Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 6, с. 400 – 408

Поле тяготения сплошной самогравитирующей среды и "темная материя"

В. М. Журавлев[1)]

Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, 432071 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 8 июля 2024 г.
После переработки 7 августа 2024 г.
Принята к публикации 28 августа 2024 г.

В работе предлагается способ описания эффекта скрытой массы или "темной материи". Подход основан на новом общем решении уравнения Пуассона для напряженности поля тяготения в самогравитирующей сплошной среде. Это решение является следствием теории пространства и материи, альтернативной Общей теории относительности. Выведены условия, позволяющие установить, в каких случаях полученное решение описывает классическое поле тяготения ньютоновской теории, а в каких приводит к появлению эффекта скрытой массы. Полученное представление для напряженности гравитационного поля анализируется в рамках модели динамического равновесия дисковых галактик, на основе чего обсуждается вопрос возможности описания наблюдаемых свойств эффекта скрытой массы в рамках такого подхода.

DOI: 10.31857/S0370274X24090142, EDN: HEFQCO

1. Введение. Одной из наиболее важных проблем современной астрофизики является расхождение в наблюдаемых кривых вращения дисковых галактик с предсказанными на основе наблюдений их поверхностной яркости. Это расхождение объясняется наличием эффекта скрытой массы или "темной материи" [1–3]. Для объяснения эффекта скрытой массы привлекают две основных гипотезы, которые выходят за рамки классической теории тяготения. Первая состоит в том, что на больших масштабах существует экзотическая форма материи, взаимодействующая с обычным веществом только за счет сил тяготения. Именно этот подход именуется эффектом темной материи. Второй подход сводится к модификациям классического закона тяготения Ньютона. Основным примером такого подхода является теория MOND [4, 5]. Оба подхода не дают на сегодняшний день исчерпывающего объяснения эффекта скрытой массы.

В основе представлений об эффекте скрытой массы, связанных с данными о вращении галактик, лежит классический способ вычисления напряженности поля тяготения в самогравитирующей сплошной среде, основанный на теории тяготения Ньютона. Вместе с тем для описания поля тяготения в сплошной среде в [6–9] предложен отличный от классического метод, опирающийся на лагранжев подход в гидродинамике. Метод был использован для описания астрофизических объектов – звезд [6, 7, 9] и галактик [8] в условиях динамического равновесия. Подобное описание поля тяготения в терминах лагранжевых переменных (маркеров) появилось в топологической теории фундаментальных полей (ТТФП) в работах [10–15]. Эта теория является альтернативой Общей теории относительности (ОТО). При этом ТТФП опирается на геометрические и топологические методы, как и ОТО, для объяснения свойств материи, ее динамики и структуры. Вместе с тем метод описания поля тяготения с помощью маркеров при определенных условиях может в точности соответствовать классической теории тяготения, как это было показано в [10–13] и использовано в [6], но в случае невыполнения этих условий приводит к появлению эффекта скрытой массы. Эти условия в первую очередь связаны со свойствами самой сплошной среды – наличием в ней частиц с различной массивностью [7–9]. В данной работе установлены общие требования к форме представления напряженности поля тяготения через поля маркеров, которые дают, с одной стороны, решение задачи классической теории тяготения Ньютона для сплошной самогравитирующей среды, а с другой – новый способ описания эффекта скрытой массы. На основе нового способа представления напряженности поля тяготения в работе кратко анализируется задача о динамическом равновесии дисковых структур, в том числе галактик, и обосновывается эффективность нового подхо-

[1)]e-mail: zhvictorm@gmail.com

да для описания эффекта скрытой массы ("темной материи").

2. Альтернативный подход к описанию поля тяготения. Основой ТТФП является геометрический подход к описанию пространства и материи, состоящий в том, что физическое трехмерное пространство является материальным объектом, геометрия которого может быть представлена в форме гладкой трехмерной гиперповерхности V^3, вложенной в четырехмерное евклидово пространство W^4 на единицу большей размерности: $V^3 \in W^4$. При этом время в W^4 течет одинаково во всех точках [10–15]. Такая конструкция гораздо проще подхода ОТО, в которой нематериальное четырехмерное псевдориманово пространство-время общего вида наделяется физическими свойствами, что ведет к целому ряду парадоксов [16, 15]. Геометрия V^3, как гиперповерхности в W^4, может быть полностью задана с помощью уравнения: $x^4 = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ – функции высоты, x^1, x^2, x^3, x^4, – выделенные декартовы координаты в W^4, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. На микроуровне частицы материи определяются как области пространства, ограниченные особыми изоповерхностями $\mathcal{F} = \text{const}$, которые по определению содержат хотя бы одну седловую точку функции $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$. Такое представление позволяет построить электродинамику с целочисленным электрическим зарядом, который является топологической характеристикой областей пространства, соответствующих каждой частице, а масса определяется их геометрическими свойствами. Структуру и динамику V^3 как материального объекта можно описывать как совокупность точек непрерывной среды, пользуясь понятием лагранжевых переменных или маркеров. С помощью маркеров в ТТФП строится описание фундаментальных полей – электромагнитных с дискретным целочисленным зарядом, гравитационных, удовлетворяющих автоматически обобщенному уравнению Пуассона, а также материи, обладающей квантовыми свойствами, подчиняющимися уравнению Шредингера в его геометрической интерпретации [10–15]. При этом усредненные динамические параметры частиц на макроуровне удовлетворяют уравнениям Ньютона классической механики. Классические уравнения движения непрерывной среды Ньютона–Эйлера, с точки зрения ТТФП, являются усредненными уравнениями движения областей пространства, которые в ТТФП интерпретируются как элементарные частицы материи с соответствующей топологической структурой. Прямой вывод таких усредненных уравнений движения представлен вместе с указанием связи геометрического усреднения со статистическим постулатом Борна квантовой теории в [10–15]. Полученные с помощью геометрического усреднения уравнения движения материи содержат в стандартной для классической физики форме электромагнитные силы (Кулона и Лоренца), а также усредненную потенциальную силу, которая отождествляется с силой тяготения.

