Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 4, с. 296 – 303

Слабый хаос в фотон-кубитной системе с анизотропным взаимодействием

$\boxed{\text{Ю. Е. Лозовик}}$[+*], *А. М. Сатанин*[*1)]

[+]*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, 127055 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2023 г.
После переработки 16 июля 2024 г.
Принята к публикации 18 июля 2024 г.

Рассматривается обобщенная модель взаимодействия сверхпроводникового кубита с электромагнитным полем резонатора, осуществляемая гибридным образом посредством емкости (электро-дипольное взаимодействие) и индуктивности (магнито-дипольное взаимодействие) – анизотропная модель Раби. Показано, что гильбертово пространство анизотропной модели можно расщепить на два ортогональных по псевдоспину подпространства. При этом спектры гамильтонианов, действующих в этих подпространствах, характеризуются сложным поведением. Представлены аналитические и численные расчеты, раскрывающие природу слабого хаоса в рассматриваемой системе. Обсуждается вопрос о классе универсальности анизотропной модели Раби в иерархии систем с квантовым хаосом, а также о возможных следствиях для квантовой теории измерений.

DOI: 10.31857/S0370274X24080234, EDN: CCXLII

1. Введение. В сверхпроводниковых резонаторах со встроенными искусственными атомами (кубитами) [1, 2] взаимодействие фотонов с кубитами в дипольном приближении может быть описано в рамках модели Раби [3–5]. Как хорошо известно, модель Раби достаточно универсальна, поскольку отражает основные черты взаимодействия фотона с двухуровневыми системами, например, в квантовой оптике, поляритонике и микроволновой сверхпроводниковой электронике (резонатор и кубит) и т.п. Последние результаты в данной области исследований изложены в обзорных статьях [6, 7] и в многочисленных публикациях, которые суммированы в обзоре [8], в котором цитируется 1976 работ. Как видно из [8], многие вопросы теории все еще находятся в стадии изучения. Одна из них связана с существованием хаоса в модели Раби, в том числе обобщенной – анизотропной модели Раби (АМР). Такая модель возникает в микроволновой оптике, когда связь отдельного кубита с одномодовым резонатором осуществляется одновременно как посредством емкости (аналог электро-дипольного взаимодействия), так и посредством индуктивности (аналог магнито-дипольного взаимодействия), т.е. имеет место гибридная связь [9–14]. При такой связи поля с кубитом в ней одновременно участвуют зарядовые и потоковые степени свободы джозефсоновской петли. Для приложений важен вопрос о стабильности работы считывающих устройств кубит-резонатор, в данном контексте вопрос об ограничениях на константы электрической и магнитной связи, при которых возможно нарушение стабильности и хаотизация гибридных возбуждений в АМР [15].

Между тем на данный момент мы не находим определенного ответа на вопросы о том: 1) есть ли хаос в АМР?; 2) и если есть, то как надо это понимать?; 3) что можно сказать о том, к какому классу универсальности принадлежит модель?; 4) какие критерии хаоса позволяют это обосновать? Казалось бы, ответ на эти вопросы можно получить из точных решений, полученных как для модели Раби [16], так и для АМР [10–12]. Проблема состоит в том, что решение уравнения Шредингера для модели Раби и АМР представляются в виде рядов трансцендентных функций, которые на конечном этапе необходимо обрывать, а это приводит (в зависимости от параметров гамильтониана) к заметным сдвигам уровней. Вопрос о хаосе в модели Раби ранее затрагивался в работах [17, 18], где приведены результаты численных расчетов для функции распределения межуровневых расстояний матриц $N\times N$ небольшого размера ($N = 200$ в работе [17] и $N = 501$ в [18]), однако, вопрос о природе хаоса и статистике уровней в [17, 18] полностью не раскрыт. Таким образом, мы можем

[1)]e-mail: asatanin@hse.ru

заключить, что полное понимание вопроса о природе хаоса и его проявлениях в модели Раби и АМР на данный момент отсутствует.

Для ответа на поставленные вопросы мы используем аналитические и численные методы анализа спектра и волновых функций АМР. Проблема, возникающая при изучении хаоса в анизотропной модели, заключается в том, что система обладает скрытой симметрией, которая связана с существованием оператора четности, приводящего к вырождению собственных значений. Решение в случае АМР получается путем обобщения метода, предложенного впервые в работе [19] и использованного (с различными модификациями) многими авторами для модели Раби [7, 12, 18, 20]. В результате получены расщепленные по спину гамильтонианы, удобные для анализа как в случае, когда доминирует электрическое, так и магнитное взаимодействие, и позволяющие исследовать спектральные свойства гамильтониана при слабой и сильной связи кубита с резонатором.

