Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 12, с. 911 – 916 © 2024 г. 25 декабря

Метод измерения отклонения от закона Ламберта при диффузном рассеянии ультрахолодных нейтронов на материальных стенках

П. Д. Григорьев[+*×1)], *В. Д. Кочев*[*+∘], *В. А. Цыплухин*[*], *А. М. Дюгаев*[+], *И. Я. Полищук*[∘∇]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Национальный исследовательский технологический университет "МИСИС", 119049 Москва, Россия*

[×]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

[∘]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[∇]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2024г.
После переработки 5 ноября 2024 г.
Принята к публикации 7 ноября 2024 г.

Моделирование движения ультрахолодных нейтронов важно для оценки их потерь, точного измерения их времени жизни и для описания других экспериментов. В материальных ловушках необходимо учитывать не только зеркальное, но и диффузное упругое отражение ультрахолодных нейтронов от стенок ловушки. Обычно для описания такого диффузного рассеяния применяют косинусоидальный закон Ламберта для углового распределения рассеявшихся нейтронов, который не имеет строгого теоретического вывода и часто нарушается. В нашей работе предложен эксперимент, позволяющий измерить величину отклонения углового распределения ультрахолодных нейтронов при диффузном рассеянии от закона Ламберта. Это отклонение можно определить по разнице числа нейтронов, вылетающих через центральное и торцевое окно длинной узкой ловушки ультрахолодных нейтронов. Проведены Монте-Карло расчеты, соответствующие возможному эксперименту и показывающие значительную величину эффекта для разных форм ловушки.

DOI: 10.31857/S0370274X24120133, EDN: GHEYPQ

1. Введение. Точные измерения времени жизни нейтронов $\tau_n \approx 15$ мин важны для определения констант слабого взаимодействия в нуклонах, а также для различных аспектов астрофизики и космологии [1–4]. Наиболее точными измерениями времени жизни нейтронов считаются эксперименты с ультрахолодными нейтронами (УХН) в материальных [5, 6] или магнитных [7, 8] ловушках. Точность этих измерений определяется, в основном, погрешностью оценки потерь УХН, поскольку измеряемое время жизни нейтрона в ловушке τ даже в самых точных экспериментах на ~ 20 с меньше получаемого τ_n после учета этих потерь. Расхождения в оценках τ_n этими двумя методами сильно превышает их оцениваемые погрешности [6, 7], не говоря уже об известной загадке еще более сильного расхождения с экспериментами на пучках холодных нейтронов [9–11]. Эта загадка, предположительно, связана с систематическими погрешностями в τ_n-экспериментах с нейтронными пучками [12]. Неучтенные потери УХН в материальных и магнитных ловушках, а также погрешности оценок их скорости потерь, тоже вероятны [13, 14].

Возможным качественным способом снижения скорости поглощения УХН является покрытие стенок ловушки жидким ^{4}He, единственным материалом, не поглощающим нейтроны [15–21]. Однако покрытие стенок ловушки УХН жидким гелием имеет ряд недостатков [19–21]: (i) малый потенциальный барьер V_0 для нейтронов, что уменьшает их концентрацию, (ii) низкая температура $T < 0.5$ К, необходимая для выключения рассеяния УХН на паре гелия, и (iii) заметное рассеяние УХН риплонами даже при таких низких температурах. Поэтому ниже мы рассмотрим более традиционные и в настоящее время используемые ловушки УХН, где материал стенки поглощает нейтроны.

Для повышения точности оценок интенсивности потерь УХН применяют моделирование методом Монте-Карло, где траектория каждого нейтрона рассчитывается с учетом силы тяжести, как в материальных [6, 22–27] так и в магнитных [7, 3] ловушках. Такие расчеты могут снять имеющиеся вопросы [14]

1) e-mail: grigorev@itp.ac.ru

о погрешности используемых приближенных методов расчета потерь УХН в материальных ловушках.