Поскольку в основе описания материи на микроуровне в ТТФП лежит представление о физическом пространстве как о непрерывной среде, то его можно эффективно применять и к описанию материи на макроуровне. В силу этого, описание поля тяготения для астрофизических объектов может быть построено на тех же принципах, что и в ТТФП. Основным отличием такого способа описания гравитационного поля тяготения астрофизических объектов от классического является возможность появления эффекта скрытой массы.

3. Описание свойств среды с помощью маркеров. Лагранжевы переменные или маркеры $e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$, $a = 1, 2, 3$, которые обозначают набор независимых свойств среды, не изменяющихся при движении, являются решениями уравнений переноса:

$$e^a_t + \Big(\mathbf{v}, \nabla\Big) e^a = 0, \quad a = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости потока, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – физические пространственные координаты. Дифференциальным следствием (1) является уравнение сохранения плотности точек среды (концентрации маркеров):

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (|J|\mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

где:

$$J = \det\left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right). \tag{3}$$

Уравнение (2) совпадает по форме с гидродинамическим уравнением неразрывности, выражающим собой закон сохранения массы. Поэтому в гидродинамике, полагая:

$$\rho = M_0 |J|, \tag{4}$$

где M_0 – некоторая размерная постоянная, получают автоматически уравнение неразрывности:

$$\rho_t + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{5}$$

Соотношение (4) можно обобщить, полагая:

$$\rho = M_0 \aleph(\mathbf{e}) |J|, \tag{6}$$

где $\aleph = \aleph(\mathbf{e})$ – произвольная дифференцируемая функция маркеров. Для плотности в форме (6) уравнение неразрывности остается неизменным. Функцию $\mathcal{M} = M_0\aleph(\mathbf{e})$ будем называть функцией массивности частиц среды, а $\aleph = \aleph(\mathbf{e})$ – относительной массивностью частиц среды.

Физический смысл $\mathcal{M}$ состоит в том, что она описывает среднюю массу частиц непрерывной среды в бесконечно малом ее объеме [7]. Если среда состоит из частиц одного сорта, то всюду в пространстве $\aleph(\mathbf{e}) = 1$. Если же среда состоит из частиц нескольких типов с различной массой, то функция массивности $\mathcal{M}(\mathbf{e})$ будет в общем случае изменяться в пространстве. В случае, когда понятие сплошной среды при описании галактик переносится на среду, состоящую из отдельных звезд, пыли и газа, функция массивности должна учитывать и распределение звезд различной массы в пространстве.

4. Поле тяготения самогравитирующей среды и маркеры. Рассмотрим формальное тождество для полей маркеров, которое в координатах пространства маркеров E^3 имеет тривиальный вид:

$$\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial e^a}{\partial e^a} = 3.$$

После преобразования этого тождества в физические координаты, функциями которых являются маркеры $e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$, приходим к следующей форме этого тождества:

$$\frac{1}{|J|}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(|J|e^a\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\right) = 3. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай среды, состоящей из частиц одного сорта: $\aleph = 1$. Учитывая, что в этом случае функция $|J|$ с точностью до множителя M_0 отождествляется с плотностью массы (4), удобно последнее тождество представить в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M_0|J|e^a\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\right) = 3M_0|J| = 3\rho. \qquad (8)$$

Этого уравнение совпадает по форме с классическим уравнением Пуассона:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{g} = -4\pi G\rho, \qquad (9)$$

если в качестве напряженности поля тяготения взять векторное поле:

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi G}{3}M_0|J|\mathbf{K} - \mathrm{rot}\mathbf{Z}. \qquad (10)$$

Здесь $\mathbf{K}$ – векторное поле с компонентами:

$$K^\alpha = e^a\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a},\ \alpha = 1, 2, 3. \qquad (11)$$

Слагаемое $\mathrm{rot}\mathbf{Z}$ в правой части (10) можно рассматривать как калибровочное поле, компенсирующее вихревую составляющую поля

$$\mathbf{g}_K = -\frac{4\pi G}{3}\rho\mathbf{K} \qquad (12)$$

так, чтобы поле $\mathbf{g}$ в (10) было потенциальным: $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ с потенциалом ϕ. Таким образом, соотношение (10) представляет собой точное решение классического уравнения Пуассона (9) для сплошной самогравитирующей среды, но только в случае, если среда состоит из частиц одной и той же массы, функция массивности которой $\mathcal{M}$ всюду является постоянной величиной: $\mathcal{M} = M_0 = \mathrm{const}$.