Численные эксперименты показывают, что действующие в этих подпространствах гамильтонианы обладают сложным поведением, поэтому для анализа спектральных свойств целесообразно использовать статистический подход [21–25].

В теории хаоса в классических неинтегрируемых системах наглядные представления о возникновении хаотических областей в фазовом пространстве дает отображение Пуанкаре [26]. В квантовых системах аналогичную роль играет "квантовая паутина" [27], которую мы построили для АМР. Мы обнаружили корреляцию между поведением квантовый паутины и поведением длины локализации гибридизованных фотон-кубитных мод в зависимости от констант связи, что свидетельствует о связи разрушения сохраняющегося интеграла (обобщенной четности) с перестройкой волновой функции.

Мы вычислили также функцию распределения межуровневых расстояний, которая обычно используется для диагностики квантового хаоса [21, 24, 25, 28, 29]. В теории квантового хаоса установлена связь симметрии гамильтониана со статистикой уровней. Чтобы объяснить переход от пуассоновской статистики к вигнеровской, рассматривают ленточные матрицы (b-матрицы). Меняя ширину ленты, b, можно наблюдать переход от пуассоновской статистики (волновая функция состояний локализована) к вигнеровской статистики (волновая функция делокализована). Чтобы воспользоваться этим подходом для АМР модели, где ширина полосы фиксирована, а диагональные элементы сильно меняются в зависимости от номера, мы совершаем дополнительное когерентное преобразование, которое позволяет перестроить "нулевое" приближение, своеобразно экранирующее знакопеременные диагональные элементы матрицы. Показано, что с ростом констант связи происходит увеличение степени разветвленности матрицы и изменение статистики матричных элементов. В этом базисе матрица АМР превращается в древовидную матрицу, у которой плотность уровней растет с ростом номера и имеет конечное среднее расстояние, а межуровневые расстояния распределены в конечном интервале.

2. Анизотропная модель Раби и ее предельные аналоги. Обычно в электродинамике квантовых цепей (circuit QED) для реализации схемы считывания используется емкостная связь кубита с резонатором [1, 2]. Ранее в квантовой оптике также обсуждалась дипольная связь атома (квантовая электродинамика оптической ячейки, cavity QED), которая соответствует изотропной модели Раби [3–5]. Обобщение механизма связи может быть легко реализовано с помощью схемы, в которой вместо емкости используется LC-контур [7, 14]. В этом случае для описания связи кубита с резонатором может быть сформулирована обобщенная модель Раби, гамильтониан которой в системе единиц с $\hbar = 1$ имеет вид:

$$H_{AR} = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + g_e(a^\dagger + a)\sigma_x + i g_m(a - a^\dagger)\sigma_y, \quad (1)$$

где $a^\dagger$ и a – операторы рождения и уничтожения фотонов; σ_z σ_x σ_y – матрицы Паули. Выписанные слагаемые имеют ясный физический смысл: первое описывает фотонную моду резонатора, второе – кубит, а два последних отвечают за электро-дипольное и магнито-дипольное взаимодействия; g_e и g_m – константы связи. В квантовой оптике последние слагаемые соответствовали бы взаимодействию между электрическим полем и диполем (типа $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$) и магнитным полем и магнитным моментом (типа $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$).

Нас будут интересовать поведение системы в зависимости от соотношения констант связи g_e и g_m (выраженных в единицах ω) при близких частотах кубита ω_q и резонатора ω. Отметим, что унитарным преобразованием в псевдоспиновом пространстве всегда можно изменить знаки констант связей, поэтому можно ограничиться рассмотрением только области $g_e > 0$ и $g_m > 0$ в пространстве параметров. Отменим также, что путем поворота в псевдоспиновом пространстве можно получить дуальное представление, в котором g_e и g_m в гамильтониане (1) меняются местами.

При $g_e = g_m = 0$ гамильтониан (1) диагонален в базисе $\mid n\rangle \otimes \mid \sigma\rangle$, где $\mid n\rangle$ – фоковский вектор, а

$| \sigma\rangle$ – собственный вектор псевдоспинового оператора σ_z. При этом собственные значения $E_{n,\sigma} = \omega n + \frac{\omega_q}{2}\sigma$ представляют собой две серии эквидистантных уровней (ωn, при $n = 0, 1, 2\ldots$), сдвинутых на ωn. Важное свойство анизотропной модели проявляется при $g_e = g_m = g/2$, когда вместо (1) имеем:

$$H_{AR} -> H_{JC} = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_q}{2}\sigma_z + g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+), \quad (2)$$

где $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$.