Монте-Карло расчеты также используют ряд физических приближений о взаимодействии нейтронов с материальной стенкой. Вероятность поглощения нейтрона стенкой $\mu(v_\perp)$ зависит от угла падения и дается известной формулой [28–30]

$$\mu(v_\perp) = \frac{2\eta\, v_\perp/v_{\rm lim}}{\sqrt{1-(v_\perp/v_{\rm lim})^2}}, \tag{1}$$

где $\eta \sim 10^{-5}$ – коэффициент потерь, зависящий от материала стенки, $v_\perp$ – компонента скорости нейтрона, нормальная к поверхности стенки, а предельная скорость $v_{\rm lim} = \sqrt{2V_0/m_n}$ нейтронов с массой $m_{\rm n}$ определяется высотой V_0 "оптического" потенциала стенки, который создает потенциальный барьер V_0 и удерживает УХН в ловушке. Формула (1) не учитывает микроскопическую структуру и шероховатость стенки. Обычно предполагают, что они не меняют зависимости от скорости нейтронов и заложены феноменологически в коэффициенте потерь η и оптическом потенциале стенки V_0, так что формула (1) приближенно работает даже для шероховатых стенок. К сожалению, лучшего приближения для расчета поглощения УХН стенкой ловушек пока нет.предложено.

С подавляющей вероятностью УХН упруго отражается от стенки, зеркально или диффузно. Вероятность диффузного рассеяния обычно полагается равной $p_d \sim 0.1$. При его моделировании методом Монте-Карло, как правило, применяется косинусоидальный закон Ламберта для угловой зависимости интенсивности диффузного рассеяния УХН [22–27]:

$$I(\theta) = I_0 \cos\theta, \tag{2}$$

где θ – угол между направлением скорости рассеянного нейтрона и нормалью к поверхности стенки. Даже в оптике закон Ламберта не является универсальным, и существует множество отклонений от него [31–33]. Для диффузного рассеяния нейтронов вообще не существует строгого вывода закона Ламберта. Мелкие дефекты в стенках ловушки, имеющие характерный размер, меньший, чем длина волны УХН $\lambda \sim 100$ нм, дают равномерное угловое распределение вероятности диффузного рассеяния УХН, а не закон Ламберта. Подобными дефектами являются в том числе шероховатости поверхности, нанопоры, примеси и т.д. Даже ультрагладкие поверхности, получаемые после их многократной обработки, на субмикронном масштабе $\lesssim 100$ нм всегда имеют шероховатости, хорошо видимые с помощью атомно-силового и/или сканирующего электронного микроскопа. Например, ультрагладкая поверхность никеля или бериллия, предназначенная для ультрафиолетовых зеркал космических спутников, имеет заметные шероховатости размером $\lesssim 100$ нм, видимые на атомно-силовом микроскопе [34]. Бериллий ранее активно использовался для ловушек УХН [28, 30]. Современные материальные ловушки УХН используют покрытие перфторполиэфиром – маслом марки Fomblin, не содержащим водород [5, 6], поверхность которого на субмикронном масштабе $\lesssim 100$ нм также имеет сильные шероховатости [35–37]. Крупные шероховатости стенок или поры размером $d \gg \lambda$ в материальной ловушке, которые рассеивают с малой передачей волнового вектора $\sim 1/d$, размывают пик зеркального отражения в угловом распределении скорости УХН после диффузного рассеяния и тоже не дают закон Ламберта. Основным аргументом в пользу закона Ламберта является принцип детального баланса распределения скоростей УХН, который требует, чтобы вероятность рассеяния от стен была пропорциональна $\cos\theta$, поскольку частота столкновений также $\propto \cos\theta$ (см. с. 96 книги [28]). При пренебрежении гравитацией закон Ламберта действительно поддерживает изотропное распределение скоростей и даже делает анизотропный газ более изотропным, меняя угловое распределение скоростей нейтронов к их изотропному распределению.

