Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 11, с. 895 – 901

Спектр первичных гравитационных волн в квантовой версии конформной ОТО

А. Б. Арбузов[+*1)], *А. А. Никитенко*[+]

[+]*Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия*

[*]*Государственный университет "Дубна", 141980 Дубна, Россия*

Поступила в редакцию 10 октября 2024 г.
После переработки 29 октября 2024 г.
Принята к публикации 29 октября 2024 г.

Проведено вычисление мощности спектра первичных гравитационных волн в квантовой версии конформной общей теории относительности. Фундаментальными переменными квантовой гравитации в нашем подходе являются не компоненты метрического тензора, а специальные переменные, которые представляют собой динамическую часть спиновой связности. Показано, что наша модель в борновском приближении воспроизводит стандартную мощность спектра первичных гравитационных волн, сгенерированных в процессе канонической инфляции. Это позволило опробовать квантовую версии конформной теории гравитации в конкретной феноменологической задаче.

DOI: 10.31857/S0370274X24120118, EDN: YXEADI

1. Введение. В настоящее время основной моделью, решающей проблему космологического горизонта, является модель инфляции. Инфляционная модель строится на основе так называемой квазиклассической гравитации, в которой гравитация все еще рассматривается как классическое поле, а материальные поля как квантовые. Одним из главных предсказаний инфляционной модели являются первичные гравитационные волны. Как ожидается, первичные гравитационные волны вполне реально зарегистрировать в обозримом будущем, и это должно позволить дискриминировать различные модели космологии и гравитации [1]. Таким образом, рассмотрение отличий в предсказаниях первичных гравитационных волн любой модифицированной теории гравитации от стандартной общей теории относительности (ОТО) является замечательной возможностью проверки как моделей инфляции, так и теории гравитации в наблюдательных астрофизических экспериментах [2].

В данной работе мы изучаем процесс генерации первичных гравитационных волн в модели квантовой гравитации, получающейся в результате квантования конформной версии ОТО в специальных переменных, и производим сравнение мощности их спектра с тем, что получается в рамках стандартной ОТО.

Также данная работа является первой проверкой феноменологических следствий рассматриваемой нами квантовой теории гравитации [3, 4].

Зададим сначала конформное преобразование метрики $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = e^{-2D}\ \widetilde{g}_{\mu\nu}\ d\chi^\mu \otimes d\chi^\nu, \tag{1}$$

где $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ – конформная метрика, и D – дилатон.

Суть конформной модификации ОТО заключается в следующем: конформно неинвариантное действие Эйнштейна–Гильберта

$$S_{\rm GR} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{16\pi}(R - 2\Lambda) + L_{\rm matter}(g_{\mu\nu})\right] \tag{2}$$

сначала модифицируется с помощью преобразований Вейля к виду, в котором все конформные веса выделены явно [5, 6]

$$S_{\rm CGR} = \int d^4\chi \sqrt{-\widetilde{g}} \left[\frac{\widetilde{M}_P^2}{16\pi}\left(\widetilde{R} - 2\widetilde{\Lambda}\right) + \frac{3\widetilde{M}_P^2}{8\pi}\left(\widetilde{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu D \nabla_\nu D\right) + L_{\rm matter}(\widetilde{g}_{\mu\nu})\right]. \tag{3}$$

Здесь Λ – космологическая постоянная, $\widetilde{\Lambda} = e^{-2D}\Lambda$ – конформная космологическая постоянная, M_P – масса Планка, $\widetilde{M}_P = M_P e^{-D}$ – конформная масса Планка. Затем на полученное выражение (3) налагается требование конформной инвариантности. Вследствие этого действие исходной ОТО заменяется на

1) e-mail: arbuzov@theor.jinr.ru

другое действие, которое уже удовлетворяет условию конформной инвариантности. Предполагается, что наблюдаемое нарушение конформной симметрии происходит спонтанно, что можно описать в подходе нелинейной реализации симметрии [7]. Таким образом, конформная общая теория относительности не полностью эквивалентна стандартной ОТО, фактически она представляет собой модифицированную теорию гравитации. Поэтому мы будем называть действие (3) действием конформной ОТО.

Ключевое отличие конформной ОТО от стандартной заключается в том, что в ней предполагается, что феноменологически мы наблюдаем конформные значения всех физических величин, а не стандартные, как это по умолчанию предполагается в классической ОТО. В частности, в конформной ОТО считается, что, если в каком-то измерении наблюдаемые величины равны стандартным, то это просто означает, что значение конформного фактора равно единице для рассматриваемого случая.