Данный случай точно соответствует модели Джейнса–Каммингса, которая является полностью интегрируемой. Это отражается и в том факте, что с гамильтонианом (2) коммутирует однопараметрический оператор $\Pi(\theta) = \exp{(i\theta C/\omega)}$, где

$$C = \omega\left(\frac{\sigma_z}{2} + a^\dagger a\right), \quad (3)$$

$0 < \theta < 2\pi$, что означает наличие непрерывной группы симметрии. Нетрудно показать, что спектр (2) состоит из серии "дублетов":

$$E_{\pm,n} = \omega(n + 1/2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_q - \omega)^2 + 4g^2(n+1)} \quad (4)$$

и низшего невырожденного уровня: $E_{+,0} = \frac{\omega_q}{2}$ [4].

Напомним кратко, что происходит с увеличением константы связи кубита с полем в модели Раби, когда модель Джейнса–Каммингса не применима. В этом случае в эффективном гамильтониане необходимо учитывать контр-вращательные слагаемые, которые ответственны за такие эффекты, как сдвиг частоты Блоха–Зигерта [7] или динамический эффект Лэмба [30, 31].

В общем случае ($g_e \neq g_m$) с анизотропным гамильтонианом (1) коммутирует только оператор комбинированной четности

$$\Pi(\pi) = \exp{(i\pi C/\omega)} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\sigma_z\right)R, \quad (5)$$

где

$$R = (-1)^{a^\dagger a} = \cos(\pi a^\dagger a). \quad (6)$$

Обобщая метод [19], совершим унитарное преобразование

$$\bar{H}_{AR} = S_e^{-1} H_{AR} S_e \quad (7)$$

с оператором "электрического" поворота $S_e = \frac{1}{2}((1 - R)\sigma_z - i(1+R)\sigma_y)$, позволяющее явно расщепить состояния $\bar{H}_{AR}$ на два ортогональных по четности подпространства:

$$\bar{H^e}_{AR} = \omega a^\dagger a + g_e(a^\dagger + a) - \sigma_z\left(\frac{\omega_q}{2} + g_m(a^\dagger - a)\right)R. \quad (8)$$

Аналогично можно использовать "магнитный" поворот, определяемый $S_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_z)S_e$, который приводит к выражению

$$\bar{H^m}_{AR} = \omega a^\dagger a - i g_m(a^\dagger - a) - \sigma_z\left(\frac{\omega_q}{2} + g_e(a^\dagger + a)\right)R. \quad (9)$$

Из полученных выражений видно, что в псевдоспиновом базисе $| \sigma\rangle$ оператор гамильтониана анизотропной модели Раби имеет блочный вид. В то же время, каждый блок в фоковском базисе содержит недиагональные элементы, причем относительный вклад этих элементов определяется параметрами g_e и g_m.

Ограничимся подробным анализом гамильтониана после "электрического" поворота. В новом базисе оператор C принимает вид

$$\bar{C} = \omega\left(-\frac{R\sigma_z}{2} + a^\dagger a\right), \quad (10)$$

а его диагональные элементы $\bar{C}$ определяются выражением:

$$C_n \equiv \langle n \mid \bar{C} \mid n\rangle = \omega\left(-\frac{(-1)^n}{2}\sigma + n\right). \quad (11)$$

Как видно, оператор (10) коммутирует с $\bar{H}_{AR}$ только при $g_e = g_m = g/2$, что соответствует случаю непрерывной симметрии в модели Джейнса–Каммингса, когда спектр сводится к дублетам. Если же $g_e \neq g_m$, то будет происходить перемешивание состояний гамильтониана (8), связанное с "разрушением" дополнительного интеграла движения. Отсутствие общего базиса у гамильтониана анизотропной модели Раби $\bar{H}_{AR}$ и $\bar{C}$ дает наглядную картину сложного поведения системы. Для случая $g_e = g_m = g/2$ согласно аналитическому решению для (4) все состояния локализованы в "фоковских" узлах с энергиями $E_n \equiv E_{\pm,\sigma}$.

Иными словами, наличие коммутирующего с $\bar{H}_{AR}$ оператора $\bar{C}$ свидетельствует о регулярном поведении системы, а его разрушение указывает на зарождение хаоса. Такое поведение будет подробней проиллюстрировано в следующем разделе путем построения квантовой паутины [27].

3. Квантовая паутина и длина локализации. В классической теории хаоса, например, при анализе модели Хенона–Хейлса, первым шагом при осуществлении диагностики хаоса является построение отображения Пуанкаре. В этом случае можно видеть как при изменении параметра нелинейности неустойчивые траектории (сепаратрисы) покрываются стохастическим слоем [26].

Мы проиллюстрируем подобное поведение путем построением “квантовой паутины” [27], изображая траекторию или сетку собственных значений в плоскости (спектр гамильтониана $\bar{H}_{AR}$, спектр $\bar{C}$). Смысл построения квантовой паутины разъясняется в работе Переса [27], а примеры использования для спиновых систем можно найти в [32].