Закон Ламберта обеспечивает изотропное распределение скоростей только в том случае, если сила тяжести пренебрежимо мала. Это условие корректно, например, для небольших ловушек, закрытых сверху. Для больших ловушек, особенно с открытым верхом, наши расчеты показывают сильное отклонение от изотропного и однородного распределения нейтронов по скоростям даже при ламбертовском диффузном рассеянии УХН от материальных стенок. В используемых при измерениях времени жизни нейтрона больших материальных ловушках УХН с открытым верхом [5, 6] изотропия скоростей частично обеспечивается зеркальными отражениями от изогнутых стенок с различной ориентацией поверхности из-за искривленной сложной формы ловушки. Следовательно, диффузное рассеяние и закон Ламберта не требуется для обеспечения угловой изотропии скоростей УХН в таких ловушках, и измерение углового распределения скоростей УХН в них не дало бы информации об отклонениях от закона Ламберта. Теоретический расчет углового распределения скоростей УХН после диффузного рассеяния на реалистичной стенке ловушки представляет собой сложную задачу. Однако совсем оставлять ее без решения неправильно, поскольку оценка вероятности поглощения УХН стенкой ловушки и соответствующее ограничение на точность измерения времени β-распада нейтрона τ_n зависят от этого распределения из-за зависимости скорости поглощения от угла падения УХН в ур. (1).

Наши расчеты Монте-Карло показывают, что скорость поглощения УХН стенками материальной ловушки простой формы в виде прямоугольного параллелепипеда или прямого цилиндра зависит от закона диффузного отражения из-за его (даже слабого) влияния на угловое распределение нейтронов по скоростям и по высоте. Вероятно, для реальных ловушек сложной геометрии эта зависимость не так существенна, поскольку изотропия распределения УХН по скоростям обеспечивается зеркальными отражениями УХН от стенок, направленных под разными углами. Вопрос о влиянии закона диффузного отражения на точность расчетов Монте-Карло скорости поглощения нейтронов стенками материальной ловушки сложной формы остается открытым и требует проверки для каждой конкретной формы ловушки. Однако прежде нужно ответить на более фундаментальный вопрос о том, насколько сильно отклонение от косинусоидального закона Ламберта, т.е. какой закон диффузного отражения нейтронов от материальных стенок реализуется в природе для разного типа материалов.

В данной работе мы предлагаем простой способ экспериментально проверить выполнение косинусоидального закона Ламберта для диффузного рассеяния УХН на стенках ловушек и количественно оценить отклонение от этого закона.

2. Описание и качественное обоснование предложенного эксперимента. Схема предлагаемого эксперимента по измерению отклонения от закона Ламберта для нейтронов изображена на рис. 1. УХН помещаются в вытянутую материальную ловушку размером $L_x \times L_y \times L_z$, где $L_x \gg L_y, L_z$. Ловушка может быть и цилиндрической формы в виде трубки, по которой нейтроны обычно переносятся от источника к экспериментальной установке. Однако проведенные ниже расчеты Монте-Карло, количественно описывающие предлагаемый эффект, выполнены для прямоугольной ловушки. В отличие от современных экспериментов по измерению времени жизни нейтронов [5, 6], размеры ловушки УХН лучше брать не слишком большими, много меньше максимальной высоты нейтронов $h_{\max} = V_0/m_n g$ в поле тяжести, и без открытого верха. В ловушке сделаны два малые отверстия равной площади, переднее и торцевое (см. рис. 1). За отверстиями стоят детекторы, регистрирующие число вылетевших через них нейтронов, или трубки, ведущие к таким детекторам. Для измерения отклонения от закона Ламберта нужно только отношение числа вылетевших нейтронов через разные отверстия, а не абсолютные значения числа вылетевших нейтронов. Это облегчает эксперимент и повышает его точность.

