Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.9, стр.505 - 508 10 мая 1992 г.

ФУРЬЕ АППРОКСИМАЦИИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И ТОЧНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Н.А.Иногамов

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН, 117334, Москва

Поступила в редакцию 16 марта 1992 г.

Исследована задача об асимптотическом поведении гидродинамической Рэлей-Тейлоровской неустойчивости. Решение строится разложением в ряд Фурье. Выведена система уравнений на амплитуды гармоник до шестой включительно. Эту алгебраическую систему с высоким порядком нелинейности удается решить точно.

Кавитация, инерционный термоядерный синтез, перспективные энергетические программы, физика высоких плотностей энергии, астрофизические явления - вот краткий перечень приложений, в которых важны неустойчивости рэлей-тейлоровского (РТН) типа [1-11]. Анализом неустойчивости занимались известные исследователи, такие как Рэлей, Рябушинский, Тейлор, Биркгоф и др. В этом анализе важное место занимает теория стационарной стадии развития РТН. Она давно является объектом интенсивных исследований [12-19]. Все же, несмотря на эти усилия, вопрос о стационаре оставался по существу без определенного ответа. Во-первых, до сих пор не было предъявлено сходящейся последовательности приближений и вопрос о существовании являлся открытым. Во-вторых, спорным оставался вопрос о том, является ли решение точечным или однопараметрическим. С точки зрения авторов работ [13,14] и некоторых других решение является точечным. С другой точки зрения [15,16,18,19] - однопараметрическим. Предположение об однопараметричности, высказанное в [15], оставалось гипотезой, не подкрепленной ни одним количественным аргументом.

В предлагаемой работе представлены убедительные количественные аргументы, из которых следует, во-первых, что решения существуют и, во-вторых, что они (I) образуют однопараметрическое семейство и (II) являются единственным таким семейством.

Задача заключается в отыскании аналитического комплексного потенциала $f(z)$, $z = x + iy$, удовлетворяющего кинематическое и динамическое граничные условия [14-17]. Разложим f в ряд Фурье

$$f(z;\vec{A}) = \sum_{n=1}^{N}(e^{inz} - 1 - inz)A_n/n, \quad f = \varphi + i\psi, \quad \vec{A} = A_1, ..., A_N. \tag{1}$$

Ось y направим против $\vec{g}$. Единица длины - $1/k$, времени - $1/\sqrt{gk}$. Калибруем ψ и p так, чтобы через точку торможения $z = 0$ проходили нулевые линия тока $\psi(x,y;\vec{A}) = 0$ и нулевая изобара $p(x,y,;\vec{A}) = 0$. Разложения функций ψ и p, следующие из (1), имеют вид

$$\psi = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\psi_{sp}x^{2s}y^p; \quad p = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}p_{sp}x^{2s}y^p, \tag{2, 3}$$

$$\psi_{sp} = (-1)^{s+p}M_{2s+p}/(2s+1)!/p!, \quad M_k = \sum_{n=1}^{N}n^k A_n$$

$$p_{sp} = \frac{(-1)^{s+p}}{(2s)!p!}[\sum_{i=0}^{2s}\sum_{j=0}^{p}(-1)^i C_{2s}^i C_p^j M_{2s+p-i-j} M_{i+j} - 2M_{2s+p}M_0]$$

$$\psi_{00} = 0, \quad p_{00} = 0, \quad p_{01} = 2, \quad C_N^n = N!/n!/(N-n)!$$

Преобразуем уравнения $\psi = 0$ и $p = 0$, задающие нулевые функцию тока и изобару в неявном виде, к явному виду $y = y_\psi(x;\vec{A})$ и $y = y_p(x;\vec{A})$ соответственно. Граничные условия будут выполнены, если при фиксированном $\vec{A}$ будет выполняться

$$y_\psi(x;\vec{A}) \equiv y_p(x;\vec{A}); \quad y_\psi = \sum_1 \psi_n x^{2n}, \quad y_p = \sum_1 p_n x^{2n}. \tag{4}$$

Из (4) следует искомая система алгебраических уравнений

$$\psi_n = p_n; \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}(\hat{\psi}) = \vec{\psi}[\hat{\psi}(\vec{M})] = \vec{\psi}\{\hat{\psi}[\vec{M}(\vec{A})]\} = \vec{\psi}(\vec{A}), \quad \vec{p} = \vec{p}(\vec{A}), \tag{5}$$

где $\vec{\psi} = \psi_1, \ldots, \vec{p} = p_1, \ldots, \hat{\psi} = \{\psi_{sp}\}$, $\hat{p} = \{p_{sp}\}$, $\vec{M} = M_0, \ldots$. Функции $\psi_n(\hat{\psi})$ и $p_n(\hat{p})$ являются идентичными функциями своих аргументов ψ_{sp} и p_{sp}, соответственно. Функции ψ_n, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ содержат однородные формы от аргументов ψ_{sp} порядка $(2n-1)$ и состоят после приведения подобных членов из, соответственно, 1,3,9,21 и 61 слагаемых. Выражения эти очень громоздки и поэтому не приводятся.