Очевидно, что точки на плоскости, определяемые (C_n, E_n) при изменение номера n – дискретные “траектории” в интегрируемом случае, при $g_e = g_m$, ложатся на значения, определяемые (11) и (4) в модели Джейнса–Каммингса, тогда как нарушение симметрии приведет к перемешиванию состояний, т.е. делокализации. Как и в теории андерсоновской локализации, полезную информацию о распространении волновой функции по базисным фоковским “узлам” дает Inverse Parti-cipation Ratio (IPR), или обратная к ней величина – длина локализации, которую определим как $l_n = (\sum_j |\psi_n(j)|^4)^{-1}$, где $\psi_n(j)$ – собственный вектор (8). Интересно установить связь между поведением длины локализации и структурой квантовой паутины.

Результаты численных расчетов сеток (C_n, E_n) и (l_n, E_n) при фиксированном значении $g_e = 0.5$ и при двух значениях магнитной константы связи представлены на рис. 1. Здесь и далее константы связи g_e и g_m измеряюся в единицах ω, а частота кубита $\omega_q = 1.1$, что соответствует резонансному взаимодействию.

Как видно из рис. 1, при $g_e = g_m = 0.5$ траектории на рис. $(c1)$ параметрически зависят от номера и следуют выражениям (4) и (11). Очевидно, что в том случае состояния локализованы на узлах. При $g_e = 0.5, g_m = 0.15$ и при заданном номере мы используем численные значения для собственных значений и собственных векторов матрицы (8) E_n и C_n согласно (11), которые далее изображаем на рисунке рис. 1 $(c2)$. В этом случае наблюдается серия пересечений траекторий. Например, стрелками показано пересечение траекторий при $n = 54$. Как видно, при таких пересечениях или сближениях траекторий длина локализации сильно возрастает.

Более общая ситуация изображена на рис. 2, где выполнено численное моделирование траекторий (C_n, E_n) и (l_n, E_n) при фиксированном значении $g_e = 1.25$ и при изменении g_m. На рисунке 2 $(c1), (l1)$: $g_m = 0.05$; на рис. 2 $(c2), (l2)$: $g_m = 0.15$; на рис. 2 $(c3), (l3)$: $g_m = 0.25$. Размер матрицы $N \times N = 3000 \times 3000$ (для наглядности приведены данные для первых 500 уровней). В этом случае с ростом g_m наблюдается пересечение узлов сетки траекторий (C_n, E_n). При дальнейшем увеличении g_m

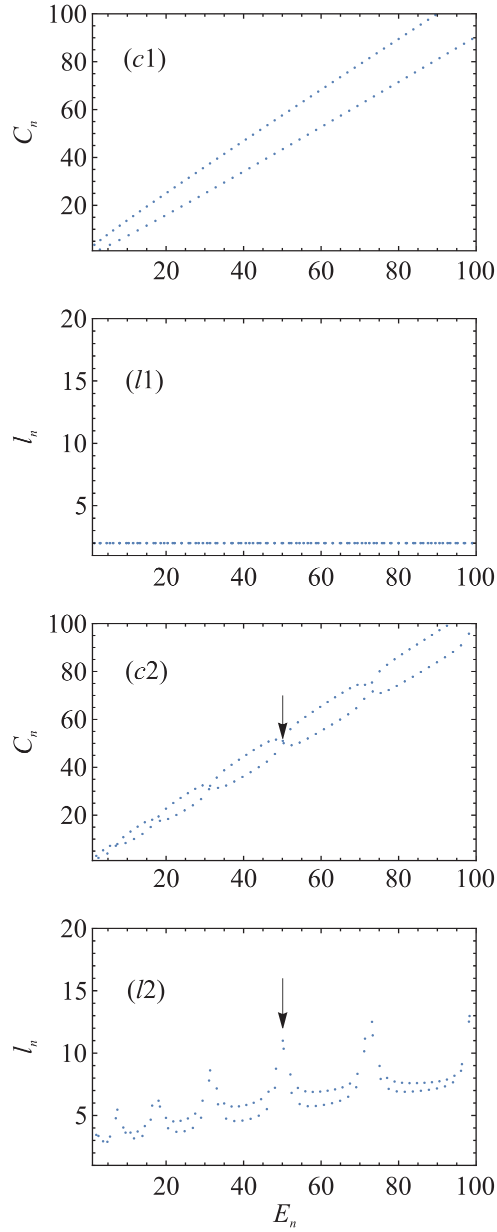

Рис. 1. Численное моделирование траекторий (C_n, E_n) и (l_n, E_n). Рисунок 1 $(c1), (l1)$ соотвествует случаю $g_e = g_m = 0.5$, когда выполнено точно приближение Джейнса–Каммингса. Рисунок 1 $(c2), (l2)$ соответствует случаю разрушения интеграла движения при $g_e = 0.5, g_m = 0.15$. Стрелки показывают сближение траекторий при $n = 54$, когда длина локализации сильно возрастает. Размер матрицы $N \times N = 3000 \times 3000$ (для наглядности приведены данные для первых 100 уровней).

