H|\dot{\varphi}|; \qquad \dot{\varphi}^2 \ll 2V(\varphi), \tag{1}$$

где $H = \dot{a}/a$, $a(t)$ - масштабный фактор изотропной космологической модели, а точка означает дифференцирование по t. Тогда фурье-компоненты гравитационного потенциала $\Phi_k = (2\pi)^{-3/2}\int \Phi(\vec{r})\exp(-i\vec{k}\vec{r})d^3r$ являются δ-коррелированными случайными гауссовыми величинами ($<\Phi_{\vec{k}}>=0; <\Phi_{\vec{k}}\Phi_{\vec{k}'}>=\Phi^2(k)\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$, $k=|\vec{k}|$) с приближенно плоским спектром:

$$\left|\frac{d\ln(k^3\Phi^2(k))}{d\ln k}\right| \ll 1. \tag{2}$$

Впервые эта задача была полностью решена в [2] (результаты, полученные во второй и третьей из этих работ, точно совпадают, если их выразить в одинаковых терминах; в первой работе ответ приведен с точностью до численного коэффициента), отметим также более ранние подходы к этой проблеме [3].

При выполнении неравенств (1) и малости пространственной кривизны, что наступает вскоре после начала инфляционной стадии, $H^2 \simeq 8\pi GV/3$ и $\dot{\varphi} \simeq -V'/3H$ ($c = \hbar = 1$, штрих означает производную по φ). Тогда условия (1) можно переписать в терминах ограничений на производные V:

$$|V''| \ll 24\pi GV; \quad V'^2 \ll 48\pi GV^2. \tag{3}$$

С другой стороны, величина $|V'|$ не может быть слишком малой для интересующей нас области изменения φ на инфляционной стадии, которая соответствует масштабам 1кпс - 10^4 Мпс в настоящее время; из условия достаточной малости Φ в этом диапазоне ($A \leq 10^{-3}$ в обозначениях статьи [4]) следует, что:

$$|V'| \geq 10^5 (GV)^{3/2}. \tag{4}$$

Для наиболее популярной сейчас модели холодных частиц с полной плотностью вещества, равной критической (согласно предсказанию инфляционной модели), предсказание (2) хорошо согласуется с формой наблюдаемой корреляционной функции галактик (с учетом нелинейной эволюции при красных смещениях $Z \leq 10$) для масштабов $L = (1-20)h_{50}^{-1}$ Мпс, где $h_{50} = H_1/50$, H_1 - постоянная Хаббла в км/с·Мпс. Однако при $L = (50-100)h_{50}^{-1}$ Мпс величина $k^3\Phi^2(k)$ вырастает, по-видимому, по меньшей мере в 3 раза по сравнению с областью $L = (1-20)h_{50}^{-1}$ Мпс. Этот эффект следует как из последних результатов по пространственному распределению галактик ($\propto \Delta\Phi$) в этих масштабах [5], так и из данных по крупномасштабным пекулярным скоростям галактик ($\propto \nabla\Phi$) [6]. С другой стороны, распределение пекулярных скоростей с очень хорошей точностью оказывается гауссовым [7], причем эти данные относятся к той же области масштабов, где виден избыток амплитуды Φ по сравнению с холодной моделью с плоским спектром. Наилучшие верхние пределы на флуктуации температуры реликтового излучения $\Delta T/T$ в соответствующих угловых масштабах (0,25-1°) [8] допускают еще примерно в 2 раза больший подъем амплитуды. Верхние пределы на недипольную анизотропию $\Delta T/T$ в области больших углов [9] исключают возможность объяснения этого подъема с помощью масштабно инвариантного спектра $k^3\Phi^2(k) \propto k^{n-1}$, $n < 1$, который возникает, например, в "новой" инфляционной модели с потенциалом $V(\varphi) = V_0 - M^2\varphi^2/2$, $M^2 \sim H_0^2 = 8\pi GV_0/3$, или в так называемой степенной инфляции ($a(t) \propto t^p$, $p > 1$).

