Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 5, с. 375 – 380

“Точные” решения для циркулярно поляризованных солитонов и вихрей в керровской среде

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 16 января 2025 г.
После переработки 24 января 2025 г.
Принята к публикации 24 января 2025 г.

Для векторного уравнения типа ротор-ротор, описывающего монохроматическую световую волну в керровской среде, исследована точная подстановка, приводящая к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для функций от поперечной радиальной координаты. В системе фигурирует целое число m – кратность вихря в продольной компоненте электрического поля. При этом $(m-1)$ – кратность вихря в волне левой круговой поляризации, $(m+1)$ – в волне правой поляризации. С $|m|=1$ численные решения этой системы с подходящими краевыми условиями позволяют получить полную информацию о внутреннем строении сильно нелинейного, циркулярно поляризованного оптического пучка в фокусирующей среде, с учетом продольной компоненты поля и небольшой доли противоположной поляризации. При $m=0$ для дефокусирующей среды имеется решение в виде лево-закрученного вихря в лево-поляризованной волне, которое качественно отличается от правого вихря в левой волне при $m=2$.

DOI: 10.31857/S0370274X25030077, EDN: EWQFAK

Введение. В нелинейной оптике важную роль играет векторное уравнение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}[\varepsilon\mathbf{E} + \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*], \quad (1)$$

которое описывает строго монохроматическую световую волну с частотой ω в прозрачной оптической среде с керровской нелинейностью [1]. Здесь $\mathbf{E}(x,y,z)$ – комплексная амплитуда главной гармоники электрического поля, $\varepsilon(x,y,z)$ – диэлектрическая проницаемость для волн малой амплитуды на заданной частоте, $\alpha(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$ – коэффициенты нелинейности. Для пространственно однородной среды ε, α и β – постоянные параметры (причем в пределе мгновенного нелинейного отклика керровские коэффициенты связаны соотношением $\beta=\alpha/2$). В случае положительных α и β (фокусирующая среда), среди решений уравнения (1) имеются, в частности, так называемые “световые иглы” – оптические пучки шириной порядка длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, где $k_0 = \sqrt{\varepsilon}\omega/c$ [2–6]. Соответственно, в дефокусирующей среде (отрицательные α и β) возможны оптические вихри [7–12], а также доменные стенки между областями с противоположной круговой поляризацией света [13–19]. Все эти объекты представляют большой теоретический и практический интерес.

При относительно небольших амплитудах волны и широких пространственных масштабах уравнение (1) допускает использование приближенных методов исследования. За основу берут систему связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). В главном приближении амплитуды $A_\pm(x,y,z)$ левой и правой круговых поляризаций в выражении

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\big[(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_+ + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_-\big]e^{ik_0 z} \quad (2)$$

полагают медленными функциями, а малой дивергенцией электрического поля и его продольной компонентой $E_\parallel$ пренебрегают. В этих предположениях получается пара НУШ [20],

$$-2ik_0\partial_z A_\pm = \Delta_\perp A_\pm + \frac{\alpha k_0^2}{\varepsilon}\Big[|A_\pm|^2 + g|A_\mp|^2\Big]A_\pm, \quad (3)$$

где параметр перекрестной фазовой модуляции $g = 1 + 2\beta/\alpha$. Затем рассматриваются поправки по малому отношению длины волны к характерной ширине пучка, которые учитывают $\mathrm{div}\,\mathbf{E} \neq 0$ и $E_\parallel \neq 0$ [21–28]. Для большинства практических целей этого оказывается вполне достаточно, поскольку уменьшение ширины сбалансированного пучка до величин порядка длины волны неизбежно подразумевает увеличение амплитуды поля $E \equiv |\mathbf{E}|$ до таких значений, когда в правой части уравнения (1) нелинейные слагаемые оказываются сравнимыми с линейным членом, т.е. $\alpha E^2 \sim \varepsilon$. Но в обычных веществах

1) e-mail: ruban@itp.ac.ru

с $\varepsilon \sim 1$ такое соотношение никогда не выполняется при умеренных интенсивностях света, а в сильных полях уже сама модель (1) становится непригодной, так как включаются неучтенные ею физические процессы [29]. Однако, как показывают теоретические оценки, в искусственно созданных композитных материалах могут достигаться достаточно малые значения ε (а также параметр $\gamma = \beta/\alpha$ может задаваться в широких пределах) [30–32]. В таком случае анализ точных солитонных решений уравнения (1) с большими амплитудами не только интересен с научной точки зрения, но и практически важен. Этой проблеме и посвящена данная работа.