происходит заполнение промежутка между кривыми определенной четности – формирование паутины и появление пиков длины локализации (l_n, E_n) на этих участках. Поскольку в промежутках между пересечениями увеличивается число доступных фоковских узлов, то длина локализации резко возрастает: рис. 2 ($l1$), ($l2$),($l3$), что означает возникновение туннелирования между состояниями на определенных группах узлов. С дальнейшим ростом магнитной константы связи формируется квантовая паутина, а длина локализации начинает носить квазислучайных характер.

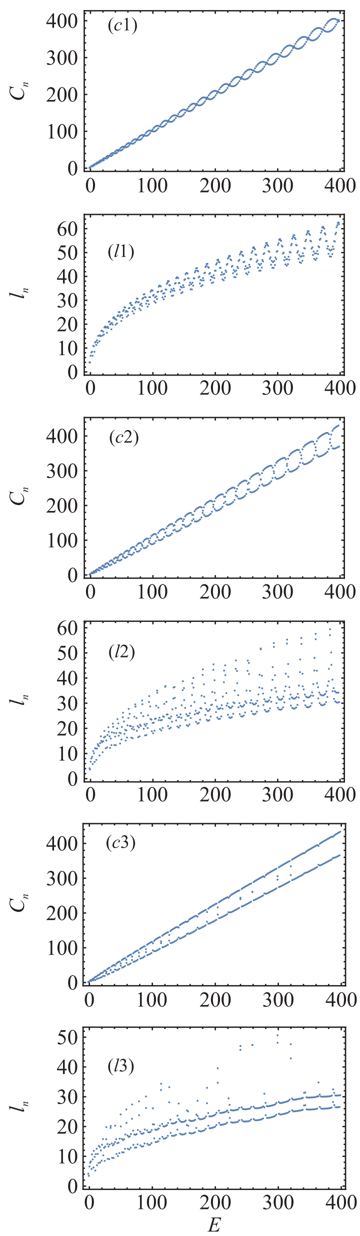

Рис. 2. (Цветной онлайн) Численное моделирование траекторий (C_n, E_n) и (l_n, E_n) при изменении g_m при фиксированном значении $g_e = 1.25$. Рисунок 2 ($c1$), ($l1$): $g_m = 0.05$; рис. 2 ($c2$), ($l2$): $g_m = 0.15$; рис. 2 ($c3$), ($l3$): $g_m = 0.25$. Размер матрицы $N \times N = 3000 \times 3000$ (для наглядности приведены данные для 400 первых уровней)

Таким образом, разрушение интеграла движения сопровождается делокализацией состояний, причем длина локализации распространяется на конечное число узлов, зависящее от констант связи.

4. Статистика уровней. Идея анализа спектра аномально чувствительных квантовых систем восходит к работам Вигнера [22] и Ландау и Смородинского [23], в которых впервые предложено применить статистический подход для анализа возбуждений в ядрах, интересуясь не свойствами индивидуальной матрицы гамильтониана, а рассматривая такие матрицы как представительницы ансамблей (ортогонального, унитарного и т.д.) случайных матриц. Важную роль в теории квантового хаоса играет гипотеза, высказанная в работе [29] (the BGS-conjecture), согласно которой флуктуация уровней определяется симметрийными свойствами гамильтониана. Применение этих идей к анализу спектра АМР требует дополнительных исследований.

Как отмечалось во Введении, для модели Раби функция распределения межуровневых расстояний вычислялась в работах [17, 18] (для матриц небольшого размера для нескольких значений g_e). Общий вывод, полученный в работах [17, 18], состоит в том, что функция распределения не соответствует ни распределению Пуассона, ни распределению Вигнера.

Для АМР функция распределения межуровневых расстояний $P(s)$, где $s = (E_{j+1} - E_j)/{<}E_j{>}$, а ${<}E_j{>}$ – среднее расстояние между уровнями, приведена на рис. 3. Как видно, промежутки между уровнями сосредоточены в конечном промежутке, что также указывает на особый класс квазислучайных матриц.