Наиболее ярко в таком случае различия в предсказаниях между конформной и стандартной ОТО следует ожидать в случае их квантования.

Заранее отметим, что в статье используется четыре типа индексов: четырехмерные координатные индексы без скобок будут обозначаться греческими буквами и пробегать значения $0\ldots3$. Трехмерные координатные индексы без скобок из середины латинского алфавита $i,j\ldots$, обозначают трехмерные пространственные индексы и принимают значения $1\ldots3$. Также в работе активно используются реперные индексы, которые мы будем заключать в круглые скобки. Реперные индексы так же, как и координатные, могут принимать значения $0\ldots3$ (четырехмерные пространственно-временные) и $1\ldots3$ (трехмерные пространственные). В том случае, если реперный индекс принимает значения $0\ldots3$, то мы его будем обозначать буквами из начала латинского алфавита $a,b\ldots$ и заключать в круглые скобки. Если же реперный индекс принимает значения $1\ldots3$, то мы его будем обозначать буквами из середины латинского алфавита и заключать в круглые скобки. Поскольку в работе также приходится иметь дело с суммированием по поляризациям, то заранее информируем читателя о том, что индексами (p) и (q) мы всегда обозначаем поляризационные индексы у классических и конформных гравитонов.

Статья построена следующим образом. Сначала будут приведены необходимые для нашего рассмотрения базовые положения используемого формализма. Далее будет кратко описана известная методика получения спектра мощности первичных гравитационных волн в стандартной модели инфляции на основе ОТО. И, наконец, следуя аналогии со стандартным подходом, будет приведен расчет спектра мощности для случая конформной ОТО с последующим обсуждением полученного результата.

2. Предварительные замечания об используемом формализме. В данной работе мы используем формализм, развитый нами и другими авторами в более ранних работах по конформной ОТО. В настоящем разделе мы кратко приведем только те его аспекты, которые будут использованы для анализа первичных гравитационных волн в конформной ОТО. Для более подробного изложения смотрите [3, 4, 8] и приложение.

Центральное место в рассматриваемом формализме занимают тетрадные поля и спиновые связности. Переменные $\omega_{\alpha(a),}{}^{(b)}$ представляют собой компоненты спиновой связности. В конформной ОТО спиновая связность является метрической. Таким образом подразумевается, что отсутствуют кручение и неметричность [9]. В статье [4] показано, что компоненты спиновой связности в тетрадном представлении выражаются формулой

$$\begin{aligned}\omega_{(a),(b)(c)} &= \frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(a)}\left(e^{\beta}{}_{(c)}\partial_\alpha e_{\beta(b)} - e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{\beta(c)}\right)\\ &+ \frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(b)}\left(e^{\beta}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{\beta(c)} + e^{\beta}{}_{(c)}\partial_\alpha e_{\beta(a)}\right)\\ [1mm] &- \frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(c)}\left(e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{\beta(a)} + e^{\beta}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{\beta(b)}\right)\\ &:= \omega^L_{(c)(b),(a)} + \omega^R_{(a)(c),(b)} - \omega^R_{(b)(a),(c)}. \end{aligned}\tag{4}$$

Формула (4) отличается знаком от приведенных ранее в работах [8, 3], но это никоим образом не влияет на представленные ниже результаты.

Компоненты $\omega^L_{(a)(c),(\alpha)}$ и $\omega^R_{(a)(c),(\alpha)}$ в тетрадном представлении выражаются формулами

$$\omega^L_{(a)(c),\alpha}dx^\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\beta}{}_{(c)}de_{\beta(a)} - e^{\beta}{}_{(a)}de_{\beta(c)}\right), \tag{5}$$

$$\omega^R_{(a)(c),\alpha}dx^\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\beta}{}_{(c)}de_{\beta(a)} + e^{\beta}{}_{(a)}de_{\beta(c)}\right). \tag{6}$$

Обоснование и мотивацию для введения $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ и $\omega^L_{(a)(b),(c)}$ можно найти в наших предыдущих работах [8, 10, 3], а их связь с голдстоуновскими полями в [10, 11]. Далее там, где это не приводит к потере смысла, мы часто для краткости будем опускать индексы и обозначать эти объекты просто как ω^R и ω^L.

