Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.10, стр.541 - 543 25 мая 1992 г.

О КВАНТОВОМ РОЖДЕНИИ ВСЕЛЕННОЙ В ОКРЕСТНОСТИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

А.А.Кириллов

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики
603005, Нижний Новгород

Поступила в редакцию 15 апреля 1992 г.

На примере однородной модели Бианки-IX, заполненной скалярным полем, показано, что в процессе квантовой эволюции из вакуумного состояния происходит рождение Вселенных. В пределе малой плотности энергии скалярного поля $\epsilon \to 0$ спектральная плотность числа Вселенных имеет планковский вид.

Как известно, в классической космологии время существования Вселенной ограничено сингулярностью (особой точкой по времени). В сингулярности классическая теория теряет свою применимость и должна быть заменена квантовой. Одной из наиболее интересных задач в квантовой космологии представляется задача описания "квантового рождения мира из ничего" [1,2]. Корректное описание подобного процесса возможно в рамках теории, допускающей переменное число Вселенных. Другими словами волновая функция Вселенной должна быть вторично квантована (что соответствует третичному квантованию с точки зрения частиц). Идея использовать третичное квантование для описания процесса рождения Вселенной не является новой и уже рассматривалась в [3] на примере изотропной модели. При этом возможность рождения Вселенных связана с тем, что уравнение Уилера - де Витта, которому должна удовлетворять волновая функция, является уравнением второго порядка типа уравнения Клейна – Гордона и содержит явную зависимость от времени (при выборе в качестве времени одной из метрических функций). Ниже мы рассмотрим процесс квантового рождения Вселенной на примере однородной модели IX-типа заполненной безмассовым скалярным полем φ. Выбор данной модели связан с тем, что в классической теории она дает описание локального поведения общего неоднородного гравитационного поля в окрестности сингулярности [4], при этом единственным видом материи, который следует учитывать в главном порядке, является скалярное поле [5]. Можно ожидать, что такая ситуация будет иметь место и в квантовой космологии.

Метрика для однородной модели Бианки-IX имеет вид

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \sum e^{q_l} \sigma^l \sigma^l, \tag{1}$$

здесь $\sigma^l = \sigma^l_j(x)dx^j$ - однородные базисные формы, q_l удобно представить в виде [6] $q_l = \Omega + 2\mathrm{Re}(q\exp(i\theta_l))$, $\theta_l = 0, \pm 2\pi/3$, где Ω пропорционально логарифму объема пространства, q - комплексная переменная, характеризующая степень анизотропии пространства.

В квантовой космологии состояние Вселенной описывается волновой функцией Ψ, которая является функционалом, задаваемом на суперпространстве W - пространстве всех метрик и полей материи. Эволюция Ψ определяется уравнением Уилера – де Витта [7]

$$(\Delta + U)\Psi = 0, \tag{2}$$

здесь $U = 6\lambda(\sum e^{2q_l} - \frac{1}{2}(\sum e^{q_l})^2)$, $\Delta = \frac{1}{\sqrt{-G}}\partial_A\sqrt{-G}G^{AB}\partial_B$, G_{AB} - метрика на W, определяемая интервалом $d\Gamma^2 = \frac{1}{\lambda}(d\varphi^2 + |dq|^2 - d\Psi^2)$, $\lambda = \frac{2}{3}Ne^{-3\Omega/2}$. Уравнение (2) формально можно вывести из действия

$$S = \frac{1}{2}\int (G^{AB}\partial_A\Psi^*\partial_B\Psi - U|\Psi|^2)\sqrt{-G}d^4\zeta,$$

ζ^A - координаты на W. В координатах $\Omega = -e^{-\tau}\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}$, $q = e^{-\tau}\frac{2z}{1-|z|^2}$, метрика на W принимает вид

$$d\Gamma^2 = \frac{1}{\lambda}\left\{(d\varphi)^2 + e^{-2\tau}\left(\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} - (d\tau)^2\right)\right\}. \tag{3}$$

Воспользовавшись произволом в выборе функции хода N, положим $\lambda = 1$. Рассмотрим асимптотику $\tau \to -\infty(\Omega \to -\infty)$, отвечающую сингулярности в метрике (1). При этом потенциал в (2) можно моделировать бесконечными стенками [7].

$$e^{q_l} = \exp(-e^{-\tau}\eta_l(z)) \xrightarrow[\tau \to -\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{при } \eta_l(z) > 0 \\ \infty & \phantom{\text{при }} \eta_l(z) < 0 \end{cases}, \eta_l = \frac{1 + |z| - 4\mathrm{Re}z\exp(i\theta_l)}{1 - |z|^2}.$$

В этом пределе U зависит только от z. Тогда полный ортонормированный набор решений уравнения (2) составляют функции $u_p(\Omega, z) \sim \exp(\tau/2)\chi_p(\tau)\varphi_n(z)\exp(i\epsilon\varphi)$. Здесь $p = (n, \epsilon)$; φ_n - удовлетворяет уравнению $\Delta_z\varphi_n = -(k_n^2 + 1/4)\varphi_n$ с граничными условиями $\varphi_n(z) = 0$ при $\eta_l(z) = 0$ и оператором Лапласа Δ_z, построенном с помощью метрики $\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$; χ_p удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\chi_p}{d\tau^2} + (k_n^2 + \epsilon^2e^{-2\tau})\chi_p = 0 \tag{4}$$

и выражается через функции Бесселя или Ханкеля.

