Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.9, стр.534 - 537 10 мая 1992 г.

СТАТИСТИКА ПЕРЕНОСА ЗАРЯДА В КВАНТОВЫХ ПРОВОДНИКАХ

Л.С.Левитов[1),2)], *Г.Б.Лесовик*[3)]

[1)] *Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН 117334, Москва*

[2)] *Massachusetts Institute of Technology*

[3)] *Институт физики твердого тела РАН 142432, Черноголовка, Московская обл.*

Поступила в редакцию 9 апреля 1992 г.

Дано статистическое описание шума в квантовом резисторе при $T = 0$ на больших временах $t \gg \tau_V = \hbar/eV$. Найдены корреляторы всех порядков и функция распределения протекшего заряда. Показано, что шум определяется отрицательными импульсами тока длительности меньше τ_V, переносящими заряд кратный $e^* = 2e\sqrt{D}$, где D — прозрачность. Статистика импульсов биномиальная, что соответствует распределению вероятностей, возникающему в результате стационарного бернуллиевского случайного процесса.

В микрорезисторах при низких температурах наблюдается шум [1], избыточный по отношению к равновесному найквистовскому. В этот шум есть вклады различной природы: шум $1/f$, телеграфный сигнал от переключения дефектов [2], и флуктуации тока, связанные с дискретностью заряда [3,4]. Последний вклад, известный также под именем "квантовый дробовой шум", и будет нас интересовать. Его спектральная плотность, если эффективен только один канал проводимости, дается формулой [3]

$$S_V(\omega = 0) = \frac{e^2}{\pi^2\hbar} D(1 - D)eV, \qquad (1)$$

где D — прозрачность (квадрат амплитуды прохождения), V — напряжение. Формула (1) обобщается и на многоканальный случай [5]. Представляет интерес изучить статистические свойства этого шума более подробно, чтобы, например, сравнить со статистикой классического дробового шума. Наша цель — получить выражения для высших корреляторов тока, подобные (1). В одноканальном случае мы найдем корреляторы *всех* порядков точно, и, пользуясь ими, полностью опишем статистику флуктуаций заряда. Основной результат состоит в том, что статистика биномиальная, с вероятностями $q, p = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{D})$, и *нецелым* квантом заряда, равным $2e\sqrt{D}$.

Задача ставится так [3]. Одноканальный резистор Ландауэра [6] можно представить как одномерный потенциальный барьер, на который с обеих сторон падают электроны, приходящие из резервуаров — левого и правого. Функции распределения по энергиям в резервуарах фермиевские равновесные: $n_L(E) = \theta(\frac{eV}{2} - E)$, $n_R(E) = \theta(-\frac{eV}{2} - E)$ (мы принимаем $T = 0$). Из-за разницы потенциалов в резервуарах возникает ток $I = 2\frac{e^2}{h}DV$. (Для простоты мы пренебрегаем эффектами кулоновского экранирования [6], а также предполагаем, что прозрачность не зависит от E, что справедливо при $eV \ll \Delta E$, характерного энергетического масштаба изменения D.) Причиной флуктуаций заряда является ферми-статистика электронов и операторный характер тока в квантовой задаче.

Нас интересует заряд $\hat{Q}_t = \int\limits_0^t \hat{I}(x, t')dt'$, протекший за время $t \gg \tau_V = \hbar/eV$. Величины $\hat{Q}_t$ и $\hat{I}(x, t)$ мы записываем через операторы a_p, a_p^+, b_p, b_p^+ уничтожения и рождения левых и правых состояний [3]. Средние вида $\langle \hat{I}(x,t_1)...\hat{I}(x,t_k)\rangle$ вычисляем по обычному рецепту статистического усреднения [7]: а) образуем связи пар операторов a_p, a_p^+, b_p, b_p^+, которым сопоставляем средние $\langle a_p^+ a_{p'}\rangle = n_L(E_p)\delta(p-p')$, $\langle a_p a_{p'}^+\rangle = (1-n_L(E_p))\delta(p-p')$, (аналогично для b_p, b_p^+); б) знак определяем, пользуясь антикоммутативностью операторов; в) суммируем по всем способам расстановки связей. Средние $\langle \hat{Q}_t^k\rangle$ получаем, вычисляя интеграл $\int\limits_0^t ... \int\limits_0^t \langle \hat{I}_1...\hat{I}_k\rangle dt_1...dt_k$. Как обычно, результат усреднения проще всего сформулировать в терминах неприводимых корреляторов $\langle\langle \hat{Q}_t^k\rangle\rangle$, даваемых графиками, в которых связи образуют единую замкнутую петлю. Интегрирование по времени дает множитель t на каждую такую петлю, причем импульсы p на всех связях внутри петли становятся одинаковыми, и остается одно интегрирование по (dp) на петлю. При этом исчезает зависимость от точки x, в которой вычисляется ток I. Далее, нетрудно заметить, что отличный от нуля вклад в среднее вносят только состояния с $-\frac{1}{2}eV < E_p < \frac{1}{2}eV$, что дает еще множитель $2\frac{eV}{2\pi\hbar}$ после интегрирования по p (двойка — результат суммирования по спинам). Итого, получаем $N = \frac{2e}{h}Vt$ на каждую петлю.