В работах [3, 4] было показано, что дифференциал метрического тензора не зависит от переменных ω^L, и была получена формула

$$dg_{\mu\nu} = dx^{\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = \Big(e_{\mu}{}^{(b)}e_{\nu}{}^{(a)} + e_{\mu}{}^{(a)}e_{\nu}{}^{(b)}\Big)\,\omega^{R}{}_{(b)(a),\alpha}dx^{\alpha}. \tag{7}$$

В нашем подходе в отличие от телепараллелизма и других тетрадных подходов постулируется, что тетрадные матрицы $e_{\mu}{}^{(b)}$ не являются объектом динамики гравитационного поля, а вся динамика на фундаментальном уровне содержится в спиновой связности. В таком случае отсутствие ω^{L} в выражении для дифференциала (7) следует трактовать так, что вся динамика метрического тензора может содержаться только в ω^{R}.

В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением глобально гиперболических пространств-времен. Тогда из теоремы Героуча о расщеплении [12–14] следует, что рассматриваемое пространство-время $(\mathbb{M},\mathbf{g})$ представимо в виде прямого произведения $\mathbb{M}=\mathbb{R}\times\mathbb{S}$, где $\mathbb{S}$ – пространственноподобная 3-поверхность (гиперповерхность) Коши. Следовательно, для данного пространства-времени справедлив формализм Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ). Из всей специфики которого нам здесь понадобиться лишь функция хода. Подробно АДМ излагается в [15]. Без потери общности функцию хода $N(\chi^0,\chi^1,\chi^2,\chi^3)$ можно представить в виде [16]

$$N(\chi^0,\chi^1,\chi^2,\chi^3) = N_0(\chi^0)\mathcal{N}(\chi^0,\chi^1,\chi^2,\chi^3). \tag{8}$$

В (8) N_0 является глобальной частью функции хода, а $\mathcal{N}$ – локальная часть функции хода. Тогда форму объема с учетом (8) можно переписать как

$$d^4x\,\sqrt{-\widetilde{g}} = d\chi^0 N_0\; d^3\chi\sqrt{\gamma}\;\mathcal{N}, \tag{9}$$

где γ – определитель пространственной метрики. Это позволяет отдельно выделить интегрирование по пространственным координатам в действии конформной ОТО (3), которое теперь приобретает вид

$$S_{\text{Gravitons}} = \int d\chi^0 N_0 \int d^3\chi\sqrt{\gamma}\;\mathcal{N}\;\frac{\widetilde{M}_P^2}{16\pi}\widetilde{R}. \tag{10}$$

Таким образом, (10) разделяется на временную и пространственную части. Мы также опустили Λ-член, поскольку его наличие не существенно для дальнейшего анализа.

3. Первичные гравитационные волны в канонической модели инфляции. В этом разделе мы кратко изложим необходимый нам формализм, используемый при исследовании первичных гравитационны волн. Как правило, исследование первичных гравитационных волн посредством преобразований стараются свести к хорошо определенной ситуации волн скалярного поля. Поэтому мы начнем с краткого обсуждения флуктуаций скалярного поля $\phi(x)$.

Важнейшей характеристикой излучения является его спектр мощности $P(\mathbf{k})$. Он определяется формулой

$$\langle\phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}')\rangle = P_{\phi}(k)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{11}$$

Отметим, что символом $\mathbf{k}$ мы далее при работе с безмассовыми скалярными полями будем обозначать трехмерную часть 4-импульса, а для модуля $\mathbf{k}$ в большинстве случаев использовать сокращенное обозначение $k=|\mathbf{k}|$. Отметим, что термин спектр мощности также используется и применительно к другой физической величине $\mathcal{P}_{\phi}(\mathbf{k})$, которая связана с $P_{\phi}(\mathbf{k})$ простым соотношением $P_{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_{\phi}(\mathbf{k})$. Соответственно, в (11) имеем

$$\langle\phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}')\rangle = \frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_{\phi}(k)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{12}$$

Спектр мощности $\mathcal{P}_{\phi}(\mathbf{k})$ связан с флуктуацией скалярного поля посредством формулы

$$\langle\phi^2(x)\rangle = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\mathcal{P}_{\phi}(k). \tag{13}$$

Отметим, что, хотя слева и стоит так называемое квазиклассическое усреднение, квантовое усреднение по вакууму определяется аналогично.