Специфика рассматриваемой модели состоит в том, что при $g_e = g_m = 0$ расстояние между диагональными элементами (уровнями) определяется выражением $\Delta E_n = \bar{H}_{n+1,n+1} - \bar{H}_{n,n} = \sigma\omega_q(-1)^n + \omega$. Как видно, здесь "сложность" диагональной матрицы обусловлена знакопеременными элементами, а "распределение" расстояний между уровнями не соответствует пуассовскому, поэтому использование критерия хаоса Берри–Робника [28] для данной системы затруднительно. Данное обстоятельство указывает на то, что необходимо перестроить "нулевое" приближение, выполнив дополнительное унитарное преобразование, эффективно экранирующее знакопеременные диагональные элементы матрицы.

5. Когерентный сдвиг и древовидные матрицы. Заметим, что при $g_m = 0$ и каждом секторе $\sigma = \pm$ гамильтониан (8) представляет собой сильно ангармонический осциллятор, нелинейность которого выражается бесконечным рядом разло-

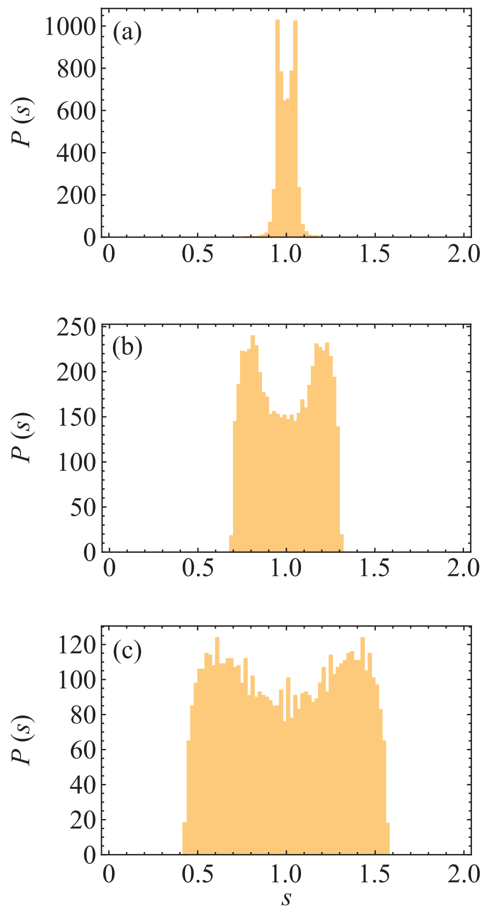

Рис. 3. (Цветной онлайн) Функция распределения межуровневых расстояний $P(s)$ при фиксированном значении $g_e = 1.25$ и изменении магнитной константы связи: (a) – $g_m = 0.0$; (b) – $g_m = 0.025$ и (c) – $g_m = 0.05$. Размер матрицы $N \times N = 5600 \times 5600$

жения $R = \cos(\pi a^\dagger a)$ по степеням оператора чисел заполнения. Совершим когерентный сдвиг $D(\alpha_e) = \exp(-\alpha_e(a^\dagger - a))$, который позволяет устранить слагаемое $g_e(a^\dagger + a)$, ответственное за смещение центра колебаний осциллятора по координате $x \sim (a^\dagger + a)$):

$$\bar{H}^e = \omega a^\dagger a - \frac{g_e^2}{\omega} - \sigma\frac{\omega_q}{2}R(\alpha_e), \tag{12}$$

где $R(\alpha_e) = D(-\alpha_e)RD(\alpha_e) = \cos(\pi(a^\dagger + \alpha_e)(a + \alpha_e))$, $\alpha_e = -g_e/\omega$. Матричные элементы $R(\alpha_e)$ вычисляются согласно

$$R(\alpha_e) = \sum_{l=0}^{\infty} D(\alpha_e)_{m,l}(-1)^l D(\alpha_e)_{l,n}, \tag{13}$$

где элементы матрицы когерентного сдвига определяются известной формулой Швингера [33]:

$$D(\alpha_e)_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n!}{m!}}e^{-|\alpha_e|^2/2}\alpha_e^{m-n}L^{m-n}(|\alpha_e|^2), m > n, \\ \sqrt{\frac{m!}{n!}}e^{-|\alpha_e|^2/2}\alpha_e^{n-m}L^{n-m}(|\alpha_e|^2), n < m, \end{cases}$$

где $L^n(x)$ – присоединенные полиномы Лаггера. После когерентного сдвига, как это видно из (6), характерное расстояние между диагональными элементами невозмущенной матрицы равно:

$$\Delta\bar{H}^e_{n,n} = -\sigma\frac{\omega_q}{2}(R_{n+1,n+1}(\alpha_e) - R_{n,n}) + \omega. \tag{14}$$