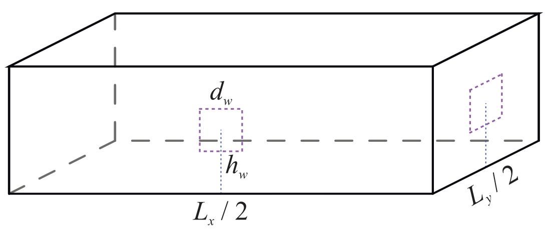

Рис. 1. (Цветной онлайн) Вытянутая материальная ловушка для УХН размером $L_x \times L_y \times L_z$. Отмечены квадратные отверстия (переднее и торцевое) размера d_w, расположенные на высоте h_w, через которые нейтроны вылетают из ловушки

Если выполняется закон Ламберта диффузного рассеяния нейтронов в ловушке, то для $L_z \ll h_{\max}$, когда можно пренебречь гравитацией, распределение скоростей нейтронов будет изотропным и однородным (см. с. 96 книги [28]), т.е. не зависящим от координаты. Следовательно, число нейтронов, вылетевших через торцевое и переднее отверстие, будет одинаковым. Если закон Ламберта нарушается, то распределение нейтронов по скоростям уже не будет изотропным и однородным, а числа нейтронов вылетевших через разные отверстия, будут различаться.

Рассмотрим вариант, когда вместо закона Ламберта (2) диффузное рассеяние изотропно и не зависит от угла вылета нейтрона: $I(\theta) = \text{const}$. Такое изотропное рассеяние возникает, если размер рассеивающего центра много меньше длины волны налетающей частицы [38], которая для УХН достаточно велика, $\gtrsim 100$ нм. Тогда, поскольку число налетающих на стенку нейтронов пропорционально косинусу угла падения, $n_{\rm in} \propto \cos\theta_{in}$, а число вылетающих нейтронов при изотропном диффузном рассеянии не зависит от направления их скорости, то при таком диффузном рассеянии появляется больше нейтронов, летящих вдоль стенки ловушки. Из-за вытянутой геометрии ловушки нейтроны отражаются намного чаще от ее длинных стенок, т.е. от передней, задней, верхней или нижней, чем от торцевых стенок. Следовательно, при изотропном диффузном рассеянии число нейтронов, летящих вдоль вытянутой ловушки, увеличивается, а поперек – уменьшается. Это приводит к увеличению числа нейтронов N_e, вылетающих через торцевое отверстие, и уменьшению числа нейтронов N_f, прошедших через переднее центральное отверстие. Отношение N_e/N_f мы предлагаем определить экспериментально. Если это измеренное отношение $N_e/N_f > 1$, значит закон Ламберта нарушается в сторону изотропного диффузного рассеяния. Если $N_e/N_f < 1$, значит закон Ламберта нарушается в обратную сторону диффузного рассеяния больше вдоль нормали к поверхности. Для количественной оценки предлагаемого эффекта различия числа вылетающих нейтронов через разные отверстия ловушки УХН в зависимости от закона их диффузного рассеяния и от геометрии ловушки мы провели расчеты Монте- Карло, описанные ниже.

3. Монте-Карло расчет. Материальная ловушка УХН, моделируемая в наших расчетах, представляет из себя длинный прямоугольный ящик с размерами $L_y = L_z = 1$ см, при этом его длина L_x варьируется вплоть до 10 м (см. рис. 1). В ящике на высоте $h_w = 0.5$ см проделаны квадратные отверстия размером $d_w = 1$ мм. Были взяты следующие параметры, близкие к реальным экспериментам [5, 6] и другим расчетам [23, 25]: коэффициент потерь $\eta = 10^{-5}$, $v_{\lim} = 4.85$ м/с, вероятность диффузного рассеяния $p_d = 0.1$. В начале Монте-Карло симуляции нейтрон находится на случайном месте на дне ловушки. Его скорость не превышает $v_{\max} = 0.9\, v_{\lim}$ и имеет случайное начальное направление. Нейтрон двигается в ловушке, согласно уравнениям движения в поле силы тяжести, пока не столкнется с потолком/стенкой/дном ловушки. Попадания нейтрона в малые отверстия (см. рис. 1) подсчитываются. Нейтрон может поглотиться стенкой с вероятностью $\mu(v_\perp)$, дающейся выражением (1). С вероятностью $1 - p_d$ нейтрон отражается зеркально, а иначе рассеивается диффузно, в этом случае он может с вероятностью p_L отразиться по закону Ламберта, либо с вероятностью $1 - p_{\mathrm{L}}$ рассеяться с изотропным угловым распределением[2)].