5. Решение уравнения Пуассона в случае $\aleph \neq$ const. В случае, если среда состоит из частиц различной массы и $\aleph \neq \mathrm{const}$, то использование соотношения (10) в качестве напряженности поля классической теории тяготения приводит к эффекту скрытой массы:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{g} = -4\pi G M_0|J| = -4\pi G\frac{1}{\aleph}\rho. \qquad (13)$$

Появление множителя $\aleph^{-1}$ в правой части последнего соотношения эквивалентно появлению дополнительной плотности материи в следующей форме:

$$\rho_{\text{eff}} = \rho + \rho_D, \quad \rho_D = \frac{1-\aleph}{\aleph}\rho, \qquad (14)$$

где ρ_D – скрытая масса, создающая дополнительное поле тяготения, которое описывается соотношением (10). В такой форме эффект скрытой массы в задачах динамического равновесия звезд исследовался в работах [7, 9] и галактик [8]. Факт появления скрытой массы с плотностью ρ_D указывает на то, что классическая теория тяготения с постулируемой напряженностью (10) перестает работать. В связи с этим возникает вопрос о возможности модифицировать это соотношение так, чтобы эффект скрытой массы исчез в случае самогравитирующей среды, состоящей из частиц различной массы.

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим в качестве обобщения (10) соотношение следующего вида:

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi G}{3}\Xi(\mathbf{e}, t)M_0|J|\mathbf{K} - \mathrm{rot}\,\mathbf{Z}, \qquad (15)$$

где $\Xi(\mathbf{e}, t)$ – некоторый вспомогательный множитель, зависящий от маркеров и времени, что эквивалентно некоторой зависимости от физических координат и t: $\Xi\Big(\mathbf{e}(\mathbf{x}, t), t\Big) = \widetilde{\Xi}(\mathbf{x}, t)$. Подставляя (15) в уравнение Пуассона, находим:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -\frac{4\pi G}{3}\nabla \cdot \Big(\Xi(\mathbf{e},t)M_0|J|\mathbf{K}\Big) = \tag{16}$$
$$= -4\pi G \Xi M_0 |J| \left(1 + \frac{1}{3}K^\alpha \frac{\partial \ln \widetilde{\Xi}}{\partial x^\alpha}\right) = -4\pi G \mathcal{D}\rho.$$

Множитель $\mathcal{D}$ в последнем соотношении с учетом определения $\mathbf{K}$ (11) имеет такой вид:

$$\mathcal{D} = \frac{\Xi}{3\aleph}\left(3 + K^\alpha \frac{\partial \ln \widetilde{\Xi}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\Xi}{3\aleph}\left(3 + e^a \frac{\partial \ln \Xi}{\partial e^a}\right). \tag{17}$$

Если предполагать, что в общем случае напряженность поля тяготения имеет вид (15), то наличие множителя $\mathcal{D}$ в правой части уравнения (16) означает, что при этом наблюдается эффект скрытой массы в форме (14), где теперь

$$\rho_D = (\mathcal{D} - 1)\rho. \tag{18}$$

Таким образом, представление для $\mathbf{g}$ общего вида (15) приводит к более общей теории тяготения, чем даже в случае (10) с $\aleph \neq 1$. Такая теория тяготения рассматривалась в рамках ТТФП [10–15]. Но поскольку выбор функции Ξ заранее не определен, то теперь можно сформулировать условие отсутствия скрытой массы, полагая:

$$\mathcal{D} = \frac{\Xi}{\aleph}\left(1 + \frac{1}{3}e^a \frac{\partial \ln \Xi}{\partial e^a}\right) = 1. \tag{19}$$

Из этого уравнения можно вычислить общий вид множителя Ξ, при котором соотношение (15) будет представлять общее решение классического уравнения Пуассона (9), не содержащего эффекта скрытой массы. В этом случае (15) будет новым вариантом решения задачи классической теории тяготения для сплошной самогравитирующей среды.

Представим (19) в виде линейного уравнения первого порядка в маркерных координатах:

$$\Xi + \frac{1}{3}e^a \frac{\partial \Xi}{\partial e^a} = \aleph. \tag{20}$$

Введем в пространстве маркеров сферические координаты, полагая: $e^1 = e\cos\Phi\sin\Theta$, $e^2 = e\sin\Phi\sin\Theta$, $e^3 = e\cos\Theta$, где $e^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$, $\operatorname{tg}\Phi = e^2/e^1$, $\cos\Theta = e^3/e$. В сферических координатах уравнение (20) принимает более простой вид:

$$\Xi + \frac{1}{3}e\frac{\partial \Xi}{\partial e} = \aleph. \tag{21}$$

Общее решение этого уравнения можно записать в следующей форме:

$$\Xi = \frac{1}{e^3}\left(\sigma(\Phi,\Theta,t) + 3\int\limits_0^e \aleph\Big(\mathbf{e}(q,\Phi,\Theta)\Big)q^2 dq\right). \tag{22}$$

Здесь $\sigma(\Phi,\Theta,t)$ – постоянная интегрирования по радиальной координате в пространстве маркеров e, которая зависит в общем случае от всех других переменных. Таким образом, поле тяготения с напряженностью (15) с множителем (22) является общим решением классического уравнения Пуассона (9), не содержащего в правой части скрытой массы.

6. Физический смысл компонентов поля тяготения. Решение (22) состоит из двух слагаемых: $\Xi = \Xi_q + \Xi_m$, где

$$\Xi_q = \frac{\sigma(\Phi,\Theta,t)}{e^3}, \quad \Xi_m = \frac{3}{e^3}\int\limits_0^e \aleph\Big(\mathbf{e}(q,\Phi,\Theta)\Big)q^2 dq. \tag{23}$$

Физический смысл этих слагаемых выясняется из следующих соображений.