Редукция. Как известно, при изучении нелинейных систем в частных производных всегда желательно найти точные редукции – самосогласованные подстановки, которые сводят задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Например, одна из немногих известных редукций уравнения (1) – осесимметричные решения в виде вихря с азимутальной поляризацией в дефокусирующей среде [33, 34]. Зависимость электрического поля от продольной координаты сводится при этом к множителю $e^{i\kappa z}$, где κ— константа распространения. Такой множитель будет нами далее подразумеваться.

В фокусирующем случае основной интерес представляют пространственные солитоны – локализованные по обоим поперечным направлениям устойчивые нелинейные волновые пакеты. В рамках связанных НУШ такие двумерные объекты, как известно, не существуют, поскольку волновой пакет либо расплывается за счет дифракции, либо коллапсирует за счет нелинейности (см. [35, 36] и ссылки там). Но нетривиальный результат состоит в том, что непараксиальность и наличие продольной компоненты предотвращают коллапс. На масштабе порядка длины волны эти факторы действуют как стабилизирующие нелинейно-дифракционные поправки. Солитоны становятся возможными, причем при произвольном соотношении между левой и правой круговыми поляризациями в световом пучке, включая крайние случаи – линейную и круговую поляризации [3–6, 24–28]. Подчеркнем, что устойчивость достигается при обычной керровской нелинейности и никакая ее модификация типа насыщения и т.п. не требуется.

Надо сказать, что поиск точных редукций малоперспективен, если профиль интенсивности волны заведомо не обладает вращательной симметрией в поперечной плоскости. Совсем другое дело – если радиальная, азимутальная и продольная компоненты электрического поля имеют одинаковую простую зависимость от полярного угла: $\mathbf{e}_r F(r) e^{im\varphi}$, $i\mathbf{e}_\varphi G(r) e^{im\varphi}$ и $-i\mathbf{e}_z B(r) e^{im\varphi}$ соответственно, с некоторым целым числом m. При этом

$$E^2 = |F|^2 + |G|^2 + |B|^2, \tag{4}$$

$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) = (F^2 - G^2 - B^2) e^{2im\varphi}, \tag{5}$$

так что $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*$ также пропорционально $e^{im\varphi}$ в базисе $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$. Такая редукция впервые была предложена, по-видимому, в работе [37] при рассмотрении уравнения (1) с параметром $\beta = 0$. Но авторы работы [37] не реализовали свою идею до конца, допустив качественную ошибку в постановке граничных условий при $r \to 0$. Они потребовали $F \sim r^{|m|}$ и $G \sim r^{|m|}$ при малых r, тогда как правильным требованием является регулярность декартовых компонент

$$E_x = A_+(r) e^{i(m-1)\varphi} + A_-(r) e^{i(m+1)\varphi}, \tag{6}$$

$$E_y = i[A_+(r) e^{i(m-1)\varphi} - A_-(r) e^{i(m+1)\varphi}], \tag{7}$$

$$E_z = -iB(r) e^{im\varphi}, \tag{8}$$

где $A_+ = (F + G)/2$ – амплитуда лево-поляризованной волны, $A_- = (F - G)/2$ – амплитуда право-поляризованной волны. Таким образом, должно быть $(F+G) \sim r^{|m-1|}$, $(F-G) \sim r^{|m+1|}$, $B \sim r^{|m|}$ при малых r.