Вычислив отношение числа нейтронов N_e, подсчитанных в торцевом отверстии, к числу нейтронов N_f, подсчитанных в переднем отверстии, для большого числа нейтронов ($N \gtrsim 10^4$) при различных L_x и p_{L}, мы получили результат, изображенный на рис. 2. Он подтверждает наши качественные аргументы, что вероятности вылета нейтронов через торцевое и переднее отверстия равны только для ламбертовского закона диффузного рассеяния, т.е. только при $p_{\mathrm{L}} = 1$. Даже для малого отклонения от закона Ламберта разница между N_e и N_f заметна и измерима. Эта разница составляет десятки процентов и растет линейно с ростом этого отклонения, описываемого параметром $1 - p_{\mathrm{L}}$. Отношение N_e/N_f тем больше, чем более вытянута ловушка УХН, но эффект сильный, даже если отношение линейных размеров ловушки $L_x/L_y = 5$. Дальнейшее увеличение длины ловушки при ее заданной ширине и высоте влияет не так сильно. Например, для $L_x/L_y = 1000$ разница $N_e - N_f$ всего в два раза больше, чем для $L_x/L_y = 5$.

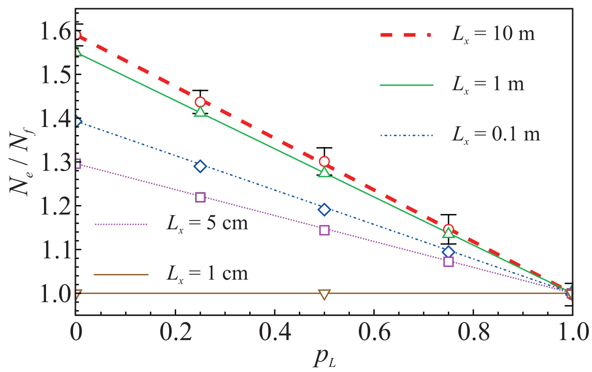

Рис. 2. (Цветной онлайн) Отношение количества нейтронов, прошедших через торцевое отверстие N_e к количеству нейтронов, прошедших через переднее отверстие N_f как функция вероятности ламбертовского рассеяния p_{L}, для ловушек различной длины L_x. Для $L_x = 10$ м показано стандартное отклонение при усреднении по 10 симуляциям из 10^4 нейтронов

Чтобы убедиться, что полученный результат слабо зависит от размера ловушки, если высота ловушки остается меньше максимальной высоты нейтронов $h_{\max} = v_{\max}^2/2g \sim 1$ м, определяемой их энергией и гравитацией, мы также провели расчеты для больших размеров ловушки $L_y = L_z = 10$ см. Результаты, изображенные на рис. 3, показывают лишь незначительное ослабление эффекта и что отношение N_e/N_f по-прежнему линейно растет с ростом отклонения $1 - p_{\mathrm{L}}$ от закона Ламберта и геометрически определяется отношением L_x/L_y, а не размером ловушки.

4. Обсуждение. Выше мы предложили метод исследования углового распределения диффузного отражения УХН от материальных стенок. Количественные оценки предлагаемого эффекта различия числа вылетающих нейтронов через разные отверстия ловушки УХН в зависимости от закона их диффузного рассеяния и от геометрии ловушки, полученные нами из расчетов методом Монте-Карло, показывают значительную и легко измеряемую величину эффекта, составляющую десятки процентов. Ес-

[2)]Полная вероятность ламбертовского рассеяния при условии, что нейтрон не поглотился, очевидно, равна $p_d p_L$, а изотропного – $p_d(1 - p_L)$.