6.1. Компонента Ξ_q. Вычислим дивергенцию от поля $\mathbf{g}_q$:

$$\mathbf{g}_q = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\sigma(\Phi,\Theta,t)}{e^3}M_0|J|\mathbf{K}. \tag{24}$$

В результате находим:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_q = -\frac{4\pi G}{3}M_0\sigma(\Phi,\Theta,t)\nabla \cdot \left(|J|\frac{e^a}{e^3}\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\right). \tag{25}$$

Здесь учтено, что $\sigma(\Phi,\Theta,t)$ зависит только от угловых переменных Φ,Θ. В правую часть соотношения (25) входит дивергенция от поля $\mathbf{E} = |J|e^{-3}\mathbf{K}$, которую можно вычислить, переходя к координатам в пространстве маркеров:

$$\frac{1}{|J|}\nabla \cdot \left(|J|\frac{e^a}{e^3}\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\right) = \frac{\partial}{\partial e^a}\left(\frac{e^a}{e^3}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{e}), \tag{26}$$

где $\delta(\mathbf{e})$ – δ-функция Дирака с носителем в точке $\mathbf{e} = 0$, т.е. в начале координат пространства маркеров. При преобразовании к физическим координатам в соответствии со свойствами δ-функции Дирака имеем:

$$\delta(\mathbf{e}) = \frac{1}{|J_0|}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где $\mathbf{x}_0$ – координата точки в физическом пространстве, в которой функция $e = e(\mathbf{x},t)$ обращается в ноль: $e(\mathbf{x}_0,t) = 0$, а $J_0 = J(x_0,t)$ – значение Якобиана J в этой точке. После учета (26) находим:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_q = -\frac{(4\pi)^2 G}{3}M_0\sigma(\Phi,\Theta,t)|J|\delta(\mathbf{e}) =$$
$$= -\frac{(4\pi)^2 G}{3}M_0\sigma(\Phi,\Theta,t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{27}$$

Отсюда следует, что если $\sigma(\Phi,\Theta,t) \neq 0$ и в пространстве имеется точка x_0, в которой выполняется соотношение $e(\mathbf{x}_0,t) = 0$, то это эквивалентно наличию точечной массы в этой точке x_0. Если $\sigma(\Phi,\Theta,t)=\sigma_0$, т.е. эта функция не зависит от угловых переменных Φ,Θ, то величина точечной массы m_0 определяется множителем в правой части (27): $m_0=\frac{4\pi M_0}{3}\sigma_0$. Таким образом, компонента Ξ_q описывает возможное появление в среде точечной массы с δ-образной плотностью. Формально, число точечных масс может быть любым, если функция $e=e(\mathbf{x},t)$ обращается в ноль в соответствующем числе точек пространства с координатами $\mathbf{x}_i$: $e(\mathbf{x}_i,t)=0$. Такая ситуация подобна тому, как вводится представление о точечных дискретных электрических зарядах в ТТФП [10–15]. Отличием является то, что в ТТФП маркеры связываются с точками самого физического пространства, которое считается материальным объектом. Если рассматриваемая модель среды не предполагает наличия точечных масс, то при описании гравитационного поля в задачах классической динамики следует полагать $\sigma(\Phi,\Theta,t)=0$. Тем не менее в некоторых задачах, где размерами тяготеющих объектов можно пренебрегать, подход с использованием компоненты Ξ_q может быть полезным в части перехода к лагранжевым переменным движения таких объектов.

6.2. Компонента Ξ_m. Вторая компонента Ξ_m связана с соответствующей компонентой напряженности поля тяготения $\mathbf{g}_m$:

$$\mathbf{g}_m=-\frac{4\pi G}{3}\Xi_m M_0|J|\mathbf{K}. \tag{28}$$

Для простоты положим, что функция $\aleph(\mathbf{e})$ зависит только от радиальной координаты в пространстве маркеров: $\aleph=\aleph(e)$. В этом случаем функция $\Xi_m=\Xi_m(e)$ также зависит только от e. Выделим в функции Ξ_m множитель:

$$\wp_m=\int\limits_0^e\aleph(q)q^2dq=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{e}\aleph(q)q^2dq\sin\Theta d\Theta d\Phi.$$

В правой части этого соотношения можно перейти от интегрирования по пространству маркеров к интегрированию по физическим координатам:

$$\wp_m=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V(e)}\aleph(q(\mathbf{x},t))|J|dV. \tag{29}$$

Интеграл в правой части должен вычисляться по областям, ограниченным изоповерхностями функции $e(\mathbf{x},t)=e=\text{const}$. Учитывая определение плотности массы (6), находим:

$$\wp_m=\frac{1}{4\pi M_0}\int\limits_{V(e)}M_0\aleph(e(\mathbf{x},t))|J|dV= =\frac{1}{4\pi M_0}\int\limits_{V(e)}\rho dV=\frac{M(e)}{4\pi M_0}, \tag{30}$$

где $M(e)$ – масса вещества внутри области $V(e)$, ограниченной изоповерхностью $e(\mathbf{x},t)=e=\text{const}$. Таким образом, функция Ξ_m и напряженность поля $\mathbf{g}_m$ в случае указанного ограничения могут быть представлены в такой форме:

$$\Xi_m=\frac{3M(e)}{4\pi M_0}\frac{1}{e^3},\quad \mathbf{g}_m=-G\frac{M(e)}{e^3}|J|\mathbf{K}. \tag{31}$$