Вычислим величину мощности спектра для случая пространства Минковского для безмассового поля Клейна–Гордона. Свободное скалярное поле имеет вид

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}\left(e^{ik\cdot x}a^{+}(\mathbf{k}) + e^{-ik\cdot x}a(\mathbf{k})\right). \tag{14}$$

Выполняя квантовое усреднение по вакуумному состоянию, раскрываем скобки и, пользуясь коммутационным соотношением $a(\mathbf{k})a^{+}(\mathbf{k}') - a^{+}(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, получаем формулу

$$\langle 0|\phi^2(x)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2k_0} = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 = \int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\mathcal{P}_{\phi}(k). \tag{15}$$

Таким образом, в случае пространства Минковского мощность спектра для скалярного поля задается формулой $\mathcal{P}_{\phi}(k) = (k/2\pi)^2$. Подробное обсуждение этих определений, включая их свойства и мотивацию, можно найти в [17–19]. Аналогичные формулы могут быть получены и для тензорных полей. А именно, случай тензорного поля можно свести к случаю скалярного поля посредством разложения в сумму по поляризациям с использованием поляризационных операторов [17, 18]. Сейчас мы кратко обсудим необходимую нам специфику получения спектра мощности первичных гравитационных волн в канонической модели инфляции, построенной на основе ОТО.

Метрику первичной гравитационной волны в канонической модели инфляции в простейшем случае записывают в виде [20, 17]

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\right]. \tag{16}$$

Разлагая действие Эйнштейна–Гильберта в ряд по метрическим возмущениям и оставляя лишь квадратичные по ним члены, получаем выражение для действия

$$S^{(2)} = \frac{M_{Pl}^2}{8}\int d\eta\, d^3x\, a^2\left(\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} - \partial_i h_{ij}\partial^i h^{ij}\right). \tag{17}$$

Фурье-разложение возмущения метрики по импульсу имеет вид

$$h_{ij}(x) = \sum_{p=\pm 2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} h_{ij}^p(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{kx}}. \tag{18}$$

Поляризационные операторы обладают следующими важными свойствами, которые используются ниже для вычислений:

$$m_{ij}^{(p)}(\hat{\mathbf{k}})\left[m^{(q)ij}(\hat{\mathbf{k}})\right]^* = \delta^{(p)(q)}, \tag{19}$$

$$\left[m_{ij}^{(p)}(\hat{\mathbf{k}})\right] = m_{ij}^{(-p)}(\hat{\mathbf{k}}) = m_{ij}^{(p)}(-\hat{\mathbf{k}}). \tag{20}$$

Используя Фурье-разложение (18), тождества (19) и (20), а также свойства дельта-функции Дирака, получаем

$$\begin{aligned}\int d^3x \dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} &= \sum_{p,q=\pm 2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{2}\dot{h}^{(p)}(\eta, \mathbf{k}) \\ &\dot{h}^{(q)}(\eta, \mathbf{k}') m_{ij}^{(p)}(\hat{\mathbf{k}}) m^{(q)\ ij}(\hat{\mathbf{k}}')\int d^3x e^{i(\mathbf{k}+\hat{\mathbf{k}'})\mathbf{x}} \\ &= \sum_{p,q=\pm 2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{2}\dot{h}^p(\eta, \mathbf{k})\dot{h}^q(\eta, \mathbf{k}') \\ &\times m_{ij}^{(p)}(\hat{\mathbf{k}}) m^{(q)\ ij}(\hat{\mathbf{k}}')(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\hat{\mathbf{k}}') \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p=\pm 2}\int d^3k\left[\dot{h}^{(p)}(\eta, \mathbf{k})\right]^2.\end{aligned}$$

Выполняя аналогичные преобразования для второго слагаемого, получаем

$$\int d^3x \partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} = -\frac{1}{2}\sum_{p=\pm 2}\int d^3k\, k^2\left[h^p(\eta, \mathbf{k})\right]^2. \tag{21}$$

Объединяя результаты, получаем для членов второго порядка действия выражение

$$S^{(2)}_{\text{Gravitons}} = \sum_{p=\pm 2}\int dx^0\ d^3k \frac{M_P^2}{16}\left((\dot{h}^{(p)})^2 - h^{(p)}h^{(p)}\right). \tag{22}$$

Таким образом, задачу о вычислении спектра мощности первичных гравитационных волн удается свести к вычислению спектра мощности первичных возмущений скалярного поля ϕ.

