

КВАЗИАДИАБАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ДИПОЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

В.Д.Ильин, И.В.Ильин¹⁾, С.Н.Кузнецов, Б.Ю.Юшков

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ
119899, Москва

¹⁾Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142092, г.Троицк, Московская обл.

Поступила в редакцию 22 апреля 1992 г.

Найдена модель движения для неадиабатических частиц в области стохастической неустойчивости. В предлагаемой модели в отличие от общеизвестной адиабатической теории частица закручивается не на силовую линию, а на траекторию, проходящую через центр диполя (ЦТ). Показано существование постоянной движения – аналога магнитного момента в адиабатической модели. Приведены формулы перехода, от системы координат, связанной с силовой линией, к системе отсчета с ЦТ. Преобразования между системами координат представляют собой эйлеровы повороты в направлении вращения и дрейфа частицы. На основе этих представлений найдено простое отображение Пуанкаре для системы с ЦТ, описывающее длительную эволюцию частиц.

Исследование динамики гамильтоновой системы "частица – поле диполя" представляет интерес с различных точек зрения. Прежде всего эта система является наиболее простой нелинейной системой, в которой проявляется детерминированный хаос. Это в свою очередь связано с проблемой устойчивости движения частиц в магнитных ловушках и, в частности, (вследствие дипольности поля) в магнитных ловушках многих космических объектов.

Существующая модель движения в основном опирается на понятие первого адиабатического инварианта (магнитного момента частицы μ) и степени его сохранения в зависимости от параметра адиабатичности χ . Величина $\mu \sim \sin^2 \alpha / B$, где α – угол между скоростью и полем, B – магнитное поле. Параметр $\chi = \rho / R_c$, где $\rho = v_0 / \omega$ – полный ларморовский радиус в медианной (экваториальной) плоскости, R_c – радиус кривизны силовой линии, v_0 – модуль вектора скорости, ω – ларморовская частота. Разрушение инварианта μ связано с существованием резонансов между колебаниями частицы по разным степеням свободы, что в итоге может приводить к стохастизации движения. Такой резонансный подход развит в ¹. Существенным здесь является представление о том, что величина μ "скачкообразно" меняется при прохождении экваториальной плоскости. При достаточно малых значениях $\chi \ll 1$ действительно можно считать, что до экватора величина $\mu_1 \simeq \text{const}_1$ и после экватора $\mu_2 \simeq \text{const}_2$. Это позволяет легко находить положение точек отражения. Однако уже при $\chi \gtrsim 0,1$ картина существенно усложняется, и здесь не помогают уточненные выражения для μ , связанные с учетом последующих членов асимптотического ряда для магнитного момента ⁶.

Все радикально упрощается, если движение произвольной частицы рассматривать не относительно магнитной силовой линии, а относительно соответствующей ЦТ. Кратко опишем вычислительный алгоритм определения ЦТ и некоторые ее свойства. Под ЦТ подразумевается траектория частицы, инжектированной из центра диполя вдоль заданной силовой линии, то есть с углом $\alpha = 0$. Из-за ограниченных возможностей ЭВМ точка инжекции выбиралась на заданной силовой линии на таком расстоянии от центра диполя, когда ее положение практически не влияло на результаты счета. Двигаясь по ЦТ частица почти не вращается, так как скорость ларморовского вращения

$v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_{dr}$, где v_{dr} – магнитный (поперечный) дрейф частицы. Значения фазы $\bar{\varphi}_0$ и угла $\bar{\alpha}_0$, с которыми частица приходит на экватор, зависят только от параметра χ и аппроксимируются функциями

$$\bar{\alpha}_0 \simeq 2, 1 \chi_i^{0,26} - 1, 19, \quad \bar{\varphi}_0 \simeq 1, 95 \chi_i^{0,3} + 0, 38, \quad 0, 24 \leq \chi_i \leq 1, 36, \quad (1)$$

где $\chi_i = \chi(R_{ei})$, $R_{ei} = R_i \cos^{-2} \lambda_i$, R_i – расстояние от диполя до точки инжекции, R_{ei} – расстояние от диполя до точки пересечения заданной силовой линии с экваториальной плоскостью, λ_i – угловое расстояние от экватора до точки инжекции (широта точки инжекции), углы $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\varphi}_0$ даны в радианах. Величина экваториального радиус-вектора частицы R_e связана с $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\varphi}_0$ через точный интеграл движения (обобщенный импульс), который в данном случае дает

$$R_e = \frac{2\gamma R_{ei}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sin \bar{\alpha}_0 \sin \bar{\varphi}_0}}, \quad 2\gamma = \left(\frac{3}{\chi_i}\right)^{1/2}. \quad (2)$$

Отличие ЦТ от силовой линии максимально на экваторе, и оно, естественно, уменьшается с падением χ_i в соответствии с (2) ($R_e \rightarrow R_{ei}$ при $\chi_i \rightarrow 0$).

