Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 6, с. 484 – 490

Субтерагерцовые акустические солитоны в условиях генерации второй гармоники

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 января 2025 г.
После переработки 10 февраля 2025 г.
Принята к публикации 11 февраля 2025 г.

Проведено аналитическое исследование импульсного режима генерации второй акустической гармоники субтерагерцового диапазона в парамагнитном кристалле. Получено точное решение соответствующих нелинейных волновых уравнений для медленно меняющихся амплитуд в виде двухчастотного солитона при отсутствии фазового и группового синхронизмов и в условиях равенства нулю параметра дисперсии групповой скорости на частоте второй гармоники. Показано, что солитон формируется при относительной близости несущей частоты входного импульса к спектральной линии квантового перехода между зеемановскими подуровнями примесных парамагнитных ионов.

DOI: 10.31857/S0370274X25030203, EDN: SVJFYF

1. Введение. Одной из тенденций развития нелинейной физической акустики в последние десятилетия является поиск акустических аналогов тех явлений, которые проявили себя в оптике и лазерной физике [1]. Соответствующий поиск и обнаружение акустических солитонов здесь не является исключением. Так, вслед за экспериментальным открытием и теоретическим объяснением в лазерной оптике солитонного резонансного эффекта самоиндуцированной прозрачности (СИП) [2, 3] был предсказан и обнаружен его акустический аналог на системе примесных парамагнитных ионов [4–6] (см. также [7–10]).

Предсказание двухчастотных (параметрических) пространственных солитонов в режиме генерации второй гармоники [11] повлекло за собой предсказание аналогичных солитонов в акустике [12].

Создание импульсных лазеров стимулировало, в числе прочего, исследования импульсных режимов генерации второй оптической гармоники. В частности, были исслдованы вопросы формирования двухчастотных временных солитонов (см. [13] и цитируемую там литературу). Рассмотрены ситуации, когда выполнены условия фазового и группового синхронизмов, обусловленные равенствами соответственно фазовых и групповых скоростей на основной частоте и на частоте второй гармоники [13]. Кроме того, всесторонне численно исследованы двухчастотные временные солитоны в условиях рассогласования групповых скоростей [13].

Интенсивным исследованиям подверглись режимы формирования двухчастотных пространственно-временных солитонов (световых пуль) в условиях генерации второй гармоники [14–23].

Как известно, для формирования временных солитонов должны присутствовать нелинейность и дисперсия, что не является большой проблемой в случае распространения интенсивных оптических импульсов в диэлектрических средах.

Оценивая возможность формирования акустических временных солитонов в кристаллах при генерации второй гармоники, можно сказать, что с акустической нелинейностью, вызванной ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки, проблем нет. Что же касается дисперсии, то в акустике кристаллических сред все несколько сложнее, чем в оптике. Как правило, частоты акустических сигналов ультразвукового диапазона лежат значительно ниже дебаевских частот. Поэтому пространственная дисперсия, обусловленная дискретной структурой кристалла, при таких частотах практически себя не проявляет. С другой стороны, сегодня можно смело говорить о генерации в экспериментальных условиях ультразвуковых когерентных импульсов субтерагерцового и даже терагерцового диапазонов [24–26]. В этих частотных диапазонах отмеченная выше пространственная дисперсия уже может способствовать формированию акустических солито-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

нов [27]. Согласно принятой в акустике твердого тела терминологии, субтерагерцовые акустические сигналы называются гиперзвуком [28]. Дополнительная, временная, дисперсия может быть создана внедрением в кристалл парамагнитных ионов и внешним магнитным полем $\mathbf{B}$, вызывающим зеемановское расщепление их спиновых подуровней [28]. Данная дисперсия обусловлена взаимодействием когерентного гиперзвука с квантовыми переходами между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов (спин-фононное взаимодействие) [29]. Для эффективности спин-фононного взаимодействия характерная частота ω_0 зеемановского расщепления должна существенно превышать неоднородную ширину $1/T^*$ линии соответствующего квантового перехода. Здесь T_2^* – характерное время расфазировки ультразвуковых откликов парамагнитных ионов в результате разброса собственных частот ω_0. Данное условие выполняется в случае сильных магнитных полей, при которых $\omega_0 \sim 10^{11}{-}10^{12}$ с$^{-1}$ [29]. Такие частоты соответствуют субтерагерцовому и терагерцовому частотным диапазонам. Везде ниже за ω_0 будем принимать центральную частоту неоднородно уширенной линии зеемановского перехода.

Временной дисперсией, обусловленной спин-фононным взаимодействием, можно эффективно управлять, изменяя величину внешнего магнитного поля. Данное обстоятельство, в свою очередь, может позволить управлять эффективностью генерации второй акустической гармоники в солитонном режиме. С другой стороны, при наличии дисперсии значительно труднее удовлетворить условиям фазового и/или группового синхронизмов, чем при ее отсутствии.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию возможности формирования двухчастотных акустических солитонов субтерагерцового диапазона в парамагнитном кристалле при наличии рассогласований фазовых и групповых скоростей на основной частоте ω и на частоте 2ω второй гармоники.