Существует несколько возможностей получить масштабно-неинвариантный спектр адиабатических возмущений, сохранив, однако, условие их δ-коррелированности и гауссовости: 1) отказаться от условий медленности скатывания (1); 2) ввести несколько эффективных скалярных полей, которые могут создавать де-ситтеровскую стадию (при этом мы приходим к моделям двойной [10] и множественной [11] инфляции); 3) сохранить начальный плоский спектр (2), но перейти от чистой модели холодных частиц к смешанным моделям: холодные частицы+легкое нейтрино или холодные частицы+космологическая постоянная - с суммарной критической плотностью всех видов материи (в наблюдаемые величины входит начальный спектр $\Phi^2(k)$, умноженный на передаточную функцию $c^2(k)$, возникающую при переходе от радиационно-доминированной стадии к стадии доминирования вещества при $Z \sim 10^4$ и зависящую от современного состава материи во Вселенной).

В настоящей статье рассматривается первая возможность, для которой (в отличие от второй) не возникает никаких проблем с выбором начальных значений для скалярного поля и которая дает больше возможностей для спектра возмущений, чем третья. Чтобы сохранить согласие с формой корреляционной функции галактик в области (1-20)h_{50}^{-1} Мпс и не выйти за ограничения, следующие из $\Delta T/T$ в области больших углов, естественно предположить (в отличие от [12], где рассматривался полиномиальный потенциал), что неравенства (1,3) нарушаются только в узкой области $\varphi \simeq \varphi_0$ (фактически мы нарушим только первое неравенство). Тогда спектр является плоским вдали от точки $k_0 = a(t_0)H_0$, где $H_0^2 = 8\pi G V(\varphi_0)/3$, t_0 - момент времени, когда $\varphi = \varphi_0$ (далее для простоты сдвинем начало отсчета времени так, чтобы $t_0 = 0$). Пусть $x = \varphi - \varphi_0$. Если $V(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет особенность вида сглаженного скачка второй производной или более слабую, то из выполнения условий (1) до и после прохождения точки $x = 0$ следует, что спектр возмущений остается плоским.

Минимальная локальная особенность в $V(x)$, необходимая для появления неплоского спектра, - сглаженный излом:

$$V(x) = V_0 + v(x), \quad v(x) \approx A_+ x, \qquad x \gg x_0, \qquad\qquad \approx A_- x, \quad x < 0, \quad |x| \gg x_0, \tag{5}$$

$$v(0) = 0, \quad A_+ > 0, \quad A_- > 0, \quad A_+ \neq A_-,$$

где x_0 - характерная ширина области перехода. Из условия выполнения (3) и (4) до и после перехода через излом потенциала следует: $\max(A_+, A_-) \ll G^{-1/2} H_0^2$, $\min(A_+, A_-) \gg H_0^3$. Для нарушения режима медленного скатывания во время перехода необходимо, чтобы $|A_+ - A_-| \gtrsim H_0^2 x_0$. Отсюда следует, что $x_0 \ll G^{-1/2}$ и $\max(A_+, A_-) \cdot x_0 \ll V_0$. Тогда при расчете $a(t)$ вкладом v в потенциал можно пренебречь, и $a(t) = a(0)\exp(H_0 t)$ в окрестности перехода.

Далее будет рассматриваться случай $\min(A_+, |A_+ - A_-|) \gg H_0^2 x_0$, когда спектр максимально отличается от плоского. В этом пределе спектр не зависит от формы $v(x)$ и величины x_0 и приобретает универсальный вид. Действительно, при этом область $\Delta x \sim x_0$ проходится за время $t_0 \sim x_0 H_0/A_+ \ll H_0^{-1}$. Поэтому

$$\dot{x} = \begin{cases} -A_+/3H_0, & t < 0, \\ -(A_- + (A_+ - A_-)e^{-3H_0 t})/3H_0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

независимо от вида $v(x)$.