4. Первичные гравитационные волны в конформной ОТО. В работе [4] анализировались квантовые аспекты конформной ОТО на примере нелинейной гравитационной волны, описываемой метрикой

$$\widetilde{g} = -dx^0\otimes dx^0 + dx^3\otimes dx^3 + e^{\sigma}dx^1\otimes dx^1 + e^{-\sigma}dx^2\otimes dx^2. \tag{23}$$

В результате этого анализа было показано, что общее выражение, описывающее распространение свободной плоской гравитационной волны в конформной ОТО, имеет вид

$$\begin{aligned}\omega^R_{(a)(b),(c)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\, ik_{(c)}\Big[&\epsilon^R_{(a)(b)}(k) g_k^+ e^{ik\cdot x} \\ &+ \epsilon^R_{(a)(b)}(-k) g_k^- e^{-ik\cdot x}\Big].\end{aligned} \tag{24}$$

В (24) g_k^+ и g_k^- трактовались как операторы рождения и уничтожения конформных гравитонов, а переменные $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ рассматривались в качестве фундаментальных переменных квантовой гравитации и, соответственно, считались операторами. При этом тензора поляризации $\epsilon^R_{(a)(b)}(k)$ и $\epsilon^R_{(a)(b)}(-k)$ остаются стандартными. Отметим, что переменные, которые мы называем конформными гравитонами, не являются прямыми аналогами стандартных гравитонов и не связаны с последними конформными преобразованиями.

В настоящей работе мы исследуем первичные гравитационные волны в рамках квантовой версии конформной ОТО. В своем анализе мы будем отталкиваться от результатов более ранних работ [3, 4]. Число степеней свободы произвольной гравитационной волны, как и в метрике первичной гравитационной волны в канонической модели инфляции, остается равным двум.

Мы собираемся выяснить, будет ли мощность спектра первичных гравитационных волн, сгенерированных в процессе инфляции, полученная на основе конформной версии ОТО, совпадать с той, что получается в канонической ОТО. Чтобы это сделать, мы будем считать, что стандартная метрика имеет то же выражение, что и в классической ОТО, т.е.

$$ds^2 = a^2(x^0)\widetilde{g}_{\mu\nu} = a^2(x^0)\left[-(dx^0)^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\right], \tag{25}$$

где x^0 здесь обозначает конформное время.

Прежде всего отметим, что действие для конформной ОТО в данной ситуации совпадает с действием стандартной ОТО. В самом деле, как было отмечено в более ранних работах, среднее значение дилатона следует связать с масштабным фактором формулой $\langle D\rangle = -\ln(a(x^0))$. Тогда для конформной массы Планка, входящей в формулу (3), имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_P^2 &= M_P^2 e^{2\langle D\rangle} = M_P^2 e^{-2\ln(a(x^0))}\\ &= M_P^2\left(e^{\ln(a(x^0))}\right)^{-2} = M_P^2 a^{-2}(x^0).\end{aligned} \tag{26}$$

Как обсуждалось в предыдущем разделе, гравитационная часть действия в конформной ОТО задается формулой (10). Конформная скалярная кривизна связана со стандартной формулой

$$\widetilde{R} = \Omega^{-2}\left(R - 6g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Omega + 6g^{\mu\nu}\nabla_\mu\ln\Omega\nabla_\nu\ln\Omega\right). \tag{27}$$

Тогда, учитывая соотношения (26) и (27), действие конформной ОТО (10) может быть сведено к действию стандартной ОТО [17]. Переход между стандартным действием Эйнштейна–Гильберта и действием конформной ОТО можно найти в известных монографиях [17] и [21]. В таком случае после использования линеаризации [17] мы получим стандартное выражение для членов второго порядка гравитационного действия

$$\begin{aligned}S^{(2)}_{\text{Gravitons}} &= \int dx^0\ d^3x \frac{\widetilde{M}_P^2}{8}\left(\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} - \partial_i h_{ij}\partial^i h^{ij}\right)\\ &= \sum_{p=\pm 2}\int dx^0\ d^3k \frac{\widetilde{M}_P^2}{16}\left((\dot{h}^{(p)})^2 - h^{(p)}h^{(p)}\right)\\ &= \sum_{p=\pm 2}\frac{M_P^2}{8}\int dx^0\ d^3k\ a^2(x^0)\frac{1}{2}\left((\dot{h}^{(p)})^2 + k^2(h^{(p)})^2\right).\end{aligned} \tag{28}$$

Как было показано в работе [4], в общем случае компоненты метрического тензора связаны с переменными ω^R посредством дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{(c)}} = \left(e_\mu{}^{(b)}e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)}e_\nu{}^{(b)}\right)\omega^R_{(b)(a),(c)}. \tag{29}$$