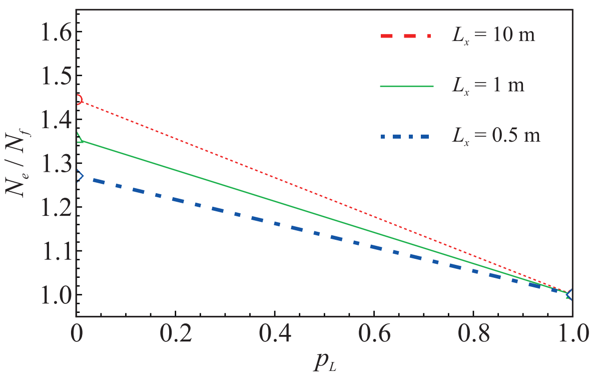

Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что рис. 2, для $L_y = L_z = 10$ см

ли измеренная разница числа нейтронов, вылетающих через разные отверстия длинной ловушки, оказывается мала, то такой эксперимент также является важным физическим результатом, поскольку подтверждает закон Ламберта диффузного рассеяния УХН.

Предлагаемый нами эксперимент не требует большой концентрации нейтронов, как в измерениях их времени жизни [5–8], поскольку нет необходимости долго держать нейтроны в ловушке и определять показатель экспоненты временной зависимости их концентрации. Нужно только найти отношение количества нейтронов, вылетающих через торцевое и боковые отверстия равной площади. Чтобы убрать возможные погрешности, связанные с разными размерами отверстий и расположением детекторов, результаты измерений можно сначала откалибровать на кубической ловушке с $L_x = L_y = L_z$, например, поставив заслонки. Тогда число нейтронов, вылетающих из разных отверстий, должно быть одинаковым, не зависимо от закона диффузного рассеяния (см. сплошную коричневую линию на рис. 2).

Как мы показали на рис. 2 и 3, предлагаемый эффект слабо зависит о размеров и формы ловушки при условии, что (1) длина ловушки значительно больше ее поперечных размеров и (2) вдоль направления x стенки ловушки остаются прямыми. Однако величина предлагаемого эффекта может оказаться меньше наших теоретических расчетов, если внутренние поверхности ловушки имеют очень много крупномасштабных шероховатостей размером $\gtrsim 1$ мкм, которые из-за многократного зеркального отражения перемешивают разные компоненты скорости нейтронов. Поэтому для успешного эксперимента желательно сделать стенки ловушки максимально прямыми вдоль ее длины.

Предлагаемое измерение отклонения от закона Ламберта при диффузном рассеянии УХН от материальных стенок может оказаться существенным для повышения точности оценки потерь УХН в материальных ловушках и, следовательно, для точных измерений скорости β-распада или времени жизни нейтрона τ_n. Основная альтернатива измерениям τ_n в материальных ловушках – это магнитные ловушки с открытым верхом, которые сейчас уже имеют номинально более высокую точность [7]. Тем не менее, в магнитных ловушках также имеется ряд сложностей [3, 8, 13], например, точная оценка скорости деполяризации (переворота спина) в неоднородном магнитном поле и соответствующих потерь УХН. Возможно, реальная систематическая погрешность измерений τ_n в магнитных ловушках выше, чем ~ 0.2 с, оцененные в работе [7].

Исследование диффузного рассеяния УХН от материальных стенок интересно само по себе, поскольку нет строгих оснований выполнения закона Ламберта для нейтронов, и измерение отклонений от него позволит глубже понять микроскопические процессы при взаимодействии нейтронов с материальной стенкой. Этот фундаментальный вопрос до сих пор очень мало изучался, и мы предлагаем достаточно простой и полезный эксперимент для такого исследования.