При третичном квантовании волновая функция Вселенной становится оператором поля и может быть разложена по произвольному полному ортонормированному набору $\{u_p\}$ решений уравнения (2) (далее для простоты полагаем Ψ - вещественной): $\Psi = \sum a_pu_p + a_p^+u_p^*$ с операторами a_p и a_p^+, удовлетворяющими коммутационным соотношениям $[a_p, a_{p'}^+] = \delta_{p,p'}$. Как было отмечено выше, уравнение (2) явно зависит от времени, поэтому отсутствует однозначная классификация решений $\{u_p\}$ по знаку частотности. Корпускулярную интерпретацию можно осуществить либо методом диагонализации гамильтониана [9], либо выделением асимптотических in и out областей на W для которых можно определить положительно частотные решения (2). В случае когда такие области существуют эти два метода совпадают [9]. Определим различные асимптотические области: in$(\epsilon e^{-\tau} \gg k_n)$, которая соответствует физической сингулярности; и out $(\epsilon e^{-\tau} \ll k_n)$. Последняя может достигаться только при $\epsilon \to 0$ поскольку мы рассматриваем окрестность сингулярности. Положительно-частотные моды в in и out областях имеют вид

$$\chi_p^{\text{in}}(\tau) = \frac{1}{2}(\pi)^{1/2}\exp(\pi k_n/2)H_{ik_n}(\epsilon t)$$

$$\chi_p^{\text{out}}(\tau) = [(2/\pi)\text{sh}(\pi k_n)]^{1/2}J_{ik_n}(\epsilon t)\,, \qquad t = e^{-\tau}, \tag{5}$$

и связаны между собой преобразованием Боголюбова $\chi_p^{\text{out}} = \alpha_p\chi_p^{\text{in}} + \beta_p\chi_p^{*\text{in}}$ с коэффициентами

$$\alpha_p = [\exp(\pi k_n)/2\text{sh}(\pi k_n)]^{1/2}, \qquad \beta_p = [\exp(-\pi k_n)/2\text{sh}(\pi k_n)]^{1/2}.$$

Если выбрать в качестве начального состояния вакуум, связанный с in модами (5) $|0,\text{in}>$, то можно вычислить среднее число Вселенных присутствующих в out-модах

$$N_p =< 0,\text{in}|a^+_{p,\text{out}}, a_{p,\text{out}}|0,\text{in} >= |\beta_p|^2 = (\exp(2\pi k_n) - 1)^{-1}, \tag{6}$$

которое не зависит от ϵ и имеет планковский вид с температурой $T_0 = 1/2\pi$. Температура T, воспринимаемая "наблюдателем" дается соотношением Толмена $T = (G_{00})^{-1/2}T_0$, где G_{00} - компонента метрики на W, в которой "наблюдатель" имеет постоянную координату (для метрики (3) $T = \frac{1}{2\pi}\exp(\tau)$).

Величины k_n, фигурирующие в (6), имеют смысл энергии гравитационного поля,связанной с анизотропией пространства. Параметры анизотропии z можно интерпретировать, как амплитуды гравитационных волн различной поляризации с максимально возможной длиной волны [6]. Таким образом выражение (6) дает распределение числа Вселенных по энергии чисто гравитационного поля.

Автор благодарит А.А.Старобинского за полезное обсуждение и ценные замечания.

---

1. L.P.Grishchuk, and Ya.B.Zeldovich. Quant. Struct. of Space and Time. Cambrige: Univ. Press, 1982, p.387.
2. Я.Б.Зельдович, А.А.Старобинский, Письма в астр. журнал **10**, 323 (1983).
3. V.A.Rubakov, Phys. Lett. B **214**, 503 (1988).
4. В.А.Белинский, Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, ЖЭТФ **62**, 1606 (1972).
5. В.А.Белинский, И.М.Халатников, ЖЭТФ **63**, 1121 (1972).
6. C.W.Misner, Phys. Rev. **186**, 1319 (1969).
7. B.S.DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
8. Ч.В.Мизнер, К.С.Торн, Дж.А.Уилер, Гравитация, т.2. М.: Мир, 1977.
9. А.А.Гриб, С.Г.Мамаев, В.М.Мостепаненко, Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.