Выражение в скобках $\left(e_\mu{}^{(b)}e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)}e_\nu{}^{(b)}\right)$ соответствует суммированию по поляризациям. Важное отличие нашего расчета от стандартного связано с двумя моментами. Во-первых, формула (29) связывает переменные $\omega^R_{(b)(a),(c)}$ с конформной метрикой $\widetilde{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \widetilde{h}_{\mu\nu}$, а не со стандартной $g_{\mu\nu}$. Во-вторых, как было уже отмечено выше, в нашем подходе к квантовой гравитации $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ считаются базовыми переменными при квантовании гравитации и, соответственно, они являются операторами. Конформную метрику $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ мы строим как малое возмущение метрики Минковского. В этом случае уравнения (29) примут вид

$$\frac{\partial\widetilde{h}_{\mu\nu}}{\partial x^{(c)}} = \left(e_\mu{}^{(b)}e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)}e_\nu{}^{(b)}\right)\omega^R_{(b)(a),(c)}. \tag{30}$$

Мы будем рассматривать слабые гравитационные волны. Заметим, что анзац метрики (25) не содержат недиагональных компонент. Тогда в первом приближении компоненты базисных тетрад можно считать единичными матрицами, и в этом случае уравнения (30) могут быть легко проинтегрированы. Фактически в данном приближении тетрадный базис совпадает с координатным. Тогда, интегрируя (30), получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{h}_{\mu\nu}(x) &= \left(e_\mu{}^{(b)}e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)}e_\nu{}^{(b)}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\\ &\times\left[\epsilon^R_{(a)(b)}(k)g_k^+ e^{ik\cdot x} + \epsilon^R_{(a)(b)}(-k)g_k^- e^{-ik\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{31}$$

Флуктуации тензорного поля можно свести к флуктуациям скалярного поля (с учетом наличия двух поляризаций) посредством замены $\sum\limits_{p=\pm 2}\frac{1}{\sqrt{2}}m_{ij}^{(\pm\,2)}(x)h^{(p)}(x)$. В таком случае формула (31) принимает вид

$$\begin{aligned}\widetilde{h}_{ij}(x) &= \sum_{p=\pm 2}\frac{1}{\sqrt{2}}m_{ij}^{(\pm\,2)}(x)h^{(p)}(x)\\ &= \left(e_\mu{}^{(b)}e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)}e_\nu{}^{(b)}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\\ &\times\left[\epsilon^R_{(a)(b)}(k)g_k^+ e^{ik\cdot x} + \epsilon^R_{(a)(b)}(-k)g_k^- e^{-ik\cdot x}\right]\\ &= \sum_{p=\pm 2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[\epsilon^R_{\mu\nu}(k)g_k^+ e^{ik\cdot x}\right.\\ &\quad\left. + \epsilon^R_{\mu\nu}(-k)g_k^- e^{-ik\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{32}$$

В этом разделе мы будем считать, что поляризационные операторы в координатном представлении нормированы условием $m_{ij}^{(p)}(x)m^{(q)|ij}(x) = 2\delta^{(p)(q)}$.