Уравнения для малых неоднородных возмущений поля φ и возмущений метрики скалярного типа можно свести к одному уравнению для гравитационного потенциала Φ [13] или величины ξ [14] (в синхронной системе отсчета $\xi = \delta\varphi - \frac{\dot{\varphi}}{6H}(\lambda + \mu)$, где λ и μ - лифшицевские обозначения для скалярных возмущений метрики [15]). Здесь удобнее пользоваться второй из этих величин, уравнение для фурье-компоненты которой имеет вид

$$\ddot{\xi}_k + 3H\dot{\xi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_{eff}^2\right)\xi_k = 0,$$

$$m_{eff}^2 = \frac{d^2V}{d\varphi^2} + 8\pi G \frac{\dot{\varphi}}{H}\frac{dV}{d\varphi} + H\left(\frac{\dot{H}}{H^2}\right)^{\cdot} . \tag{7}$$

Так как $\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2$, то при $k^2 \ll k_0^2 \frac{|A_+ - A_-|}{H_0^2 x_0}$ в силу вышеуказанных неравенств величину m_{eff}^2 в (7) в главном приближении можно заменить на

$\frac{3H_0(A_+-A_-)}{A_+}\delta(t)$ (основной вклад вносит член $d^2V/d\varphi^2$). Правильно нормированное решение для ξ_k при $t<0$, соответствующее "in" - вакууму при $t\to-\infty$, есть

$$\xi_k=\frac{H_0}{\sqrt{2k}}e^{-ik\eta}\left(-\eta+\frac{i}{k}\right),\quad \eta=\int\frac{dt}{a(t)}=-(H_0a)^{-1}. \tag{8}$$

Тогда при $t>0$

$$\xi_k=\frac{H_0}{\sqrt{2k}}\left(\alpha(k)e^{-ik\eta}\left(-\eta+\frac{i}{k}\right)+\beta(k)e^{ik\eta}\left(-\eta-\frac{i}{k}\right)\right),$$

$$\alpha=1+\frac{3i}{2}\left(\frac{A_-}{A_+}-1\right)\frac{k_0}{k}\left(1+\frac{k_0^2}{k^2}\right),$$

$$\beta=-\frac{3i}{2}\left(\frac{A_-}{A_+}-1\right)\exp\left(2i\frac{k}{k_0}\right)\frac{k_0}{k}\left(1+\frac{ik_0}{k}\right)^2,$$

$$|\alpha|^2-|\beta|^2=1. \tag{9}$$

Величину $|\beta(k)|^2$ можно интерпретировать как количество пар скалярных частиц с импульсами $\vec{k}$ и $-\vec{k}$, рожденных за счет быстрого изменения φ. Интерес, однако, представляет только та часть эффекта, которая дает вклад в растущую адиабатическую моду возмущений. Она определяется асимптотикой ξ_k при $t\to\infty(\eta\to 0)$: $\xi_k(\infty)=\frac{iH_0}{\sqrt{2k^3}}(\alpha-\beta)$. Переходя стандартным образом от ξ к Φ, используя величину $h(\vec{r})=\mu/3$ и считая, что $a(t)\propto t^{2/3}$ в настоящее время, находим современный спектр возмущений на линейной стадии:

$$\Phi=-\frac{1}{2}h\left(1-\frac{H}{a}\int_0^t a\,dt\right)=-\frac{3}{10}h,$$

$$k^3h^2(k)=\frac{18H_0^6}{A_-^2}D^2\left(\frac{k}{k_0}\right)c^2(k),$$

$$D^2=|\alpha-\beta|^2=1-3\left(\frac{A_-}{A_+}-1\right)\frac{1}{y}\left(\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\sin 2y+\frac{2}{y}\cos 2y\right)+$$
$$+\frac{9}{2}\left(\frac{A_-}{A_+}-1\right)^2\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\cos 2y-\frac{2}{y}\sin 2y\right),$$

$$y=\frac{k}{k_0},\qquad D(0)=A_-/A_+,\qquad D(\infty)=1. \tag{10}$$

Функция $D(y)$ имеет вид ступеньки (с наложенными модуляциями) с подъемом в сторону больших масштабов при $A_->A_+$ и малых масштабов в противоположном случае. Ее вид зависит только от отношения A_-/A_+. Отметим также два ее интересных свойства: 1) при $A_->A_+$ функция $D(y)$ медленно падает в сторону больших y (это способствует образованию крупномасштабной структуры Вселенной)

$$D\approx 3(A_-/A_+)y^{-1}|\cos y|\text{при } A_-\gg A_+\text{и } 1\ll y\ll A_-/A_+;$$

