

КОНТУРНАЯ ДИНАМИКА КОНВЕКЦИИ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

О.П.Погоуце, А.В.Грузинов

*Институт атомной энергии им. И.В.Курчатова
123182, Москва*

Поступила в редакцию 16 марта 1992 г.

Показано, что конвекция в диверторной области токамака может быть описана в терминах контурной динамики. Приведены результаты численного моделирования контурных уравнений соответствующие всплывающей горячей трубке и неустойчивости ступенчатого профиля температуры.

1. В экспериментах ^{1,2} наблюдались всплывающие горячие трубки плазмы в диверторной области токамака. Мы покажем, что модельная система уравнений плазменной конвекции описывающая это явление допускает, в некоторых случаях, введение контурной динамики. Будут представлены результаты численного моделирования контурных уравнений, отвечающие всплывающей трубке и неустойчивости ступенчатого профиля температуры (4).

2. Подробный вывод системы уравнений конвекции в диверторной области и анализ условий применимости можно найти в ³. Мы только наметим процедуру вывода исходных уравнений.

Магнитное поле считаем параллельным оси z . Используем стандартный для теории плазмы способ вывода нелинейных уравнений в магнитном поле. В уравнение непрерывности тока

$$\partial_z j_z + \nabla \vec{j}_\perp = 0, \quad (1)$$

подставим продольный ток из закона Ома $j_z = -\sigma \partial_z \phi$. Поперечный ток найдем из поперечного МГД уравнения

$$\rho(\partial_t + \vec{v} \nabla) \vec{v} - \mu \Delta_\perp \vec{v} = -\nabla p + (1/c)[\vec{j}_\perp, \vec{B}], \quad (2)$$

причем в левой части можно подставить скорость дрейфа $\vec{v} = (c/B)[\vec{e}_z, \nabla \phi]$, а в правой нужно учесть неоднородность магнитного поля (которая и приводит к конвекции). Для простоты будем считать, что из двух сомножителей давления $p = nT$ возмущается только температура. В результате получим

$$(\partial_t + (c/B)[\nabla \phi, \nabla]_z) \Delta_\perp \phi = -(\sigma B^2 / \rho c^2) \partial_z^2 \phi + (B^2 / Mc)[\nabla T, \nabla(1/B)]_z + (\mu/\rho) \Delta_\perp^2 \phi. \quad (3)$$

Температуру опишем модельным уравнением теплопроводности

$$(\partial_t + (c/B)[\nabla \phi, \nabla]_z) T = \chi_\perp \Delta_\perp T + \chi_\parallel \partial_z^2 T. \quad (4)$$

После усреднения по z члены с ∂_z^2 заменяются на $-1/L^2$, где L - расстояние вдоль магнитного поля от одной диверторной пластины до другой, а среднее от $\nabla(1/B)$ пропорционально кривизне на наружном обходе тора. Система (3), (4) становится двумерной. Понимая теперь под T возмущение температуры и учитывая ее невозмущенный градиент, найдем в соответствующих нормировках

$$(\partial_t + [\nabla \phi, \nabla]_z) \Delta \phi = \nu_1 \phi + \nu_2 \Delta^2 \phi - \alpha T_y, \quad (5)$$

$$(\partial_t + [\nabla \phi, \nabla]_z) T = -\chi_1 T + \chi_2 \Delta T - \beta \phi_y, \quad (6)$$

где α - эффективная сила тяжести пропорциональная $\nabla(1/B)$, β - нормированный невозмущенный градиент температуры.

Система (5), (6) очень похожа на обычные уравнения двумерной конвекции⁴. При этом потенциал ϕ соответствует функции тока, α - коэффициенту теплового расширения, β в обоих случаях градиент температуры, ν_2 и χ_2 - обычные вязкость и температуропроводность, χ_1 характеризует теплообмен с торцами, а ν_1 , по-видимому, не имеет аналога в случае жидкости.

3. Сделаем теперь решающее упрощение. Предположим, что конвекция медленная, в том смысле, что в (5) вязкие члены много больше инерционных. Если еще пренебречь равновесным градиентом температуры ($\beta = 0$) и поперечной теплопроводностью ($\chi_2 = 0$), то получим в соответствующих нормировках основную систему уравнений

$$T_y = \phi + \Delta^2 \phi, \quad (7)$$

$$(\partial_t + [\nabla \phi, \nabla]_z) T = -\nu T. \quad (8)$$

Интересно отметить, что если вместо (7) написать $T = \phi - \Delta \phi$ и пренебречь правой частью (8), то мы получим известное уравнение Хасегавы-Мима. Систему (7), (8) можно написать в виде одного уравнения

$$(\partial_t + [\nabla \psi_y, \nabla]_z)(\psi + \Delta^2 \psi) = -\nu(\psi + \Delta^2 \psi), \quad (9)$$