Исходя из полученных соотношений, теперь можно представить напряженность поля тяготения в сплошной среде со сложным составом и в отсутствии точечных масс в следующей форме:

$$\mathbf{g}=-G\frac{M(e)}{e^3}|J|\mathbf{K}-\operatorname{rot}\mathbf{Z}. \tag{32}$$

Это общее решение классического уравнения Пуассона при $\aleph=\aleph(e)$, представленное через свойства маркеров. В случае, если функция $\aleph(\mathbf{e})$ зависит и от угловых переменных в пространстве маркеров, то решение (32) будет содержать в качестве множителя перед $|J|\mathbf{K}$ под интегралом функцию $\wp(\mathbf{e})$ более общего вида. В качестве проверки укажем, что при $\aleph=1$ имеем $M(e)=4\pi e^3/3$ – т.е. масса пропорциональна объему пространства маркеров внутри сферы радиусом e, что воспроизводит решение (10). Такое вычисление массы подобно определению массы частиц материи в ТТФП, где оно связано с геометрией пространства [10–15].

7. Вращение дисковых галактик. Для демонстрации рассмотренного подхода по аналогии с работой [8] рассмотрим уравнения динамики пылевидной среды, обладающей цилиндрической симметрией. В цилиндрической системе координат (r,ϕ,z), где r – радиальная координата, z – вертикальная, а φ – азимутальный угол, уравнения Эйлера классической механики сплошной среды для компонентов скорости потока $\mathbf{v}=(u,v,w)$ (u – радиальная компонента, w – вертикальная, а v – зональная) будут иметь вид:

$$\hat{\mathrm{D}}_t u-\frac{v^2}{r}=-g^1,\quad \hat{\mathrm{D}}_t w=-g^2,\quad \hat{\mathrm{D}}_t v+\frac{vu}{r}=0,$$
$$\hat{\mathrm{D}}_t=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{33}$$

Здесь $\mathbf{g}=(g^1,g^2)$ – компоненты напряженности гравитационного поля в цилиндрической системе координат (g^1 – радиальная, g^2 – вертикальная). Эти уравнения необходимо дополнить уравнением сохранения массы (5) и уравнением Пуассона (9), или в случае наличия эффекта скрытой массы уравнением (16). В силу общих представлений плотности (6) и напряженности поля тяготения (10) (соответственно, (15)) через маркеры, уравнения неразрывности (5) и Пуассона (9), (16) автоматически удовлетворяются. Поэтому для получения решений общей системы уравнений (33), (5) и (9), (16) остается выразить также и скорость гидродинамического потока через маркеры. Это можно сделать в рамках предположения, что исследуемая система находится в динамическом равновесии.

В случае цилиндрической симметрии для описания параметров среды достаточно только двух маркеров $e^a = e^a(r,z,t)$, $a = 1,2$ [6–9]. Под состоянием динамического равновесия понимается такое состояние, при котором все параметры среды эволюционируют самоподобным образом [6]. Для описания такой эволюции в простейшем случае вводятся автомодельные переменные $\xi = r/a(t)$, $\zeta = z/b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ – масштабные факторы. Первым шагом в записи всех параметров среды через автомодельные переменные является предположение, что автомодельные переменные сами являются маркерами, т.е. $e^a = \mathcal{E}^a(\xi,\zeta)$, $a = 1,2$. В этом случае приходим к следующим представлениям для параметров среды:

$$\rho = a^{-3}\mathcal{R}(\xi,\zeta),\ u = \ddot{a}\xi,\ w = \ddot{b}\zeta,\ v = a^{-1}\mathcal{V}(\xi,\zeta),$$
$$g^1 = -\frac{\Gamma_0}{ab}\frac{1}{\xi}\left(\Xi\mathcal{K}^1 - \Psi_\zeta\right),\ g^2 = -\frac{\Gamma_0}{a^2}\frac{1}{\xi}\left(\Xi\mathcal{K}^2 + \Psi_\xi\right). \tag{34}$$

Здесь $\Gamma_0 = 2\pi G M_0$, $\mathcal{V}(\xi,\zeta)$ – неизвестная функция, вычисляемая из уравнений,

$$\mathcal{R} = \frac{\aleph(\xi,\zeta)}{\xi}|\mathcal{J}(\xi,\zeta)|,\quad \mathcal{J} = \mathcal{E}^1_\xi\mathcal{E}^2_\zeta - \mathcal{E}^1_\zeta\mathcal{E}^2_\xi,$$
$$\mathcal{K}^1(\xi,\zeta) = |\mathcal{J}|\mathcal{E}^a\frac{\partial\xi}{\partial\mathcal{E}^a},\quad \mathcal{K}^2(\xi,\zeta) = |\mathcal{J}|\mathcal{E}^a\frac{\partial\zeta}{\partial\mathcal{E}^a}.$$

Функция Ψ с точки зрения классической теории тяготения определяет компенсатор вихревой составляющей гравитационного поля, которое в условиях цилиндрической симметрии имеет вид:

$$g^1_\Psi = -\Gamma_0 r^{-1}\Psi_z,\ g^2_\Psi = \Gamma_0 r^{-1}\Psi_r.$$

В автомодельных переменных система уравнений динамики в условиях динамического равновесия сводится к двум уравнениям:

$$\ddot{a}\xi - \frac{1}{a^3}\frac{\mathcal{V}^2}{\xi} = -\frac{\Gamma_0}{ab}\frac{1}{\xi}\Xi\mathcal{K}^1 - \frac{1}{ab}\frac{\Psi_\zeta}{\xi},$$
$$\ddot{b}\zeta = -\frac{\Gamma_0}{a^2}\frac{1}{\xi}\Xi\mathcal{K}^2 + \frac{1}{a^2}\frac{\Psi_\xi}{\xi}. \tag{35}$$