В дальнейшем (после экватора) двигавшаяся по ЦТ частица закручивается и отражается в зависимости от χ_i при $R > 0$. Но если фазу этой частицы, пришедшей на экватор, прокрутить до величины $\pi - \bar{\varphi}_0$, оставляя угол $\bar{\alpha}_0$ неизменным, то она пойдет по ЦТ и с другой стороны экватора. Полученная таким образом система отсчета состоит из до экваториальной и после экваториальной ЦТ, которые на экваторе характеризуются величинами $\bar{\varphi}_{01}$, $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\varphi}_{02}$, $\bar{\alpha}_0$. При этом независимо от χ величина $\bar{\varphi}_{01} + \bar{\varphi}_{02} = \pi$, при $\chi < 0, 13$ значение $\bar{\varphi}_{01} \simeq \bar{\varphi}_{02} \simeq \pi/2$. Угловое расстояние между точками $\bar{\varphi}_{01}$, $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\varphi}_{02}$, $\bar{\alpha}_0$ равно $\nu = 2 \arcsin(\sin \bar{\alpha}_0 \sin \delta)$, где $\delta = \pi/2 - \bar{\varphi}_{01} = \bar{\varphi}_{02} - \pi/2$.

Теперь наряду с μ введем $\mu^* \sim \sin^2 \alpha^* / B$, где α^* – угол между вектором скорости и касательной к ЦТ. На рисунке показан характер изменения μ и μ^* на траектории частицы (отличной от ЦТ), найденный численным интегрированием уравнений движения между двумя точками отражения. Видно, что μ сильно меняется, а величина μ^* практически постоянна слева и справа от экватора. И только при $\lambda = 0$ происходит в соответствии с выше сказанным скачок по μ^* и соответственно по α^* . При этом величина скачка $\Delta \mu^* = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \Delta \mu = (\Delta \mu / \mu) \mu$ совпадает с точностью $\sim 10\%$ с теоретической оценкой $\Delta \mu$, полученной в ². Здесь μ_m – значение μ в точке отражения. Для скачка по α^* имеем

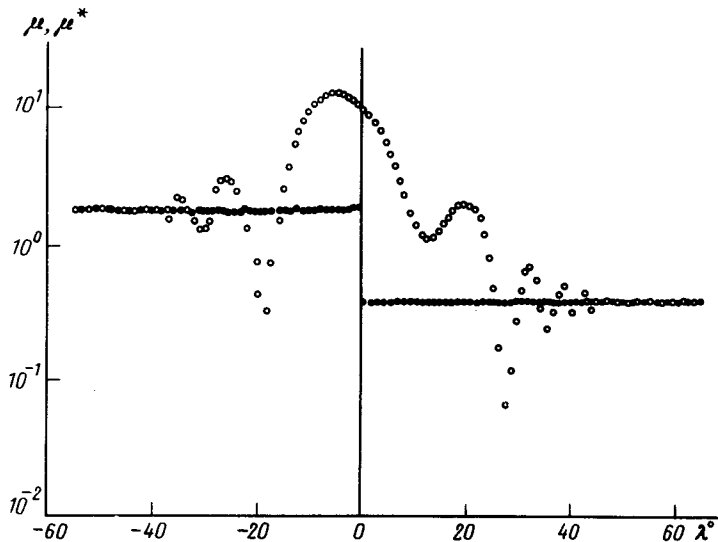
$$\Delta \alpha^* \simeq \nu \cos \varphi \simeq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(\frac{\Delta \mu}{\mu}\right). \quad (3)$$

В новой системе координат ось Oz' совпадает с касательной к соответствующей ЦТ и на экваторе определяется параметрами $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\varphi}_0$. Переход от обычной системы координат, в которой ось Oz направлена по касательной к B (на экваторе $z \perp R_e$), к новой получается путем поворота исходной системы вокруг оси Oz в сторону дрейфа на угол $\bar{\varphi}_0$ и последующим совмещением оси Oz с Oz' (поворот на угол $\bar{\alpha}_0$). Связь между системами можно записать в виде

$$\cos \alpha = \cos \alpha^* \cos \bar{\alpha}_0 - \sin \alpha^* \sin \alpha_0 \cos \phi, \quad (4)$$

$$\sin(\varphi - \bar{\varphi}_0) = \sin \alpha^* \sin \phi / \sin \alpha, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

При каждом пересечении экватора угловые координаты частицы в новой системе будут изменяться согласно следующим рекуррентным соотношениям:



Зависимость $\mu \sim \sin^2 \alpha / B$ (белые кружки) и $\mu^* \sim \sin^2 \alpha^* / B$ (черные кружки) от широты λ при движении частицы с энергией $W = 200$ МэВ между точками отражения в геомагнитной дипольной ловушке. На экваторе ($\lambda = 0$): R_{ci} (в радиусах Земли) = 2,9 ($\chi_i = 0,272$); $\alpha = 20^\circ$; $\phi = 108^\circ$

$$\alpha_n^*, \phi_n \rightarrow \alpha_{n+1}^*, \phi_{n+1}, \quad (5)$$

где $\alpha_{n+1}^* = \alpha_n^* + \Delta \alpha_n^* \cos \phi_n$, $\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta \phi(\alpha_{n+1}^*)$. Изменение фазы (набег фазы) между двумя последовательными пересечениями экваториальной плоскости приближенно описывается выражением ³

$$\Delta \phi = \frac{\pi \bar{\omega}}{\Omega} = \frac{6F(\alpha)}{\chi}, \quad F(\alpha) \approx \sin^{-1,348} \alpha - 0,255, \quad 1,25^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad (6)$$