Множитель N — это все, что зависит от интегрирования по dt и по dp. Используя этот простой факт, сформулируем правила усреднения несколько иначе, с самого начала избавившись от координатной и временной зависимости усредняемых выражений. Рассмотрим оператор

$$\hat{J} = e\sum_{i=1}^{N} Da_i^+ a_i - Db_i^+ b_i + \Lambda a_i^+ b_i + \Lambda b_i^+ a_i \quad , \tag{2}$$

где a_i, b_i — фермионные операторы, $D = A^2$, $\Lambda = AB$, (A — амплитуда прохождения, B — амплитуда отражения от барьера, $A^2 + B^2 = 1$. Для простоты мы принимаем $A^* = A$, $B^* = B$, — нетрудно проверить, что для комплексных A, B все результаты сохраняются.) Оператор $\hat{J}$ представляет собой оператор тока[3] $\hat{I}(x,t)$ "очищенный" от координатной и временной зависимости, в котором выделены состояния из полосы $|E_p| < \frac{1}{2}eV$, только и дающие вклад в интересующие нас средние. Из сказанного выше вытекает равенство $\langle \hat{Q}_t^k\rangle = \langle \hat{J}^k\rangle$, причем усреднение J^k следует производить по правилам: $\langle a_i^+ a_j\rangle = \langle b_i b_j^+\rangle = \delta_{ij}$, $\langle a_i a_j^+\rangle = \langle b_i^+ b_j\rangle = 0$. Строго говоря, вычисления с оператором (2) имеют смысл только при целом N, но при $N \gg 1$ можно аналитически продолжить результат с целых N на нецелые.

После того как эти правила сформулированы, усреднение любой степени $\hat{Q}_t^k$ сводится к механическому собиранию членов вида $\pm N^L e^k D^m \Lambda^{k-m}$, где L — число замкнутых петель. Приведем ответы для первых четырех неприводимых корреляторов:

$$\langle\langle \hat{Q}_t\rangle\rangle = eDN, \quad \langle\langle \hat{Q}_t^2\rangle\rangle = e^2 D(1-D)N \quad , \quad \langle\langle \hat{Q}_t^3\rangle\rangle = -2e^3 D^2(1-D)N,$$

$$\langle\langle \hat{Q}_t^4\rangle\rangle = 2e^4 D^2(1-D)(3D-1)N, \quad N = \frac{2e}{h}Vt. \tag{3}$$

Мы воспользовались соотношением $D^2 + \Lambda^2 = D$. Первый коррелятор — это просто формула Ландауэра, второй — известный результат (1). Отличие от нуля 3-го и 4-го корреляторов означает, что шум не является гауссовым. Отметим отрицательный знак 3-го коррелятора и то, что коррелятор 4-го порядка меняет знак при $D = \frac{1}{3}$.

Вычислим теперь характеристическую функцию $\chi(\lambda) = \langle exp(-i\lambda \hat{Q}_t)\rangle$. Когда $\chi(\lambda)$ будет найдена, все неприводимые корреляторы можно будет определить, пользуясь известным разложением [8]

$$ln(\chi(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^k}{k!} \langle\langle \hat{Q}_t^k \rangle\rangle.$$

В пределе $N \gg 1$ удается найти $\chi(\lambda)$ точно. Идея вычисления состоит в том, что статистическое усреднение, входящее в определение $\chi(\lambda)$, мы интерпретируем как вакуумное среднее S-матрицы некоторой вспомогательной квантовой задачи.

Рассмотрим систему $2N$-фермионов с гамильтонианом (2), находящуюся в состоянии $|0\rangle$, заданном так: $a_i^+|0\rangle = 0$, $b_i|0\rangle = 0$, $(i = 1, ..., N)$. Найдем проекцию состояния системы на $|0\rangle$ через время λ, то есть вычислим матричный элемент $\langle 0|Texp(-i\int_0^\lambda \hat{J}(\tau)d\tau)|0\rangle$. Как обычно, разложим хронологическую экспоненту в ряд и, воспользовавшись теоремой Вика, запишем средние как произведения T-упорядоченных парных средних. Нетрудно видеть, что T-упорядоченные средние по состоянию $|0\rangle$ *в точности совпадают* со статистическими средними, введенными выше. С другой стороны, поскольку гамильтониан $\hat{J}$ есть сумма N независимых двухфермионных гамильтонианов, S-матрица получается как произведение N коммутирующих двухфермионных S-матриц. Поэтому, интересующий нас матричный элемент есть N-ая степень двухфермионного матричного элемента. В свою очередь, его можно легко найти, воспользовавшись тем, что гамильтониан $\hat{J} = \sum_{i=1}^{N} \hat{J}_i$ сохраняет числа частиц $\hat{n}_i = a_i^+ a_i + b_i^+ b_i$. Это позволяет переписать каждый $\hat{J}_i$ в интересующем нас секторе $n_i = 1$ через матрицы Паули: $\hat{J}_i = eD\hat{\sigma}_i^z + e\Lambda\hat{\sigma}_i^x$. Итак, находим $\chi(\lambda) = \langle\uparrow|exp(-i\lambda e(D\hat{\sigma}^z + \Lambda\hat{\sigma}^x))|\uparrow\rangle^N$, и, вычисляя матричный элемент, окончательно имеем

$$\chi(\lambda) = (cos(\lambda e\sqrt{D}) - i\sqrt{D}sin(\lambda e\sqrt{D}))^N \quad , \qquad (4)$$

Можно проверить, что разложение $ln(\chi(\lambda))$ в ряд по степеням λ воспроизводит корреляторы (3).