Для разделения переменных в этих уравнениях необходимо выполнение двух условий:

$$\Xi = \Xi_0(\xi,\zeta)\left(1 + \frac{b}{a^2}\mathcal{W}(\xi,\zeta)\right),$$
$$\Psi = \left(\frac{b}{a^2}\Psi_1(\xi,\zeta) + \Psi_0(\xi,\zeta)\right). \tag{36}$$

В результате разделения переменных (подробности см. в [6–9]) получаем следующие соотношения:

$$\lambda_1\xi^2 = -\Xi_0\mathcal{K}^1 - \Psi_{0,\zeta},\quad \lambda_2\zeta\xi = -\Xi_0\mathcal{K}^2 + \Psi_{0,\xi},$$
$$\frac{1}{\Gamma_0}\mathcal{V}^2 - \left(\Xi_0\mathcal{W}\mathcal{K}^1 + \Psi_{1,\zeta}\right) = \kappa_1\xi^2, \tag{37}$$
$$-\left(\Xi_0\mathcal{W}\mathcal{K}^1 - \Psi_{1,\zeta}\right) = \kappa_2\xi\zeta,$$

где и λ_k, κ_k, $k = 1,2$ – произвольные вещественные параметры разделения переменных. В этом случае уравнения эволюции во времени будут иметь такой вид:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{\nu_1}{ab},\qquad \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4}b + \frac{\nu_2}{a^2}, \tag{38}$$

где введены обозначения:

$$\nu_k = \Gamma_0\lambda_k,\ \ \mu_k = \Gamma_0\kappa_k,\ \ k = 1,2. \tag{39}$$

Данная система при условии $\mu_2/\mu_1 = \nu_2/\nu_1$ допускает устойчивые осцилляции вблизи точки равновесия. Более подробный анализ этих уравнений выходит за рамки данной работы.

Система (37) из четырех уравнений содержит пять неизвестных: $\mathcal{V}$ и $\mathcal{E}^a$, Ψ_a, $a = 1,2$. Функции $\mathcal{W}$, Ξ_0 определяют форму напряженности поля тяготения и должны быть заданы заранее в выбранном варианте теории тяготения. Однако следует заметить, что выбор этих функций в рамках классической теории тяготения не может быть абсолютно произвольным. Это следует из того, что при произвольном выборе $\mathcal{W}$, Ξ_0 в двух последних уравнениях системы (37) компоненты поля напряженности (выделены круглыми скобками) могут не соответствовать условию потенциальности $\mathbf{g}$. Однако в рамках альтернативной теории тяготения это требование не является обязательным. Исключая функцию Ψ_1 и оставляя одно из уравнений системы (37) для вычисления одной из функций $\mathcal{E}^a$, можно ограничиться анализом двух уравнений, которые можно записать в следующем виде:

$$\lambda_0 + 2\Xi_0\mathcal{N} - \hat{\mathbf{L}}\ln\Xi_0 = 0, \tag{40}$$
$$\frac{1}{\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\xi} = \kappa_0 - \lambda_0\mathcal{W} - \hat{\mathbf{L}}\mathcal{W},$$

где $\kappa_0 = 2\kappa_1 + \kappa_2$, $\lambda_0 = 2\lambda_1 + \lambda_2$,

$$\hat{\mathbf{L}} = \Big(\frac{1}{\xi}\Psi_{0,\zeta} + \lambda_1\xi\Big)\frac{\partial}{\partial\xi} - \Big(\frac{1}{\xi}\Psi_{0,\xi} - \lambda_2\zeta\Big)\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Первое уравнение (40), формально, является уравнением для вычисления функции $\mathcal{N}$, связанной с коэффициентом плотности $\mathcal{R} = \mathcal{N}\aleph$, а второе – для вычисления функции $\mathcal{V}$, которая определяет зональный поток, т.е. дифференциальное вращение дисковой структуры. С другой стороны, поскольку Ξ_0 и $\mathcal{W}$ неизвестны, то эти уравнения можно использовать для вычисления самих этих функций по известным из эксперимента функциям $\mathcal{R}$ и $\mathcal{V}$ или хотя бы определить их основные характеристики, исходя из общих свойств дисковых структур и их кривых вращения. Уравнения системы (40) при заданной функции концентрации маркеров $\mathcal{N} = \mathcal{R}/\aleph = |\mathcal{J}|/\xi$ и коэффициента зональной скорости $\mathcal{V}$ можно формально проинтегрировать с помощью метода характеристик. Для этого полагаем $\Xi_0 = \Xi_0(s,\tau)$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(s,\tau)$. Тогда первое уравнение системы (40) сводится к системе уравнений:

$$\frac{d\Xi_0}{ds} - \lambda_0\Xi_0 - 2\mathcal{N}\Xi_0^2 = 0,$$
$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} + \lambda_0\mathcal{W} = F(\xi,\zeta) = \kappa_0 - \frac{1}{\Gamma_0}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\xi}, \qquad (41)$$
$$\hat{\mathbf{L}}s = 1, \quad \hat{\mathbf{L}}\tau = 0.$$