В том же случае, когда действует также магнитодипольное взаимодействие, удобно совершить дополнительное когерентное преобразование

$$D(\alpha_m) = \exp(\alpha_m a^\dagger - \alpha_m^* a), \tag{15}$$

$\alpha_m = -ig_m/\omega$, позволяющее осуществить преобразование сдвига, приводящее к смещению осциллятора по импульсу. Приведенные соображения указывают на полезность одновременного когерентного преобразования по координате и импульсу, которое можно записать в виде:

$$\bar{H}^{em} = D^{-1}(\alpha_m + \alpha_e)H_{AR}D(\alpha_e + \alpha_m), \tag{16}$$

где мы использовали хорошо известную формулу умножения для операторов когерентных преобразований. Смысл проделанной процедуры состоит в том, что при таких преобразованиях происходит своеобразная экранировка диагональных элементов матрицы анизотропной модели и изменение матричных элементов. Матричные элементы (15) были рассчитаны с учетом формулы Швингера и визуализированы на рис. 4. Отметим, что при $g_m = 0$ (модель Раби) матрица (8) уже имеет разветвленную древовидную структуру [34]. Функция распределения диагональных элементов "экранированной" матрицы заметно отличается как от пуассоновской, так и от вигнеровской. Расчеты показывают, что при фиксированной g_e с ростом константы связи g_m к исходной матрице Раби прибавляются все новые ветви, а сами недиагональные элементы возрастают при удалении от диагонали. Рост констант связи приводит к эффективному включению дополнительных ветвей дерева. При этом происходит сдвиг уровней влево по оси энергий и локальному изменению плотности уровней. Вместе с тем, несмотря на рост недиагональных матричных элементов, плотность уровней в анизотропной модели Раби выходит на фиксированный предел. Численные расчеты и качественные рассуждения, подобные приведенным в [35, 36] для различных типов матриц, свидетельствуют о существовании конечного предела для плотности состояний. Кроме того, для плот-

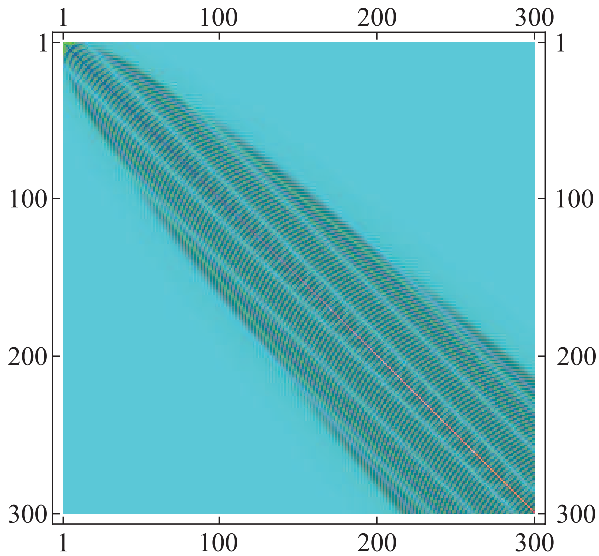

Рис. 4. (Цветной онлайн) Визуализация матрицы анизотропной модели Раби при фиксированном значении $g_e = 1.25$ и $g_m = 0.15$. Цвет показывает абсолютную величину соответствующего матричного элемента

ности состояний удается сформулировать рекуррентные уравнения для функции Грина, которые сходятся к определенному пределу [36] с ростом размерности матрицы.

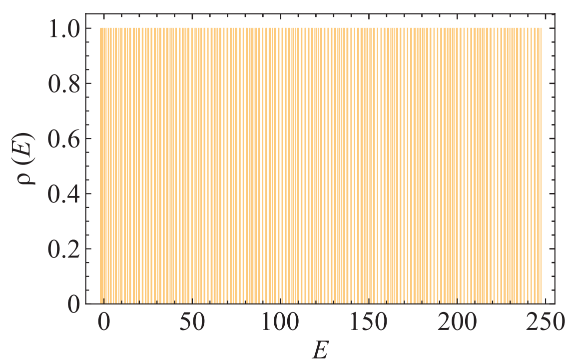

Рис. 5. (Цветной онлайн) Результаты численных расчетов плотности состояний для значении $g_e = 1.25$ и $g_m = 0.25$. Уровни представлены в интервале $(-10, 250)$ при полной размерности матрицы 5000×5000

Вместе с тем плотность состояний в АМР устроена достаточно просто (см. рис. 5): уровни занимают полупространство и характеризуются средним расстоянием между пиками. Как следует из проведенных расчетов, для данной модели прослеживается связь с матрицами древовидной структуры или матрицами осцилляторного типа с плотной структурой уровней (типа распределения промежутков между "щеколдами старого забора").