В данной работе подстановка (6)–(8) исследована с должной аккуратностью. При произвольном m задача сведена к системе четырех нелинейных ОДУ первого порядка для неизвестных функций $\{F, G, G', B\}$, где штрихом обозначена производная по радиальной координате (фактически F', G'' и B' выражаются через указанную четверку функций, так что если обозначить $G' = V$, то $G'' = V'$ и как раз получается четыре уравнения первого порядка). Наиболее интересные решения получаются при $m = 1$ в фокусирующем случае (лево-поляризованный солитон с малой примесью дважды завихренной правой поляризации и с однократно завихренной продольной компонентой), а также в дефокусирующем случае при $m = 0$ (левый вихрь в лево-поляризованной волне) и при $m = 2$ (правый вихрь в лево-поляризованной волне). Такие решения здесь были рассмотрены более подробно, причем потребовалось каждый раз заново находить коэффициенты разложения функций по степеням r вблизи нуля из соответствующей системы алгебраических уравнений. В ходе этой процедуры подтвердилось предположение, что число участвующих в решении свободных параметров оказывается достаточным для того, чтобы обеспечить регулярность всех функций при $r \to 0$ и их правильную асимптотику при $r \to \infty$. Таким образом, нами здесь получена детальная информация о пространственных керровских солитонах и вихрях не только малой, но и конечной амплитуды.

Важно отметить, что подстановка (6)–(8) применима не только непосредственно к уравнению (1), но и к его обобщениям вида

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= N(r, E^2, |\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}|^2)\mathbf{E}\\ &+ \tilde{M}(r, E^2, |(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*,\end{aligned} \tag{9}$$

где N и $\tilde{M}$ – некоторые заданные вещественные функции указанных скалярных аргументов. Заметим попутно, что в случае

$$N\mathbf{E} + \tilde{M}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^* = \partial\Pi/\partial\mathbf{E}^* \tag{10}$$

данное уравнение относится к вариационному типу. Для обычной керровской нелинейности $N = k_0^2[1 + (\alpha/\varepsilon)E^2]$ и $\tilde{M} = k_0^2(\beta/\varepsilon) = \text{const}$, так что

$$\Pi = k_0^2[E^2 + (\alpha/\varepsilon)E^4/2 + (\beta/\varepsilon)|(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2/2]. \tag{11}$$

Можно также рассматривать и среды с насыщающейся нелинейностью [38–40].

Из уравнения (9) после соответствующих вычислений мы находим, что x-компонента уравнения дает условие вида $W_+(r)e^{i(m-1)\varphi} + W_-(r)e^{i(m+1)\varphi} = 0$, с некоторыми дифференциальными выражениями W_+ и W_-, тогда как для y-компоненты получается совместное с предыдущим уравнение $i[W_+(r)e^{i(m-1)\varphi} - W_-(r)e^{i(m+1)\varphi}] = 0$. Для продольной компоненты мы имеем $iW_\parallel(r)e^{im\varphi} = 0$. Таким образом, число независимых уравнений ($W_+ = 0$, $W_- = 0$ и $W_\parallel = 0$) совпадает с числом неизвестных функций.

По техническим соображениям удобно записать уравнения в терминах линейных комбинаций $(A_+ + A_-) = F$ и $(A_+ - A_-) = G$. Тогда получается система ОДУ следующего вида:

$$\kappa^2 F + \frac{m}{r^2}(mF - G) - \frac{mG'}{r} + \kappa B' = NF + MF^*, \tag{12}$$

$$\kappa^2 G - G'' + \Big[\frac{mF - G}{r}\Big]' + m\kappa\frac{B}{r} = NG - MG^*, \tag{13}$$

$$-\frac{(rB')'}{r} + \frac{m^2}{r^2}B - \frac{\kappa}{r}\Big[(rF)' - mG\Big] = NB - MB^*, \tag{14}$$

где для краткости введено обозначение

$$M = (F^2 - G^2 - B^2)\tilde{M}. \tag{15}$$

Дальнейшее упрощение полученной системы возможно в силу равенства $\operatorname{div}[N\mathbf{E} + \tilde{M}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*] = 0$, которое прямо следует из уравнения (9). Покажем, что определенная комбинация из трех ОДУ не содержит вторых производных. Для этого умножим уравнение (12) на r, а затем продифференцируем. Уравнение (13) умножим на $-m$, а уравнение (14) умножим на κr. Сумма этих трех слагаемых в левой части дает тождественный ноль, а из правой части мы получим ОДУ первого порядка

$$[r(NF + MF^*)]' - m[NG - MG^*] + \kappa r(NB - MB^*) = 0, \tag{16}$$

которое заменяет собой уравнение (14).