Функции $s = s(\xi,\zeta)$ и $\tau = \tau(\xi,\zeta)$, являясь решениями линейных уравнений первого порядка, определяются выбором функции Ψ_0, входящей в определение оператора $\hat{\mathbf{L}}$. В результате находим (см. Приложение):

$$\Xi_0 = -\frac{1}{2}\frac{e^{\lambda_0 s}}{\int \mathcal{N}e^{\lambda_0 s}ds + C_0(\tau)}, \quad C_0 = \frac{C_2(\tau)}{C_1(\tau)},$$
$$\mathcal{W} = e^{-\lambda_0 s}\left(\mathcal{W}_0(\tau) + \int e^{\lambda_0 s}F(\xi,\zeta)ds\right), \qquad (42)$$

где $\mathcal{W}_0(\tau)$, $C_0(\tau)$, $C_1(\tau), C_2(\tau)$ – постоянные вдоль характеристик функции. Наличие функции Ξ_0 в представлении (36) функции Ξ необходимо в модели и для того, чтобы распределение плотности $\mathcal{N}$ (или $\mathcal{R}$) можно было бы сопоставить реально наблюдаемой структуре дисковых галактик. При $\Xi_0 = 1$, из первого уравнения (40) следует, что функция $\mathcal{N}$ будет всюду постоянной величиной. Наличие же функции $\mathcal{W}$ необходимо для того, чтобы имелась возможность согласовать коэффициент зональной скорости $\mathcal{V} = a(t)v$ с наблюдаемыми кривыми вращения галактик. Действительно, если полагать $\mathcal{W} = 0$, то можно видеть из второго уравнения системы (40), что коэффициент зональной скорости $\mathcal{V}$ будет описывать вращение абсолютно твердого тела: $\mathcal{V} = \pm\sqrt{\Gamma_0\kappa_0/2}\xi$. Такая ситуация соответствует твердым планетам, что может быть полезным для анализа гравитационных эффектов в экспериментах на Земле [17], но не согласуется с наблюдениями за вращением звезд и галактик. Таким образом, введение функций Ξ_0 и $\mathcal{W}$ в модель является необходимым условием получения работоспособных моделей астрофизических объектов.

8. Эффект скрытой массы. Для выяснения условий появления эффекта скрытой массы дополним (40) соотношениями, которые являются следствиями (36) при их подстановке в выражение для $\mathcal{D}$ (17). При заданной функции $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0(\mathbf{e}) + ba^{-2}(t)\mathcal{D}_1(\mathbf{e})$ уравнение (17) после разделения переменных приводит к двум уравнениям для Ξ_0 и $\mathcal{W}$:

$$\Xi_0 + \frac{1}{3}e\frac{\partial\Xi_0}{\partial e} = \mathcal{D}_0\aleph, \quad \frac{1}{3}e\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial e} = \frac{\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_0\mathcal{W}}{\Xi_0}\aleph. \qquad (43)$$

Из этих соотношений следует, что эффект скрытой массы в реальности должен проявляться не только в отклонении кривых вращения галактик от предсказаний классической теории. Этот эффект будет проявляться и в структуре распределения плотности массы в соответствии с первым уравнением системы (40). Действительно, условием отсутствия эффекта скрытой массы с точки зрения самой теории тяготения является, как уже обсуждалось выше, требование $\mathcal{D} = 1$, которое сводится теперь к двум условиям: $\mathcal{D}_0 = 1$, $\mathcal{D}_1 = 0$. Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то модель динамического равновесия будет предсказывать наличие скрытой массы. Если же эти условия выполнены, то функция Ξ_0 описывается соотношением (31), а функция $\mathcal{W}$ находится как решение второго уравнения системы (43) и имеет вид:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0(\Phi,\Theta)e^{-3U}, \quad U = \int\frac{de}{e\Xi_0}. \qquad (44)$$

Если подставить последнее выражение во второе уравнение системы (40), то можно получить общий вид коэффициента $\mathcal{V}$ зональной скорости (кривой вращения) дисковой галактики, который допускается требованием отсутствия эффекта скрытой массы при заданном распределении концентрации маркеров $\mathcal{N}$. Покажем теперь, что в случае, если на периферии галактики выполняется условие неизменности с расстоянием от ее центра скорости зонального потока v: $v \simeq \mathrm{const}$, то условие $\mathcal{D}_0 = 1$, $\mathcal{D}_1 = 0$ не выполняется. Именно условие $v \simeq \mathrm{const}$ на периферии галактик связывается с появлением эффекта скрытой массы в астрономических наблюдениях. В случае динамического равновесия условие $v \simeq \text{const}$ эквивалентно требованию $\mathcal{V} \simeq \text{const}$. Из (42) следует, что тогда на периферии галактик функция $\mathcal{W}$ должна иметь следующий вид:

$$\mathcal{W} = e^{-\lambda_0 s(\xi,\zeta)} \mathcal{W}_{00}(\tau(\xi,\zeta)) + \kappa_0/\lambda_0. \qquad (45)$$

В простейшем варианте можно предположить, что на больших расстояниях от центра галактик первым слагаемым в (45) можно пренебречь, так что в этом случае $\mathcal{W} \simeq \kappa_0/\lambda_0 = \text{const}$. При этом $\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{D}_0\kappa_0/\lambda_0$ и даже в случае $\mathcal{D}_0 = 1$ имеем: $\mathcal{D}_1 \simeq \kappa_0/\lambda_0 \neq 0$, что и требовалось доказать.