Финансирование работы. Работа поддержана грантом Российского научного фонда # 23-22-00312, https://rscf.ru/project/23-22-00312/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. D. Dubbers and M. G. Schmidt, Rev. Mod. Phys. **83**, 1111 (2011); https://link.aps.org/doi/10; 1103/RevModPhys.83.1111.
2. H. Abele, Progress in Particle and Nuclear Physics **60**, 1 (2008); https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641007000622.
3. M. Gonzalez-Alonso, O. Naviliat-Cuncic, and N. Severijns, Progress in Particle and Nuclear Physics **104**, 165 (2019); https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641018300735.
4. M. Gorchtein and C.-Y. Seng, Universe **9**, 422 (2023).
5. A. P. Serebrov, V. E. Varlamov, A. G. Kharitonov, A. K. Fomin, Y. N. Pokotilovski, P. Geltenbort, I. A. Krasnoschekova, M. S. Lasakov, R. R. Taldaev, A. V. Vassiljev, and O. M. Zherebtsov, Phys. Rev. C **78**, 035505 (2008); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.78.035505.
6. A. P. Serebrov, E. A. Kolomensky, A. K. Fomin et al. (Collaboration), Phys. Rev. C **97**, 055503 (2018); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.97.055503.
7. F. M. Gonzalez, E. M. Fries, C. Cude-Woods et al. (UCNτ Collaboration), Phys. Rev. Lett. **127**, 162501 (2021).