Способ численного решения. Далее мы будем предполагать функции F, G и B действительными, что допускается системой.

В уравнении (12) производная B' легко выражается через $\{F, G, G', B\}$. Затем из уравнения (16) с помощью уравнения (12) можно алгебраически выразить F' также через указанную четверку функций. В итоге мы имеем систему ОДУ стандартного типа в четырехмерном фазовом пространстве, которая легко решается численными методами с высокой точностью. Решать приходится, однако, не задачу Коши с начальными условиями, а краевую задачу. Если мы рассматриваем решения на отрезке между $r_1 > 0$ и $r_2 > r_1$, то естественные краевые условия, которые соответствуют идеально проводящим стенкам волновода, состоят в требованиях $G(r_1) = 0$, $G(r_2) = 0$, $B(r_1) = 0$, $B(r_2) = 0$, и в свободных краевых условиях для $F(r_1)$ и $F(r_2)$. При этом касательная компонента электрического поля обращается в ноль на цилиндрических стенках волновода. Если же рассматриваются солитоны в безграничном пространстве, то на бесконечности следует поставить нулевые асимптотические условия, а при $r \to 0$ все наши функции обязаны быть регулярными. Что касается вихрей в дефокусирующей среде, то нас будут интересовать решения в виде циркулярно поляризованной волны на бесконечности (т.е. $F \to G$). Такой выбор асимптотики обусловлен устойчивостью волны с круговой поляризацией по отношению к формированию доменных стенок, в отличие от линейно либо эллиптически поляризованной волны [6, 8]. В этом смысле заведомо неустойчивы известные решения с чисто азимутальной поляризацией [33, 34], для которых $F \equiv 0$, $B \equiv 0$ при $m = 0$.

Чтобы использовать численные методы интегрирования полученных ОДУ (здесь это метод Рунге–Кутта 4-го порядка), необходимо хотя бы слегка "отойти" от особой точки $r = 0$. Для этого надо знать несколько первых коэффициентов в разложениях неизвестных функций по степеням r. При этом каждое значение m удобнее рассматривать отдельно.

Солитон. Начнем со случая $m=1$ (самосфокусированный стационарный световой пучок) и запишем соответствующее разложение

$$F = A_0 + (f_2/2)r^2 + \cdots\,, \tag{17}$$

$$G = A_0 + (g_2/2)r^2 + \cdots\,, \tag{18}$$

$$B = b_1 r + \cdots\,. \tag{19}$$

Весьма примечательно, что при $m=1$ оба уравнения (12) и (13) дают одно и то же требование на коэффициенты A_0, f_2, g_2 и b_1:

$$\frac{1}{2}f_2 - \frac{3}{2}g_2 + \kappa b_1 = [N(0, 2A_0^2, 0) - \kappa^2]A_0. \tag{20}$$

Еще одна связь между коэффициентами разложения получается из уравнения (16). Ввиду громоздкости мы ее здесь не выписываем явно.

Таким образом, на четыре коэффициента имеется всего два алгебраических уравнения. Удобно взять A_0 и b_1 в качестве свободных параметров, а через них выразить f_2 и g_2. Подбирая затем нужным образом A_0 и b_1, можно добиться выполнения нулевых асимптотических условий на бесконечности. При этом требуется весьма "тонкая" совместная настройка значений A_0 и b_1, для чего приходится проводить численную процедуру типа "стрельбы". Численные примеры профилей солитонов приведены на рис. 1 для обезразмеренного уравнения (1), что формально соответствует выбору $N = 1 + E^2$, $\tilde{M} = \gamma = 0.5$ (при этом $k_0 = 1$, $\lambda_0 = 2\pi$). Из этого рисунка видно, что примесь противоположной поляризации $A_- = (F - G)/2$ становится заметной лишь для весьма узких солитонов. Продольная компонента электрического поля также всегда относительно мала.