где обозначено $\psi_y = \phi$. Замена $\psi \rightarrow e^{-\nu t} \psi$, $-e^{-\nu t} \rightarrow t$, приводит (9) к виду

$$(\partial_t + [\nabla \psi_y, \nabla]_z)(\psi + \Delta^2 \psi) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) допускает введение контурной динамики (см.⁵ и приведенные там ссылки). Именно, пусть в начальный момент времени температура $T = \psi + \Delta^2 \psi$ принимает значения 1 в некоторой области Ω и 0 вне Ω . Тогда для любой точки \vec{R} вне Ω имеем

$$\psi(\vec{R}) = \int_{\Omega} d^2 r G(|\vec{R} - \vec{r}|), \quad (11)$$

где G - функция Грина оператора $1 + \Delta^2$:

$$G(r) = \int dk k(1 + k^4)^{-1} J_0(kr), \quad (12)$$

J_0 - функция Бесселя. Из (11) найдем

$$\phi(\vec{R}) = \int_{\Omega} d^2 r \partial_y G = \int_{\Omega} d^2 r \partial_y G = \int_{\Omega} ds (\partial x / \partial s) G(|\vec{R} - \vec{r}(s)|), \quad (13)$$

где $\vec{r}(s)$ - граница Ω , s - произвольный параметр. Вычислив градиент (13), из $d\vec{r}/dt = \vec{v} \equiv [\vec{e}_z, \nabla \phi]$ получим уравнение движения контура

$$\partial_t \vec{r}(s) = \int ds' (\partial x / \partial s') F(|\vec{r}(s) - \vec{r}(s')|) [\vec{e}_z, \vec{r}(s) - \vec{r}(s')], \quad (14)$$

где функция F получается из функции Грина G :

$$F(r) = (1/r) G'(r) = (1/r) \int dk k^2 (1 + k^4)^{-1} J_1(k\vec{r}), \quad (15)$$

J_1 обозначает функцию Бесселя.

4. Представляется неожиданным, что численное моделирование (14) дает структуры, которые очень похожи на те, что получаются при непосредственном

моделировании полной системы (5), (6)³. Например, в случае начального условия отвечающего ступенчатому профилю температуры - слабо искривленная линия почти параллельная оси x - образуются характерные для конвекции "грибы" (рис.1). Подобные образования получаются и при конвекции жидкости^{6,7}. Начальное условие в виде замкнутого контура дает характерные всплывающие каплевидные образования (рис.2), которые наблюдались при моделировании полной системы (5), (6)³.

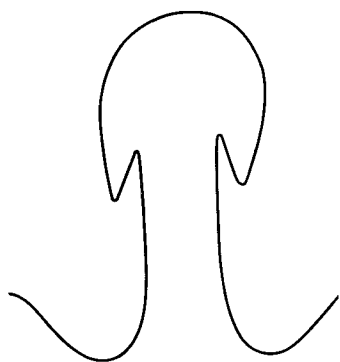


Рис.1.

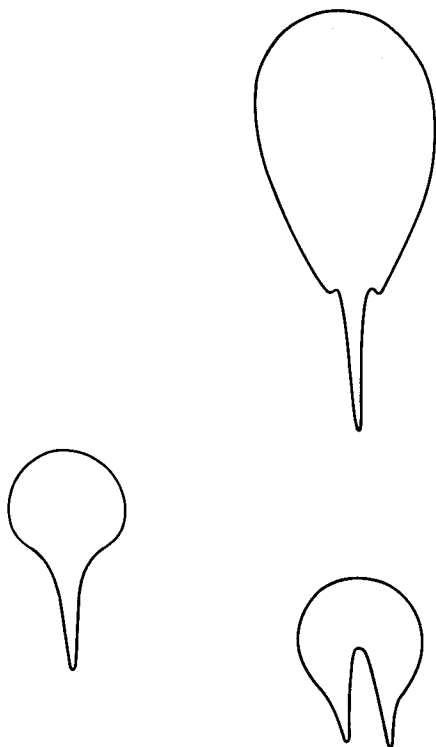


Рис.2.

Рис.1. Грибы образовавшиеся в результате неустойчивости из почти прямого начального контура.

Рис.2. Всплывающие горячие трубки. Начальные контуры были эллипсами.

Нам приятно поблагодарить Н.Н.Кухаркина и М.В.Осипенко за обсуждения работы.

-
1. H.Neydermeyer et al. Proc. 18-th Eur. Conf. Contr. Fus. Plasma Phys. 1, 76 (1991).
 2. С.Е.Bush et al. Preprint PPPL-2743 (1991).
 3. Н.Н.Кухаркин, М.В.Осипенко, О.П.Погуце, Препринт ИАЭ, (1992).
 4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Гидродинамика. М.: Наука, 1980.
 5. А.В.Грузинов, Письма в ЖЭТФ 55, 75 (1992).
 6. L.P.Kadanoff, Phys. Today 44, 9 (1991).
 7. G.Zocchi et al. Phys. A166, 387 (1990).