Подставляя вместо $\hat{\psi}$ и $\hat{p}$ в ψ_n и p_n, соответственно, их выражения (2,3) через моменты $\vec{M}$ и приравнивая их согласно (5), после громоздких преобразований приходим к следующим уравнениям

$$\vec{U}(\vec{M}) = \vec{U}[\vec{M}(\vec{A})] = \vec{U}(\vec{A}) = 0, \quad \vec{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\} \tag{6}$$

$$U_1 = 3X^3 - Y, \quad U_2 = -90M_3XY + 9M_4X^2 + 95Y^3$$

$$U_3 = -189M_3M_4X^3 + 27M_6X^4 - 567M_5X^3Y + 2394M_4X^2Y^2 - 2345Y^5$$

$$U_4 = 11340M_3^2M_4X^4 - 3402M_4M_5X^5 - 1620M_3M_6X^5 + 135M_8X^6 - 37800M_3^3X^3Y +$$
$$+27216M_4^2X^4Y - 4860M_7X^5Y + 35910M_3M_4X^3Y^2 + 37530M_6X^4Y^2 +$$
$$+157500M_3^2X^2Y^3 - 45990M_5X^3Y^3 - 261765M_4X^2Y^4 - 259350M_3XY^5 + 434000Y^7$$

$$U_5 = 38971625Y^9 - 243X^8M_{10} - 12843600XY^7M_3 - 4088700X^2Y^5M_3^2 +$$
$$+6237000X^3Y^3M_3^3 - 1247400X^4YM_3^4 - 37525950X^2Y^6M_4 +$$
$$+22609125X^3Y^4M_3M_4 - 9854460X^4Y^2M_3^2M_4 + 374220X^5M_3^3M_4 +$$
$$+4571721X^4Y^3M_4^2 + 1347192X^5YM_3M_4^2 - 56133X^6M_4^3 - 4480245X^3Y^5M_5 +$$
$$+415800X^4Y^3M_3M_5 + 1122660X^5YM_3^2M_5 + 149688X^5Y^2M_4M_5 -$$
$$-224532X^6M_3M_4M_5 + 2133945X^4Y^4M_6 - 873180X^5Y^2M_3M_6 -$$
$$-53460X^6M_3^2M_6 - 368874X^6YM_4M_6 + 16038X^7M_5M_6 + 516780X^5Y^3M_7 +$$
$$+16038X^7M_4M_7 - 164835X^6Y^2M_8 + 4455X^7M_3M_8 + 13365X^7YM_9.$$

Пожалуй самое поразительное обстоятельство заключается в том, что громоздкую сильно нелинейную систему уравнений (6) оказывается возможным решить точно. Приведем решения этих уравнений в случаях $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ и $N = 5$ гармоник. Оказывается, что основной вклад в нелинейность вносят первые два момента $X = M_1$ и $Y = M_2$.

Сделаем замену переменных $X = -1/W/\sqrt{R}$, $Y = -3/W/R/\sqrt{R}$. Величины W и R равны, соответственно, скорости подъема пузырей и радиусу кривизны границы в точке $z = 0$.

По моментам M_n, $n > 2$ порядок уравнений U_k с индексом k оказывается равным k. Это позволяет построить алгебраическую процедуру последовательного исключения старших моментов.

Решения при $N = 2$ и $N = 3$ имеют, соответственно, следующий вид

$$W = \frac{3(R-1)}{2R\sqrt{R}}, \quad W = \frac{135(4R^3 - 27R^2 + 36R - 19)}{(324(R-5)R)^{5/2}}. \tag{7, 8}$$

При $N = 4$ решение находится из уравнения, которое имеет вид

$$a(R)W^2 + b(R)W + c(R) = 0 \tag{9}$$

$$a = 4032R^7, \quad b = 120R^{7/2}(4389 - 5509R + 2385R^2 - 477R^3 + 20R^4)$$

$$c = -175(-3618 + 14325R - 24570R^2 + 23970R^3 - 13190R^4 + 3861R^5 - 558R^6 + 24R^7).$$

При $N = 5$ решение находится из кубического уравнения по формулам Картана. Это уравнение имеет вид

$$AW^3 + BW^2 + CW + D = 0 \tag{10}$$

$$A = -2764800R^{27/2}(21 + R)^2(-21 + 5R)$$

$$B = 80640R^9(224056224 - 399930111R + 298384050R^2 - 114697920R^3 + 22361580R^4 - 2159139R^5 + 74666R^6 + 6150R^7)$$

$$C = 2352R^{9/2}(-242330493741 + 1077546374055R - 2102913782685R^2 + 2378472067535R^3 - 1737136829925R^4 + 858834704067R^5 - 291009641115R^6 + 66242771685R^7 - 9503032410R^8 + 750812250R^9 - 19358676R^{10} - 1113840R^{11} + 28000R^{12})$$

$$D = -343(-1233120806973 + 10258653190050R - 39590410528134R^2 + 93960585281430R^3 - 153346137297426R^4 + 181575828795132R^5 - 159859650164000R^6 + 105490798752108R^7 - 52083469287405R^8 + 19054230016122R^9 - 5066474615490R^{10} + 944934061950R^{11} - 115544972124R^{12} + 8014545000R^{13} - 177358896R^{14} - 10278144R^{15} + 345600R^{16}).$$