8. V.F. Ezhov, A.Z. Andreev, G. Ban, B.A. Bazarov, P. Geltenbort, A.G. Glushkov, V.A. Knyazkov, N.A. Kovrizhnykh, G.B. Krygin, O. Naviliat-Cuncic, and V.L. Ryabov, JETP Lett. **107**, 671 (2018) [Pis'ma v ZhETF **107**, 707 (2018)].
9. J.S. Nico, M.S. Dewey, D.M. Gilliam, F.E. Wietfeldt, X. Fei, W.M. Snow, G.L. Greene, J. Pauwels, R. Eykens, A. Lamberty, J.V. Gestel, and R.D. Scott, Phys. Rev. C **71**, 055502 (2005); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.71.055502.
10. A.T. Yue, M.S. Dewey, D.M. Gilliam, G.L. Greene, A.B. Laptev, J.S. Nico, W.M. Snow, and F.E. Wietfeldt, Phys. Rev. Lett. **111**, 222501 (2013); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.222501.
11. K. Hirota, G. Ichikawa, S. Ieki et al. (Collaboration), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 123C02 (2020); 10.1093/ptep/ptaa169 https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa169; https://academic.oup.com/ptep/articlepdf/2020/12/123C02/35931162/ptaa169.pdf.
12. A.P. Serebrov, M.E. Chaikovskii, G.N. Klyushnikov, O.M. Zherebtsov, and A.V. Chechkin, Phys. Rev. D **103**, 074010 (2021); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.074010.
13. V.F. Ezhov and V.L. Ryabov, JETP Lett. **117**, 91 (2023) [Pis'ma v ZhETF **117**, 93 (2023)].
14. P.D. Grigoriev, V.D. Kochev, V.A. Tsyplukhin, A.M. Dyugaev, and I.Y. Polishchuk, arXiv:2407.03207 [physics.ins-det].
15. R. Golub, C. Jewell, P. Ageron, W. Mampe, B. Heckel, and I. Kilvington, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **51**, 187 (1983).
16. R.C. Bokun, Sov. J. Nucl. Phys. **40**, 287 (1984); https://inis.iaea.org/search/searchsinglerecord.aspx?recordsFor=SingleRecord&RN=16073419.
17. V.P. Alfimenkov, V.K. Ignatovich, L.P. Mezhov-Deglin, V.I. Morozov, A.V. Strelkov, and T.M.I., Communications of Joint Institute for Nuclear Research, Dubna preprint (in Russian) **P3-2009-197** (2009); http://www1.jinr.ru/Preprints/2009/197(P3-2009-197).pdf.
18. P.D. Grigoriev, O. Zimmer, A.D. Grigoriev, and T. Ziman, Phys. Rev. C **94**, 025504 (2016); https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.025504.
19. P.D. Grigoriev and A.M. Dyugaev, Phys. Rev. C **104**, 055501 (2021).
20. P.D. Grigoriev, A.M. Dyugaev, T.I. Mogilyuk, and A.D. Grigoriev, JETP Lett. **114**, 493 (2021).
21. P.D. Grigoriev, A.V. Sadovnikov, V.D. Kochev, and A.M. Dyugaev, Phys. Rev. C **108**, 025501 (2023).
22. A. K. Fomin and A. P. Serebrov, Technical Physics **68**, S424 (2023).
23. A.K. Fomin and A.P. Serebrov, EPJ Web Conf. **219**, 03001 (2019).
24. N.J. Ayres, E. Chanel, B. Clement, P.G. Harris, R. Picker, G. Pignol, W. Schreyer, and G. Zsigmond, *Monte carlo simulations for the optimization and data analysis of experiments with ultracold neutrons*, in *Proceedings of the International Conference on Neutron Optics (NOP2017)* **22**, 011032 (2018).
25. A.K. Fomin and A.P. Serebrov, Mathematical Models and Computer Simulations **10**, 741 (2018).
26. A.K. Fomin and A.P. Serebrov, Technical Physics **62**, 1903 (2017).
27. A.P. Serebrov, A.K. Fomin, A.G. Kharitonov, V.E. Varlamov, and A.V. Chechkin, Technical Physics **58**, 1681 (2013).
28. V.K. Ignatovich, *The Physics of Ultracold Neutrons*, Clarendon Press, Oxford (1990).
29. R. Golub, D. Richardson, and S.K. Lamoreaux, *Ultra-Cold Neutrons*, CRC Press, N.Y. (1991); https://doi.org/10.1201/9780203734803.
30. V.K. Ignatovich, Phys.-Uspekhi **39**, 283 (1996); https://doi.org/10.1070/pu1996v039n03abeh000138.
31. T.G. Mayerhöfer, S. Pahlow, and J. Popp, ChemPhysChem **21**, 2029 (2020).
32. H.G. Hecht, J. Res. Natl. Bur. Stand. A Phys. Chem. **80A**, 567 (1976).
33. M. Mamouei, K. Budidha, N. Baishya, M. Qassem, and P.A. Kyriacou, Sci. Rep. **11**, 13734 (2021).
34. N.I. Chkhalo, M.S. Mikhailenko, A.E. Pestov, V.N. Polkovnikov, M.V. Zorina, S.Y. Zuev, D.S. Kazakov, A.V. Milkov, I.L. Strulya, V.A. Filichkina, and A.S. Kozlov, Appl. Opt. **58**, 3652 (2019).
35. J.M. Russell-Tanner, S. Takayama, A. Sugimura, J.M. DeSimone, and E.T. Samulski, J. Chem. Phys. **126**, 244706 (2007); https://pubs.aip.org/aip/jcp/articlepdf/doi/10.1063/1.2743404/15398826/244706_1_online.pdf.
36. V.A. Ganesh, S.S. Dinachali, S. Jayaraman, R. Sridhar, H.K. Raut, A. Góra, A. Baji, A.S. Nair, and S. Ramakrishna, RSC Adv. **4**, 55263 (2014).
37. C. Masciullo, A. Sonato, F. Romanato, and M. Cecchini, Nanomaterials **8**, 609 (2018); 10.3390/nano8080609.
38. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Course of theoretical physics, Elsevier Science, Amsterdam (1991); https://books.google.de/books?id=J9ui6KwC4mMC.