Теперь с помощью характеристической функции найдем распределение заряда Q_t: $P_t(Q) = \langle\delta(Q_t - Q)\rangle = \int e^{i\lambda Q}\chi(\lambda)\frac{d\lambda}{2\pi}$. Неожиданное свойство выражения (4) для $\chi(\lambda)$ — периодичность с периодом $\frac{2\pi}{e\sqrt{D}}$ — приводит к квантованию Q_t. Вычисляя $P_t(Q)$ как Фурье-образ $\chi(\lambda)$, имеем дискретное распределение с квантом $2e\sqrt{D}$:

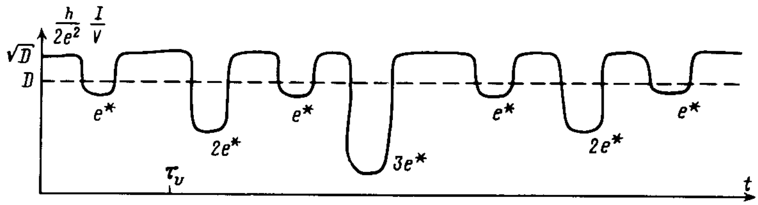
$$P_t(Q) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \;\; \delta(Q-(N-2m)e\sqrt{D}) \;\; , \qquad P_m = p^m q^{N-m} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(N-m+1)} \;\; , \qquad (5)$$

где $q, p = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{D})$. Получилось биномиальное распределение Бернулли, которое мы записали в форме, применимой и для целых, и для нецелых N. Величина N, таким образом, приобретает вероятностный смысл "числа попыток".

Для истолкования полученного распределения естественно предположить, что (5) описывает классический случайный процесс, а не квантовую задачу. Действительно, экспоненциальную временную зависимость характеристической функции (4) привлекательно интерпретировать как результат *стационарности* случайного процесса[9]. Это естественно приводит к представлению о постоянных переходных вероятностях $W_{m \to m'} = \frac{dP_{m'-m}}{dt}\Big|_{t=0}$. Формулы (4),(5) работают при $t \geq \tau_V$, значит корреляционное время процесса $\leq \tau_V$.

Дадим словесное описание возникающей таким образом картины. Величина заряда, протекшего за время t, принимает одно из значений $Q_m(t) = e\sqrt{D}(\frac{2e}{h}Vt - 2m)$, $(m = 0, 1, ...)$. В случайные моменты времени происходят скачки с m на $m' > m$, при этом переносится $m' - m$ квантов $e^* = 2e\sqrt{D}$ в направлении *противоположном* направлению среднего тока. Характерное время между этими импульсами тока порядка τ_V, много больше продолжительности одного импульса. Наиболее вероятное мгновенное значение тока равно $\frac{2e^2}{h}\sqrt{D}V$ и не совпадает со средним $\frac{2e^2}{h}DV$, даваемым формулой Ландауэра (рис.).

Причиной флуктуаций являются корреляции, обязанные принципу Паули, и не связанные напрямую с квантованием электрического заряда. Состояния, участвующие в переносе заряда, полностью делокализованы и имеют вид плоских волн. Поэтому не следует удивляться, что получившийся квант заряда нецелый. В то же время отметим, что природа квантованных импульсов "противотока" остается во многом неясной и требует дальнейшего изучения.



Зависимость тока от времени, соответствующая распределению (5). Средний ток $\frac{2e^2}{h}DV$ меньше наиболее вероятного мгновенного $\frac{2e^2}{h}\sqrt{D}V$. Отрицательные импульсы несут заряд кратный $e^* = 2e\sqrt{D}$

1. Y.P.Li, D.C.Tsui, J.J.Heremans et al., Appl.Phys.Lett., **57**, 774 (1990).
2. C.Dekker, A.J.Scholten, F.Liefrink et al., Phys.Rev.Lett. **66**, 2148 (1991).
3. Г.Б.Лесовик, Письма в ЖЭТФ **49**, 513 (1989).
4. B.Yurke and G.P.Kochanski, Phys.Rev.B **41**, 8184 (1990).
5. M.Büttiker, Phys.Rev.Lett., **65**, 2901 (1990).
6. R.Landauer, In: Localization, Interaction and Transport Phenomena, Eds. Kramer B., Bergmann G., and Bruynseraede Y. Heidelberg: Springer, 1985 **61**, p.38
7. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М.: Физматгиз, 1962, § 12
8. Там же, § 15
9. И.И.Гихман, А.В.Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М.: Наука, 1977.