2) при $A_-\ll A_+$ функция $D(y)$ падает $\propto y^2$ в сторону малых y, пока $D\gg D(0)$ и имеет глубокий минимум при $y=\sqrt{5A_-/2A_+}$, ее значение в этом минимуме $\sim D(0)(A_-/A_+)^{1/2}$ (аналогичный эффект был замечен в численных расчетах для полиномиальных потенциалов [12]).

Спектр (10) при $A_-/A_+=3-3{,}5$ и $k_0^{-1}=(100-150)h_{50}^{-1}$ Mpc хорошо объясняет наблюдательные данные по $\delta\rho/\rho$ и пекулярным скоростям в больших масштабах и не противоречит верхним пределам на $\Delta T/T$ во всем диапазоне углов [16] (при этом параметр смещения на масштабах $< 10h_{50}^{-1}$ Mpc должен быть $b = 2,2-2,5$). Критическим тестом для этого спектра является величина $\Delta T/T$ в области больших углов; в частности, ожидаемая величина квадрупольной анизотропии $(\Delta T/T)_Q \approx (6-7)\cdot 10^{-6}h_{50}^{-1}$. Так как для модели холодных частиц $h_{50} \leq 1,3$ (из-за возраста Вселенной), то спектр (10) можно считать заведомо опровергнутым, если наблюдения покажут, что $(\Delta T/T)_Q < 3\cdot 10^{-6}$. Тогда для объяснения наблюдений, если оставаться в рамках гипотезы о наличии локальных особенностей у $V(\varphi)$, надо переходить к следующей по степени неаналитичности особенности - сглаженному скачку $V(\varphi)$.

Будем считать, что величина скачка $\Delta \ll V_0$ (тогда снова будут нарушаться только первые неравенства в (1,3)) и значения $dV/d\varphi$ вдали от точки особенности $\varphi = \varphi_0$ равны (последнее предположение принято для простоты и легко может быть опущено). Тогда

$$V(x) = V_0 + Ax + v(x), \quad v(x) \approx \Delta/2, \quad x \gg x_0, \\ \approx -\Delta/2, \quad x < 0, \quad |x| \gg x_0, \tag{11}$$

$$x = \varphi - \varphi_0, \quad v(0) = 0, \quad A > 0, \quad \Delta > 0.$$

Из (3) и (4) следует, что $H_0^3 \ll A \ll G^{-1/2}H_0^2$; (3) нарушается при $|x| \lesssim x_0$, если $\Delta \gtrsim H_0^2 x_0^2$. Кроме того, чтобы изменение $\dot{x}$ было существенным, необходимо, чтобы $\Delta \gtrsim A^2 H_0^{-2}$. Отсюда следует, что $x_0 \ll G^{-1/2}$ и $\Delta \gg H_0^4$. Далее принимаются сильные неравенства $\Delta \gg H_0^2 x_0^2$ и $\Delta \gg A^2 H_0^{-2}$.

В этом случае величина m_{eff}^2 в (7) обладает более сильной особенностью, чем δ-функция, в формальном пределе $x_0 \to 0$ (основной вклад по-прежнему вносит член $d^2V/d\varphi^2$). Поэтому ответ для спектра оказывается неуниверсальным, то есть зависящим от формы $v(x)$ и величины x_0. Опуская выкладки, приведем результат. Если $A \gg H_0^2 x_0$, то функция $D(k/k_0)$ в (10) (где следует положить $A_+ = A_- = A$) имеет вид плато с плоской вершиной и наложенными модуляциями: $D(y) = \frac{3\sqrt{2\Delta}H_0}{A}|\sin y| \gg 1$ при $1 \ll y \ll A/H_0^2 x_0$. При $y \ll 1$ величина $D(y) \propto y^2$, пока $D \gg 1$. Величина $D(y)$ имеет глубокий минимум при $y^2 = \frac{5A}{H_0\sqrt{2\Delta}} \ll 1$. Закон падения $D(y)$ при $y > A/H_0^2 x_0$ зависит от асимптотики величины $\tilde{v} = \frac{\Delta}{2} - v(x)$ при $x \to \infty$. Если $\tilde{v} \propto \exp(-x/x_0)$ при $x \to \infty$, то

$$D(y) = \frac{3\sqrt{2\Delta}H_0}{A}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}|\sin y|, \qquad \delta = \frac{6H_0^2 x_0 y}{A}, \tag{12}$$