В более общей постановке задачи выяснение условий появления эффекта скрытой массы сводится к ответу на вопрос, при каких условиях совпадают решения (44) и (45), последнее из которых вычислено в предположении отсутствия этого эффекта. Для ответа на этот вопрос следует обратить внимание на то, что решение (44) определяется функцией $\mathcal{N} = \mathcal{R}/\aleph$, а решение (45) – функцией Ψ_0. Приравнивая функции $\mathcal{W}$ из этих решений, можно установить связь между функциями $\mathcal{N}$ и Ψ_0. Однако $\mathcal{N}$ и Ψ_0 по своему физическому смыслу никак не связаны между собой. Это означает, что подходящие для отсутствия эффекта скрытой массы условия будут реализовываться только в достаточно редких ситуациях, математическим определением которых является совпадение решений (44) и (45). При этом следует отметить, что отсутствие эффекта скрытой массы в кривой вращения не означает отсутствия эффекта скрытой массы в распределении плотности, которое удовлетворяет первому уравнению (41) при условии $\mathcal{D}_1 = 0$, но $\mathcal{D}_0 \neq 1$. Отсюда можно сделать вывод, что модель, предлагаемая MOND, ориентируется на очень ограниченный класс возможных типов кривых вращения при наличии эффекта скрытой массы. Кроме этого, MOND совсем не учитывает появление эффекта скрытой массы в распределении плотности среды, хотя согласно модели динамического равновесия, распределение плотности и кривая вращения являются в определенном смысле независимыми параметрами этой модели.

9. Заключение. Базовым результатом данной работы является построение общего решения классической задачи о напряженности поля тяготения в сплошной самогравитирующей среде в терминах маркеров, которое описывается обобщенным уравнением Пуассона (16). Указаны варианты, когда такое решение в точности соответствует классической теории тяготения Ньютона, а когда приводит к появлению эффекта скрытой массы. Именно этот анализ указывает на необходимость вводить в рассмотрение представление напряженности поля тяготения (15) с функциями Ξ и Ψ вида (36) в модели динамического равновесия дисковых галактик. Только в этом случае можно получить решения для распределения плотности и зональной скорости, которые могут быть сопоставлены реально наблюдаемым распределениям этих параметров, что интерпретируется обычно как эффект скрытой массы.

Вместе с тем необходимо указать на то, что представленная модель не дает ответа на вопрос о физической причине возникновения в природе именно такой формы закона тяготения (15), отличной от классической с $\Xi = \Xi_m$. Можно предположить, что эту причину следует искать в ТТФП [10–15], где эффект скрытой массы может быть связан с кривизной физического пространства, как трехмерной гиперповерхности V^3, вложенной в объемлющее евклидово пространство W^4 на единицу большей размерности. Проблема прямого использования ТТФП для описания этого эффекта состоит в том, что современный эксперимент не позволяет в явной форме получить данные о геометрических свойствах физического пространства на микроуровне и свойствах самой фундаментальной материи, из которой состоит материальная гиперповерхность $V^3 \in W^4$. Это приводит к неопределенности в форме усредненных сил, действующих на макрообъекты [15], в том числе, к невозможности однозначно описать функцию $\Xi(\mathbf{e}, t)$. Компенсировать этот недостаток можно с помощью привлечения экспериментальных данных, исследуя форму функции $\Xi(\mathbf{e}, t)$, которая обеспечивала бы наблюдаемую форму кривых вращения и распределения плотности как в звездах [9], так и в галактиках с их структурными особенностями типа джетов и балджей [8]. В данной работе представлен в общем виде математический аппарат, позволяющий сопоставлять экспериментальные данные с моделью динамического равновесия. Для реализации его на практике требуются дополнительные исследования.

Приложение

Первое уравнение системы (41) представляет собой уравнение Риккати и интегрируется с помощью подстановки:

$$\Xi_0 = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{d\Omega}{ds}.$$

Уравнение для Ω при этом будет иметь следующий вид:

$$\Omega'' - \left(\frac{d \ln \mathcal{N}}{ds} + \lambda_0 \right) \Omega' = 0.$$

Интегрируя это уравнение, приходим к соотношению (42) для Ξ_0.

Автор выражает благодарность С. В. Червону за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензентам за ценные советы и замечания.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения # 073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) # 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенным между Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова” и Министерством просвещения Российской Федерации.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. J. Einasto, arXiv:0901.0632v1 (2009).
2. А. В. Засов, А. С. Сабурова, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков, УФН **187**(1), 3 (2017).
3. D. Edmonds, J. Erlich, D. Minic, and T. Takeuchi, arXiv:2405.08744v1 (2024).
4. M. Milgrom, Astrophys. J. **270**, 365 (1983).
5. S. S. McGaugh, arXiv:1102.3913v1.
6. В. М. Журавлев, ЖЭТФ **162**(6), 850 (2022).
7. В. М. Журавлев, Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки **4**, 158 (2023).
8. В. М. Журавлев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **1**, 54 (2024).
9. В. М. Журавлев, Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки **3** (2024) (в печати).
10. В. М. Журавлев Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **4**, 6 (2014).
11. В. М. Журавлев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **4**, 25 (2014).
12. В. М. Журавлев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **3**, 44 (2015).
13. В. М. Журавлев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **4**, 104 (2015).
14. V. M. Zhuravlev, Gravitation and Cosmology **23**(2), 95 (2017).
15. V. M. Zhuravlev, Gravitation and Cosmology **28**(4), 319 (2022).
16. В. М. Журавлев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия **2**, 5 (2016).
17. T. Quinn, H. Parks, C. Speake, and R. Davis, Phys. Rev. Lett. **111**, 101102 (2013).