R	2,01	2,21	2,61	3,41
$W(4)$	0,5604	0,5765	0,5997	0,6252
$W(5)$	0,5638	0,5776	0,6004	0,6274
$a_1(4)$	−0,7747	−0,8552	−0,9820	−1,1447
$a_1(5)$	−0,8013	−0,8748	−1,0185	−1,2470
$a_2(4)$	−0,2099	−0,1427	−0,0347	0,0847
$a_2(5)$	−0,1484	−0,0889	0,0723	0,3863
$a_3(4)$	0,0025	0,0177	0,0475	0,1310
$a_3(5)$	−0,0508	−0,0343	−0,0591	− 0,1723
$a_4(4)$	−0,0179	−0,0198	−0,0308	− 0,0709
$a_4(5)$	0,0031	−0,00092	0,0062	0,0369
$a_5(5)$	−0,0026	−0,0011	−0,0009	− 0,0039

Результаты расчетов по формулам (7–10) после отбора корней и вычисления амплитуд $\vec{A}$ приведены в таблице. Индекс в скобках указывает значение N. Амплитуды $\vec{A}$ нормированы на скорость $\vec{a} = \vec{A}/W$. Как показывает анализ, имеется быстрая, примерно экспоненциальная сходимость. Это указывает на существование решения. Исследование всех имеющихся корней, возможное здесь в силу того, что получено полное алгебраическое решение, показывает, что сходящееся решение единственно. Сходящиеся решения имеют вид однопараметрического семейства. Параметр λ, пробегающий семейство, ограничен в некоторых пределах. Если в качестве λ выбрать радиус R, то оказывается, что приближения сходятся при $R_{crit} < R < R_{max}$, где $R_{crit} = 1,97 \pm 0,07$, а величина R_{max} определяется числом учтенных гармоник N и растет с ростом N.

Вычисления приведены по программе компьютерных аналитических преобразований [20] на ПЭВМ класса PC AT 386/7 с ОЗУ 8 Мб.

Отметим, что появление полиномиальных уравнений типично при галеркинских аппроксимациях динамических систем. Порядок полиномов быстро возрастает с улучшением качества аппроксимации. Полученные результаты, тесно связанные с методом Гребнера решения таких уравнений, указывают на то, что аппроксимирующие уравнения могут быть решены точно даже при достаточно высоких порядках аппроксимации.

Автор выражает благодарность С.И.Анисимову, О.М.Белоцерковскому, А.Ю.Демьянову, А.В.Михайлову и А.В.Чехлову за полезные обсуждения.

1. D.Riabouchinsky, Comptes Rendus de l'academie des sciences, **184**, 583 (1927).
2. E.G.Gamaly, A.P.Favorsky, A.O.Fedyanin et al., Laser and Particle Beams **8**, 399 (1990).
3. В.Б.Розанов, И.Г.Лебо, С.Г.Зайцев и др., Препринт ФИАН, М., 1990, N56, 63 с.
4. А.Б.Будько, А.Л.Великович, М.А.Либерман, Ф.С.Фелбер ЖЭТФ **96**, 140 (1989).
5. С.А.Гребенев, Р.А.Сюняев, Письма в Астр.ж. **13**, 945 (1987).
6. К.И.Бабенко, В.Ю.Петрович, Докл. АН **245**, 551 (1979).
7. В.В.Андронов, С.М.Бахрах, Е.Е.Мешков и др., ЖЭТФ **71**, 806 (1976).
8. Ю.А.Кучеренко, Г.Г.Томашев, Л.И.Шибаршов, Вопр. атомной науки и техники **1**, 13 (1988).
9. Н.Н.Анучина, М.Г.Анучин, В.И.Волков и др., Матем. моделирование **2**, 3 (1990).
10. H.Takabe, K.Mima, L.Montierth, and R.L.Morse, Phys. Fluids **28**, 3676 (1985).
11. S.Atzeni, Laser and Particle Beams **8**, 227 (1990).
12. D.T.Dumitrescu, Z. angew. Math. Mech. Bb. **23**, 139 (1943).
13. R.M.Davies, and G.Taylor, Proc. Roy. Soc. (London, Ser. A) **200**, 375 (1950).
14. D.Layzer, Astrophys. J. **122**, 1 (1955).
15. P.R.Garabedian, Proc. Roy. Soc. (London, Ser. A) **241**, 423 (1957).
16. G.Birkhoff, and D.Carter, J. of Math. and Mech. **6**, 769 (1957).
17. H.J.Kull, Phys. Rev. Lett. **51**, 1434 (1983).
18. J.-M.Vanden-Broeck, Phys. Fluids **27**, 1090 (1984).
19. С.Я.Герценштейн, В.М.Чернявский, Ю.М.Штемлер, Докл. АН, **307**, 819 (1989).
20. S.Wolfram, Mathematica., N.Y.1988.