Левый вихрь в левой волне. Рассмотрим теперь керровскую дефокусирующую среду с $N = 1 - E^2$, $\tilde{M} = -\gamma = -0.5$. При $m=0$ разложение функций по степеням r имеет вид

$$F = f_1 r + \cdots\,, \tag{21}$$

$$G = g_1 r + (g_3/6)r^3 + \cdots\,, \tag{22}$$

$$B = b_0 + (b_2/2)r^2 + \cdots\,. \tag{23}$$

Из пяти коэффициентов два (g_1 и b_0) – независимые параметры, а остальные выражаются через них следующим образом (где $N_0 = 1 - b_0^2$, $M_0 = \gamma b_0^2$):

$$f_1 = -b_0\kappa\frac{(N_0 - M_0)}{2(N_0 + M_0)}, \tag{24}$$

$$b_2 = \frac{f_1}{\kappa}(N_0 + M_0 - \kappa^2), \tag{25}$$

$$g_3 = \frac{3g_1}{4}(\kappa^2 - N_0 + M_0). \tag{26}$$

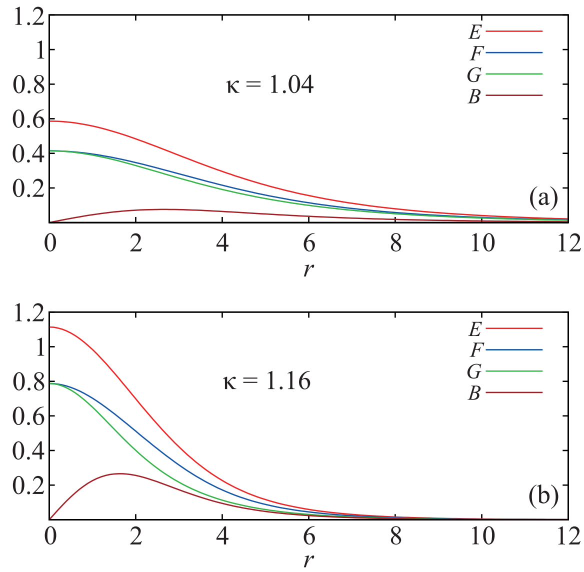

Рис. 1. (Цветной онлайн) Примеры профилей керровских солитонов

Подбирая g_1 и b_0 при заданном значении $\kappa < 1$, получим решение для лево-закрученного вихря в лево-поляризованной волне. Примеры таких вихрей представлены на рис. 2. Видно, что, как и в случае со-

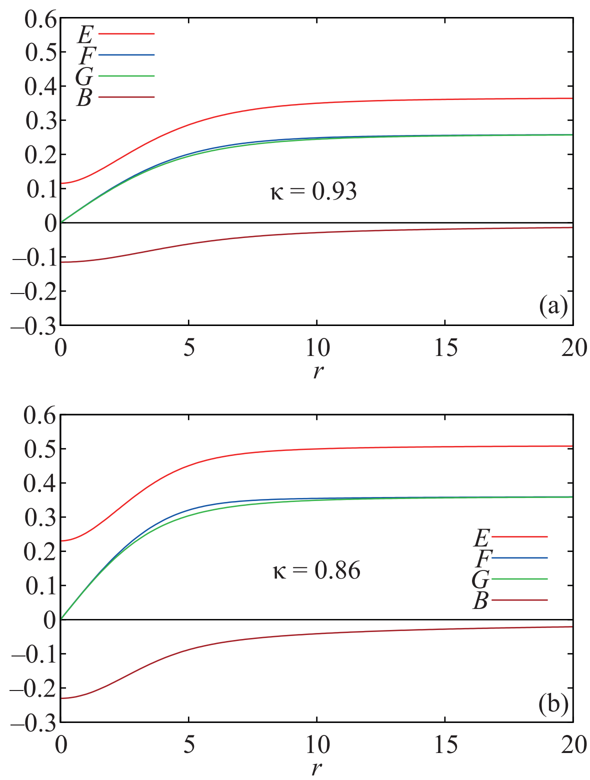

Рис. 2. (Цветной онлайн) Примеры лево-закрученных вихрей в лево-поляризованной волне