при $y \gg 1$ и $D \gg 1$, так что $D(y) \propto y^{-1}$ при $y \gg A/H_0^2 x_0$. Если же $\tilde{v} \propto x^{-\gamma}$, то $D(y) \propto y^{-\gamma/(\gamma+2)}$.

При $A < H_0^2 x_0$ плато на вершине горки исчезает, максимальное значение $D(y) \sim \sqrt{\Delta}/H_0 x_0 \gg 1$ при $y \sim 3$, а законы падения в обе стороны те же, что и в предыдущем случае. Отметим, что для растянутого скачка потенциала, когда область скачка проходится за время, большее H_0^{-1}, ответ оказывается прямо противоположным - яма в спектре вместо горки [17].

1. А.А.Старобинский, Письма в ЖЭТФ **30**, 719 (1979).
2. S.W.Hawking, Phys. Lett. **B115**, 295 (1982); A.A.Starobinsky, Phys. Lett. **B117**, 175 (1982); A.H.Guth, and S.Y.Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982).
3. В.Н.Лукаш, ЖЭТФ **79**, 1601 (1980); В.Ф.Муханов, Г.В.Чибисов, Письма в ЖЭТФ **33**, 549 (1981).
4. А.А.Старобинский, Письма в Астрон.ж. **9**, 579 (1983).
5. S.J.Maddox, G.Efstathiou, W.J. Sutherlan and J.Loveday, Mon. Not. Roy. astr. Soc. **242**, 43P. (1990); G.Efstathiou et al. Mon. Not. Roy. astr. Soc. **247**, 10P (1990); W.Saunders et al. Nature **349**, 32 (1991).

6. J.P.Ostriker, and Y.Suto, Astroph. J. **348**, 378 (1990); E.Bertschinger, A.Dekel, S.M.Faber et al., Astroph. J. **364**, 370 (1990).
7. L.Kofman, E.Bertschinger, J.Gelb et al., Astroph. J. 1992, in press.
8. P.Meinhold, and P.Lubin, Astroph. J. **370**, L11 (1991).
9. А.А.Клыпин, М.В.Сажин, И.А.Струков, Д.П.Скулачев, Письма в Астрон. ж. **13**, 259 (1987); G.F.Smoot et al., Astroph. J. **371**, L1 (1991); S.S.Meyer, E.S.Cheng, and L.A.Page, Astroph. J. **371**, L5 (1991.
10. L.A.Kofman, A.D.Linde, and A.A.Starobinsky, Phys. Lett. B**157**, 361 (1985); L.A.Kofman, and A.D.Linde, Nucl. Phys. B**282**, 555 (1987); J.Silk and M.S.Turner, Phys. Rev. D**35**, 419 (1987).
11. А.А.Старобинский, Письма в ЖЭТФ **42**, 124 (1985).
12. H.M.Hodges, G.R.Blumenthal, L.A.Kofman, and J.R.Primack, Nucl. Phys. B**335**, 197 (1990).
13. M.Sasaki, Progr. Theor. Phys. **70**, 394 (1983).
14. В.Ф.Муханов, ЖЭТФ **94**, 1 (1988).
15. Е.М.Лифшиц, ЖЭТФ **16**, 587 (1946); Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, М.: Наука, 1973.
16. Н.И.Арзамасова, А.А.Старобинский, Письма в Астрон. ж. 1992 в печати.
17. D.S.Salopek, J.R.Bond, and J.M.Bardeen, Phys. Rev. D**40**, 1753 (1989); V.F.Mukhanov, and M.I.Zelnikov, Phys. Lett. B**263** 169 (1991).