Вычислим теперь величину вакуумной флуктуации с использованием нашего представления для конформных гравитонов. Здесь мы воспользуемся тем, что в конформной ОТО наблюдаемой является не стандартная, а конформная метрика. Следовательно, в нашей ситуации это будут малые возмущения над метрикой Минковского. Вычислим сначала вакуумное произведение двух гравитационных полей в точках $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ в один и тот же момент времени, т.е. при $x^0 = y^0$. Для краткости далее мы будем вместо (x^0, x^1, x^2, x^3) использовать обозначение x, а под y будем подразумевать $y = (x^0, y^1, y^2, y^3)$, имея при это ввиду, что $x^0 = y^0$. Получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\widetilde{h}_{ij}(x)\widetilde{h}^{ij}(y)|0\rangle = \langle 0|\sum_{p,q=\pm 2}\frac{1}{2}m^{(p)}_{ij}(x)m^{(q)|ij}(y)\\
&\times h^{(p)}(x)h^{(q)}(y)|0\rangle = \langle 0|\sum_{p,q\pm 2}\frac{1}{2}\delta^{(p)(q)}h^{(p)}(x)h^{(q)}(y)|0\rangle\\
&= \langle 0|\sum_{p,q=\pm 2}\int\frac{d^3k\ d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left[\epsilon^R_{\mu\nu}(k)g^+_k e^{ik\cdot x}\right.\\
&\left.+\ \epsilon^R_{\mu\nu}(-k)g^-_k e^{-ik\cdot x}\right]\left[\epsilon^R_{\mu\nu}(k')g^+_{k'}e^{ik'\cdot y}\right.\\
&\left.+\ \epsilon^R_{\mu\nu}(-k')g^-_{k'}e^{-ik'\cdot y}\right]|0\rangle\\
&= \langle 0|\sum_{p,q=\pm 2}\int\frac{d^3k\ d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\\
&\times\left[\epsilon^{R\ (p)}_{\mu\nu}(-k)\epsilon^{R\ (q)|\mu\nu}(k')e^{-ik\cdot x+ik'\cdot y}\right]|0\rangle\\
&= \langle 0|\sum_{p,q=\pm 2}\int\frac{d^3k\ d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\\
&\times\left[\delta^{(p)(q)}\left(g^+_{k'}g^-_k + \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right)e^{-ik\cdot x+ik'\cdot y}\right]|0\rangle\\
&= \sum_{p=\pm 2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\delta^{(p)(p)}e^{-ik\cdot(x-y)}\right]. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Поскольку 4-вектор гравитационной волны является световым, для него в пространстве Минковского справедливо $-(k_0)^2 + (k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^3 = 0$. В связи с этим мы для краткости будем обозначать модуль его пространственной части $|\mathbf{k}| = \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^3}$ просто как k. Поскольку нас интересует среднеквадратичное отклонение в одной точке, то есть, когда $x = y$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\widetilde{h}_{ij}(x)\widetilde{h}^{ij}(x)|0\rangle = \lim_{x\to y}\langle 0|\widetilde{h}_{ij}(x)\widetilde{h}^{ij}(y)|0\rangle\\
&= \lim_{x\to y}\sum_{p=\pm 2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[\delta^{(p)(p)}e^{-ik\cdot(x-y)}\right]\\
&= 2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k} = 2\int\frac{dk}{(2\pi)^3}\frac{4\pi k^2}{2k}\\
&= 2\int_0^\infty d\ln|k|\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 = 2\int_0^\infty d\ln|k|\mathcal{P}_h(k), \qquad (34)
\end{aligned}
$$

где было использовано коммутационное соотношение для операторов рождения и уничтожения $g^-_k g^+_{k'} - g^+_{k'}g^-_k = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, а также тот факт, что $\lim\limits_{x\to y} e^{-ik\cdot(x-y)} = 1$. Таким образом, мы фактически воспроизвели классический результат для значения вакуумных флуктуаций в пространстве Минковского. Итак, спектр мощности гравитационных волн, распространяющихся на фоне пространства Минковского, равен

$$
\widetilde{\mathcal{P}}_{h_{ik}}(k) = \frac{4}{M_P^2}\sum_{p=\pm 2}\widetilde{\mathcal{P}}_h(k) = \frac{8}{M_P^2}\widetilde{\mathcal{P}}_h(k) = \frac{8}{M_P^2}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2. \qquad (35)
$$

Вспоминая, что k представляет собой конформный импульс, который связан со стандартным через конформный фактор по формуле $q(x^0) = k/a(x^0) = H_k$, нам следует сделать в выражении для конформной мощности спектра замену, учитывающую этот фактор. В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{h_{ik}}(k) &= \sum_{p=\pm 2}\mathcal{P}_h(k) = \frac{8}{M_P^2}a^{-2}(x^0)\widetilde{\mathcal{P}}_h(k)\\
&= \frac{8}{M_P^2}a^{-2}(x^0)\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 = \frac{8}{M_P^2}\left(\frac{H_k}{2\pi}\right)^2. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Таким образом, конформный спектр мощности отличается от стандартного умножением на соответствующий конформный вес $a^2(x^0)$, как и следовало ожидать. Итак, отталкиваясь от квантования конформной ОТО в переменных ω^R, мы можем формально воспроизвести мощность спектра гравитационных волн, возникающих в канонической модели инфляции, которая получается из квазиклассических соображений.

5. Заключение. В настоящей работе на основе квантования конформной версии ОТО в специальных переменных ω^R получено выражение для спектра мощности первичных гравитационных волн, совпадающее с тем, что получается в рамках стандартной ОТО. В наших вычислениях фундаментальную роль играло выражение (24), которое описывает конформные гравитоны. Хотя сами переменные ω^R в нашем подходе предполагаются фундаментальными переменными квантовой гравитации, в физическом отношении главную роль по-прежнему играет метрический тензор. Последний в нашем подходе является оператором, поскольку он связан с ω^R дифференциальными уравнениями первого порядка (29), а сам объект ω^R по построению является квантовым оператором.