где $\bar{\omega}$ – ларморовская частота, усредненная по продольному колебанию, Ω – частота продольных осцилляций. Окончательно с учетом (3)–(6) приходим к отображению

$$\cos \alpha_{n+1}^* = \cos \alpha_n^* \cos \nu + \sin \alpha_n^* \sin \nu \cos(\phi_n - \bar{\phi}_0), \quad (7)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{6F(\alpha_{n+1}^*)}{\chi_i},$$

где $\bar{\phi}_0 = \arcsin(\sin \bar{\alpha}_0 \sin 2\delta / \sin \nu)$. По аналогии с ¹ рекуррентному соотношению (5) можно придать вид стандартного отображения Чирикова

$$I_{n+1}^* = I_n^* + K^* \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}^*, \quad (8)$$

где $I^* = \frac{6}{\chi} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} \right)_{\alpha_r^*} \cdot (\alpha^* - \alpha_r^*)$, $K^* = \frac{6\nu}{\chi} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} \right)_{\alpha_r^*}$, $\theta = \phi - \bar{\phi}_0 - \pi/2$, α_r^* находится из условия резонанса $\bar{\omega} = 2r\Omega$ (r – любое целое число). В итоге получается, что рассматриваемая модель движения включает в себя "адиабатическое" движение ($\mu^* = \text{const}$) между экватором и точкой отражения и дискретную модель (7) (или 8) для многократных продольных колебаний частицы. Данная

модель эффективно работает при $\chi < 1$ и $\alpha^* < 45^\circ$, что соответствует области стохастической неустойчивости³. При $\chi \rightarrow 0$ модель с ЦТ переходит в адиабатическую модель с соответствующей силовой линией ($\alpha \rightarrow \alpha^*$, $\Delta\alpha^* \rightarrow 0$, $\alpha_{n+1}^* \rightarrow \alpha_n^*$, α_0 и $\delta \rightarrow 0$).

В качестве иллюстрации эффективности этой модели оценим коэффициент захвата c_3 и время удержания протонов τ_n в геомагнитном дипольном поле, инжектируемых из так называемого конуса поглощения (или конуса потерь⁴). Эта задача решалась в⁵ с помощью численного интегрирования уравнений движения. Ограничимся случаем наиболее статистически обеспеченным, когда было проанализировано 744 траектории протонов с энергией $W = 4,3$ ГэВ, инжектированных с поверхности Земли с $R_{ei} = 1,5R_3$ ($\chi_i \simeq 0,584$), где R_3 – радиус Земли. Начальные условия α_0 , φ_0 разыгрывались методом Монте-Карло. В наших переменных экваториальный конус потерь (он же является областью, из которой инжектируется весь ансамбль частиц) определяется, как и в адиабатической теории, интервалом

$$0 \leq \sin \alpha^* \leq \sin \alpha_c^* = [(4R_{ei}/R_3 - 3)(R_{ei}/R_3)^5]^{-1/4}.$$

Частица считается выскочившей из конуса потерь, если после первой итерации (см. (7)) ее угол $\alpha_1^* > \alpha_c^*$. В дальнейшем частица может поглотиться, если окажется, что $\alpha_n^* \leq \alpha_c^*$. В обоих случаях вычислялись $c_3 = N_1/N_0$, где N_0 – число инжектированных частиц, N_1 – их число после первой итерации (в работе⁵ – частицы, имеющие хотя бы одну точку отражения выше поверхности Земли) и τ_n , соответствующее $N_1/N = e$. Результат оказался следующим: $c_3 = 0,77(0,74)$ и $\tau_n = 5(5)$, где τ_n выражено в числе отражений, в скобках приведены наши расчеты с помощью (7).

В заключение отметим, что найденная модель движения в принципе может быть использована для магнитных ловушек различных конфигураций.

-
1. Б.В.Чириков, Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат 13, 3 (1984).
 2. В.Д.Ильин, А.Н.Ильина, ЖЭТФ 75, 518 (1978).
 3. В.Д.Ильин, А.Н.Ильина, Физика плазмы 8, 148 (1982).
 4. Х.Редерер, Динамика радиации, захваченной геомагнитным полем. М.: Мир, 1972.
 5. Е.В.Горчаков, В.И.Северинов, Геомагнетизм и аэронавтика 16, 706 (1976).
 6. И.В.Амирханов, А.Н.Ильина, В.Д.Ильин, Б.Ю.Юшков, Космические исследования 29, 282 (1991).