литонов, право- поляризованная добавка ничтожно мала, но зато сердцевина вихря заполнена безвихревой продольной компонентой, так что амплитуда электрического поля E в ноль нигде не обращается.

Правый вихрь в левой волне. При $m = 2$ актуально разложение

$$F = sr + (f_3/6)r^3 + \cdots , \tag{27}$$

$$G = sr + (g_3/6)r^3 + \cdots , \tag{28}$$

$$B = (b_2/2)r^2 + \cdots . \tag{29}$$

Как и в предыдущих случаях, два параметра остаются свободными (удобно взять s и b_2). Два других определяются выражениями

$$f_3 = 8s^3 - \kappa b_2/2 - s(1-\kappa^2)/2, \tag{30}$$

$$g_3 = 4s^3 + \kappa b_2/2 - s(1-\kappa^2). \tag{31}$$

Подбором значений s и b_2 можно добиться желаемой асимптотики на бесконечности. Примеры профилей таких право-закрученных оптических вихрей в лево-поляризованной волне приведены на рис. 3.

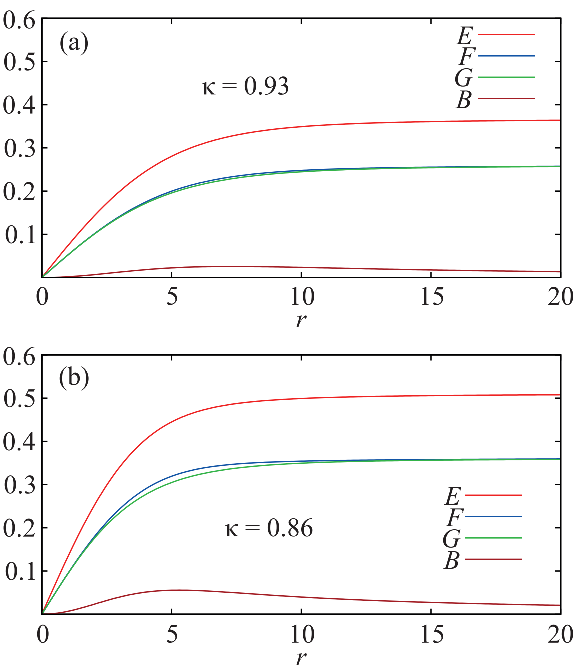

Рис. 3. (Цветной онлайн) Примеры право-закрученных вихрей в лево-поляризованной волне.

Продольная компонента здесь, мало того, что имеет другой знак по сравнению с предыдущими примерами из рис. 2, так еще и профиль ее в сердцевине вихря качественно иной. Таким образом, наблюдается своеобразное спин-орбитальное взаимодействие.

Заключение. Точные (в рамках численных методов для ОДУ) решения фундаментальной задачи нелинейной оптики, найденные в данной работе, представляются довольно важным результатом. Разумеется, в практических вычислениях с конечной точностью решения получаются только на конечном интервале по r, если только дополнительно не позаботиться о вычислении асимптотик на больших r и о сшивке решений в области обоюдной применимости. Но самые интересные свойства мелкомасштабных световых структур проявляются на масштабах по r от нуля до нескольких единиц, так что вся основная информация об их внутреннем строении уже здесь получена. За рамками рассмотрения остались вопросы устойчивости для различных m, но для них потребуется отдельное исследование.