6. Выводы. Анизотропная модель Раби описывает более общий сценарий взаимодействия кубита с резонатором. Мы продемонстрировали процесс разрушения интеграла движения, сохраняющегося в симметричном случае ($g_e = g_m$). Обнаружена корреляция в поведении длины локализации и квантовой паутины от номера уровня: при сближении ниток паутины происходит формирование групп уровней, на которых происходит возрастание длины локализации, что свидетельствует об образовании каналов туннелирования между группами состояний, отвечающих различным значениям разрушающегося интеграла движения. Из проведенных расчетов следует, что структура спектра анизотропной модели Раби не следует стандартной классификации, установленной для ленточных матриц, в которых наблюдается переход от распределения Пуассона к распределению Вигнера с ростом интеграла перекрытия. Как мы видим, это обусловлено тем, что АМР сводится к матрицам древовидной структуры с плотной структурой уровней (типа распределения промежутков между "щеколдами старого забора" [29]). Важным выводом можно считать обнаруженную стабильность системы при равных константах связи, что позволяет расширить дисперсионный метод измерений состояний кубитов в режиме сильной связи [15].

А. М. Сатанин весьма признателен С. Е. Куратову, В. В. Погосову и Д. С. Шапиро за полезные обсуждения проблемы слабого хаоса.

Финансирование работы. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, Appl. Phys. Rev. **6**, 021318 (2019).
2. A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin, and A. Wallraff, Rev. Mod. Phys. **93**, 025005 (2021).
3. I. I. Rabi, Phys. Rev. **51**, 652 (1937).
4. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, М. (2003).
5. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
6. A. F. Kockum, A. Miranowicz, A. De Liberato, S. Savasta, and F. Nori, Nat. Rev. Phys. **1**, 19 (2019).
7. P. Forn-Diaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, and E. Solano, Rev. Mod. Phys. **91**, 025005 (2019).

8. J. Larson and T. Mavrogordatos, arXiv:2202.00330v3 (2023).
9. A. Baksic and C. Ciuti, Phys. Rev. Lett. **112**, 173601 (2014).
10. Q. T. Xie, S. Cui, J. P. Cao, L. Amico, and H. Fan, Phys. Rev. X **4**, 021046 (2014).
11. M. Tomka, O. E. Araby, M. Pletyukhov, and V. Gritsev, Phys. Rev. A **90**, 063839 (2014).
12. Q. T. Xie, H. Zhong, M. T. Batchelor, and C. Lee, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 113001 (2017).
13. A. Parra-Rodriguez, E. Rico, E. Solano, and I. L. Egusquiza, Quantum Sci. Technol. **3**, 024012 (2018).
14. Д. С. Шапиро, В. В. Погосов, Ю. Е. Лозовик, А. М. Сатанин, *Нанофизика и наноэлектроника*, Труды XXIV Международного симпозиума, 10–13 марта 2020 г., Издательство Нижегородского госуниверситета, Н. Новгород, т. 1, (2020), с. 138.
15. D. Sank, Z. Chen, and M. Khezri, Phys. Rev. Lett. **117**, 190503 (2016).
16. D. Braak, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).
17. M. Kus, Phys. Rev. Lett. **54** 1343 (1985).
18. Q.-W. Wang and Y.-L. Liu, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 435303 (2013).
19. R. L. Fulton and M. Gouterman, J. Chem. Phys. **35**, 1059 (1961).
20. R. Graham and M. Höhnerbach, Phys. Lett. A **101**, 61 (1984).
21. F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer-Verlag, Berlin (2010).
22. E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951).
23. Л. Д. Ландау, Я. Б. Смородинский, *Лекции по теории ядра*, Физматгиз, М. (1955), с. 89.
24. T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
25. T. A. Brody, J. Flares, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey and S. S. M. Won, Rev. Mod. Phys. **53**, 385 (1981).
26. Linda E. Reichl, *The Transition to Chaos: Conservative Systems and Quantum Manifestations* Springer-Verlag, N.Y. (1992); 2nd ed. (2004).
27. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **52**, 1711 (1984).
28. M. V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 2413 (1984).
29. O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
30. D. S. Shapiro, A. A. Zhukov, W. V. Pogosov, and Yu. E. Lozovik, Phys. Rev. A **91**, 063814 (2015).
31. А. А. Жуков, С. В. Ремизов, В. В. Погосов, Д. С. Шапиро, Ю. Е. Лозовик, Письма в ЖЭТФ **108**, 62 (2018).
32. N. Srivastava and G. Miller, Z. Phys. B Condensed Matter **81**, 137 (1990).
33. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 728 (1952).
34. P. Eades, T. Lin, and X. Lin, International Journal of Computational Geometry and Applications **3**, 133 (1993).
35. E. Bogomolny and O. Giraud, Phys. Rev. E **88**, 062811 (2013).
36. R. Abou-Chacra, D. J. Thouless, and P. W. Anderson, J. Phys. C **6**, 1734 (1973).