Тот факт, что из (24) удалось получить выражение для мощности спектра, совпадающее с выражением, получаемым из квазиклассических соображений на основе классической ОТО, означает, что наш подход по крайней мере, не противоречит канонической модели. В этой связи стоит отметить, что наши расчеты соответствуют основному (борновскому) приближению. Это, в частности, было использовано при интегрировании уравнений (31). Поэтому было бы весьма интересно выяснить, какой будет мощность спектра гравитационного излучения в данной модели с учетом поправок более высокого порядка. Но это потребует отдельного исследования и будет темой другой работы.

Приложение. Тетрады и спиновая связность

Здесь мы приводим некоторые формулы, используемые при работе с тетрадным формализмом и спиновой связностью. Разложение тетрады по координатному базису имеет вид

$$e_{(a)} = e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_{\alpha}. \tag{A.1}$$

Разложение котетрады по базису 1-форм (ковекторов) из кокасательного пространства имеет вид

$$e^{(a)} = e_{\alpha}{}^{(a)}dx^{\alpha}. \tag{A.2}$$

На котетрады накладываются следующие условия:

$$e^{\alpha}{}_{(a)}e_{\alpha}{}^{(b)} = \delta^{(b)}_{(a)}, \quad e^{\alpha}{}_{(a)}e_{\beta}{}^{(a)} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{A.3}$$

Определим также величины $e_{\nu(a)}$ по формуле

$$e_{\nu(a)} = \eta_{(a)(d)}e_{\nu}{}^{(d)}, \tag{A.4}$$

где $\eta_{(a)(d)}$ – метрика Минковского. Поскольку $\eta_{(a)(d)}$ являются константами и не зависят от точки многообразия, то $\eta_{(a)(d)}$ можно свободно вносить и выносить из-под знака любой производной. Спиновая связность на расслоении реперов связана с аффинной связностью формулой [9]

$$\nabla_{\alpha}e_{\beta}{}^{(a)} = \partial_{\alpha}e_{\beta}{}^{(a)} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}e_{\gamma}{}^{(a)} + e_{\beta}{}^{(b)}\omega_{\alpha(b),}{}^{(a)} = 0. \tag{A.5}$$

Авторы выражают благодарность Б. Н. Латошу за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. K. N. Abazajian, P. Adshead, Z. Ahmed et al. (Collaboration), *CMB-S4 Science Book*, First Edition, **10** (2016).
2. P. A. R. Ade, Z. Ahmed, M. Amiri et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **127**(15), 151301 (2021).
3. A. Arbuzov and B. Latosh, Universe **4**(2), 38 (2018).
4. A. B. Arbuzov and A. A. Nikitenko, Universe **10**(7), 294 (2024).
5. S. Deser, Ann. Physics **59**, 248 (1970).
6. P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **333**, 403 (1973).
7. A. B. Borisov and V. I. Ogievetsky, Teor. Mat. Fiz. **21**, 329 (1974) [Theor. Math. Phys. **21**, 1179 (1975)].
8. A. B. Arbuzov, A. Y. Cherny, D. J. Cirilo-Lombardo, R. G. Nazmitdinov, N. S. Han, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, and A. F. Zakharov, Phys. Atom. Nucl. **80**(3), 491 (2017).
9. M. O. Katanaev, *Geometrical methods in mathematical physics*, **10** (2013); arXiv:1311.0733 [math-ph].
10. V. I. Ogievetsky, Lett. Nuovo Cim. **8**, 988 (1973).
11. E. A. Ivanov, Phys. Part. Nucl. **47**(4), 508 (2016).
12. R. P. Geroch, J. Math. Phys. **8**, 782 (1967).
13. R. P. Geroch, J. Math. Phys. **11**, 437 (1970).
14. A. N. Bernal and M. Sanchez, Comm. Math. Phys. **243**, 461 (2003).
15. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).
16. L. N. Gyngazov, M. Pawlowski, V. N. Pervushin, and V. I. Smirichinsky, Gen. Rel. Grav. **30**, 1749 (1998).
17. D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, *Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*, World Scientific publishing, Singapore (2011).
18. G. Domènech, *Lectures on Gravitational Wave Signatures of Primordial Black Holes*, **7** (2023); arXiv:2307.06964 [gr-qc].
19. M. C. Guzzetti, N. Bartolo, M. Liguori, and S. Matarrese, Riv. Nuovo Cim. **39**(9), 399 (2016).
20. K. Dimopoulos, *Observable Primordial Gravitational Waves from Cosmic Inflation*, in *40th Conference on Recent Developments in High Energy Physics and Cosmology* **8** (2023); arXiv:2308.00777 [gr-qc].
21. R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, USA (1984).