Кроме того, с помощью рассмотренных здесь уравнений можно ожидать в будущем получения интересных результатов для сильно нелинейных стационарных волн в цилиндрически симметричных световодах с нетривиальными профилям $\varepsilon(r)$, $\alpha(r)$ и $\beta(r)$.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках госзадания по теме FFWR-2024-0013.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
2. D. Pohl, Opt. Commun. **2**, 305 (1970).
3. В. Е. Семенов, Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, ЖЭТФ **116**, 458 (1999).
4. N. N. Rosanov, V. E. Semenov, and N. V. Vyssotina, J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt. **3**, 96 (2001).
5. N. N. Rosanov, V. B. Semenov, N. A. Solov’eva, and N. V. Vyssotina, Proc. SPIE **4751**, 1 (2002).
6. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **120**, 745 (2024).
7. G. A. Swartzlander, Jr. and C. T. Law, Phys. Rev. Lett. **69**, 2503 (1992).
8. C. T. Law and G. A. Swartzlander, Jr., Chaos Solit. Fractals **4**, 1759 (1994).
9. *Optical Vortices*, ed. by M. Vasnetsov and K. Staliunas, Nova Science, N.Y. (1999).
10. L. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Oxford University, London (1999).
11. M. J. Paz-Alonso and H. Michinel, Phys. Rev. Lett. **94**, 093901 (2005).
12. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **120**, 104 (2024).
13. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 3389 (1994).
14. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 4512 (1994).
15. A. P. Sheppard and M. Haelterman, Opt. Lett. **19**, 859 (1994).
16. Yu. S. Kivhsar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
17. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, Phys. Rev. E **84**, 046602 (2011).

18. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023).
19. В. П. Рубан, ЖЭТФ **165**, 294 (2024).
20. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
21. S. Chi and Q. Guo, Opt. Lett. **20**, 1598 (1995).
22. B. A. Malomed, K. Marinov, D. I. Pushkarov, and A. Shivarova, Phys. Rev. A **64**, 023814 (2001).
23. G. Fibich and B. Ilan, Phys. Rev. E **67**, 036622 (2003).
24. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Г. Владимиров, ЖЭТФ **118**, 1307 (2000).
25. N. N. Rosanov, Proc. SPIE **4403**, 200 (2001).
26. Н. Н. Розанов, Оптика и спектроскопия **94**, 1013 (2003).
27. N. V. Vysotina, N. N. Rozanov, V. E. Semenov, V. A. Smirnov, S. V. Fedorov, and D. N. Christodoulides, Optics and Spectroscopy **98**, 895 (2005).
28. H. Wang and W. She, Opt. Express **13**, 6931 (2005).
29. A. Couairon and A. Mysyrowicz, Phys. Rep. **441**, 47 (2007).
30. J. E. Sipe and R. W. Boyd, Phys. Rev. A **46**, 1614 (1992).
31. A. Ciattoni, C. Rizza, and E. Palange, Phys. Rev. A **81**, 043839 (2010).
32. C. Rizza, A. Ciattoni, and E. Palange, Phys. Rev. A **83**, 053805 (2011).
33. A. Ciattoni, B. Crosignani, P. Di Porto, and A. Yariv, Phys. Rev. Lett. **94**, 073902 (2005).
34. A. Ciattoni, B. Crosignani, P. Di Porto, and A. Yariv, J. Opt. Soc. Am. B **22**, 1384 (2005).
35. L. Berge, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
36. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Успехи физических наук **182**, 569 (2012).
37. V. A. Aleshkevich, A. S. Zhukarev, and N. G. Uvarov, Physics of Wave Phenomena **19**, 239 (2011).
38. N. V. Vysotina, N. N. Rozanov, V. E. Semenov, V. A. Smirnov, and S. V. Fedorov, Optics and Spectroscopy **98**, 447 (2005).
39. F. Bouchard, H. Larocque, A. M. Yao, C. Travis, I. De Leon, A. Rubano, E. Karimi, G.-L. Oppo, and R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **117**, 233903 (2016).
40. C. J. Gibson, P. Bevington, G.-L. Oppo, and A. M. Yao, Phys. Rev. A **97**, 033832 (2018).