2. Основные уравнения. Пусть продольный импульс относительной упругой деформации распространяется вдоль оси x, которая является осью симметрии четвертого порядка в кубическом кристалле, содержащем примесные парамагнитные ионы с эффективным спином $s = 1$.

Спин-фононное взаимодействие осуществляется за счет механизма ван Флека [28, 29]. Согласно данному механизму, импульс деформации создает в кристалле локальные градиенты электрического поля, которые, в свою очередь, вызывают квадрупольные переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов.

Будем считать, что внешнее магнитное поле параллельно оси z, которая перпендикулярна к оси x и также является осью симметрии четвертого порядка. В этих условиях импульс упругой деформации возбуждает квантовый переход между основным подуровнем в зеемановском триплете с проекцией эффективного спина и наивысшим подуровнем с $s_z = -1$ в данном триплете [30].

Тогда в приближении однонаправленного распространения соответствующее волновое уравнение имеет вид [30]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{2a}\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial t} + \frac{1}{6a\omega_D^2}\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} - \frac{ng}{\rho a^3}\frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь a – линейная скорость звука в кристалле, t – время, Γ – параметр Грюнайзена, ω_D – дебаевская частота, ρ – равновесная плотность кристалла, n – концентрация парамагнитных ионов, g – постоянная спин-фононного взаимодействия, имеющая размерность энергии [28, 29], U – обезразмеренный квадрупольный отклик парамагнитных ионов, выражающийся следующим образом через относительную деформацию кристалла [30]

$$U = g\frac{w_- - w_+}{2\hbar}\int\limits_0^{\infty} \varepsilon(x, t-\tau)\sin\omega_0\tau d\tau, \quad (2)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, w_- и w_+ – начальные населенности соответственно основного и наивысшего зеемановских подуровней эффективного спина.

Согласно приближению однонаправленного распространения, правая часть уравнения (1) значительно меньше величины каждого из двух слагаемых в левой части. В соответствии с этим в левой части использовано приближенное равенство $\frac{\partial}{\partial x} \approx -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$.

Первым слагаемым в правой части (1) учитывается упругий ангармонизм колебаний узлов кристалла. Второе слагаемое ответственно за пространственную дисперсию, обусловленную дискретной структурой кристаллической решетки. Последнее слагаемое в правой части уравнения (1) описывает вклад в упругую деформацию примесных парамагнитных ионов за счет спин-фононного взаимодействия.

В (1) и (2) мы пренебрегли всеми релаксационными процессами, считая что длительность τ_p импульса упругой деформации короче всех времен релаксации. Важно, что спектр импульса деформации не захватывает линию резонансного поглощения ультразвука парамагнитными ионами. Учитывая, что неоднородное уширение является здесь доминирующим релаксационным фактором [4, 28], запишем обозначенные условия в виде

$$\tau_p < T_2^*, \quad |\omega - \omega_0|\tau_p > 1, \quad |2\omega - \omega_0|\tau_p > 1. \tag{3}$$

Легко видеть, что из (3) автоматически следуют неравенства $|\omega - \omega_0|T_2^* > 1$ и $|2\omega - \omega_0|T_2^* > 1$, также отражающие условие того, что спин-фононное взаимодействие в рассматриваемом случае является нерезонансным.

Учитывая (3), ниже будем пренебрегать изменениями населенностей $w_\pm$ зеемановских подуровней парамагнитных ионов.

Представим относительную деформацию ε в виде

$$\varepsilon = \psi_1(x,t)e^{i(\omega t - k_1 x)} + \psi_2(x,t)e^{i(2\omega t - k_2 x)} + \text{c.c}, \tag{4}$$

где $\psi_1(x,t)$ и $\psi_2(x,t)$ – медленно меняющиеся амплитуды (ММА) на основной частоте и на частоте второй гармоники соответственно, k_1 и k_2 – соответствующие волновые числа.

Подстановка (4) в (2) приводит к выражению

$$U = g\frac{w_- - w_+}{2\hbar}\sum_{l=1}^{2} e^{i(l\omega t - k_l x)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \psi_l(x, t-\tau)e^{-il\omega\tau}\sin\omega_0\tau d\tau + \text{c.c.} \tag{5}$$

В силу того, что спин-фононное взаимодействие в нашем случае является нерезонансным, справедливо часто используемое в нелинейной оптике разложение [31]

$$\psi_l(x, t-\tau) = \psi_l(x,t) - \tau\frac{\partial\psi_l}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2\psi_l}{\partial t^2} - \ldots$$

Подставляя данное разложение в (5), используя затем (1) и (4) и пренебрегая производными по времени от $\psi_{1,2}$ выше второй степени, придем к связанной системе нелинейных уравнений

$$i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t}\right) = -\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + \alpha e^{-i\delta z}\psi_1^*\psi_2, \tag{6}$$

$$i\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t}\right) = -\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + \alpha e^{-i\delta z}\psi_1^2, \tag{7}$$

где $\alpha = \Gamma\omega/a$, фазовая отстройка δ, групповые скорости v_1 и v_2, а также параметры дисперсии групповых скоростей (ДГС) β_1 и β_2 определяются выражениями

$$\delta = k_2 - 2k_1 = \frac{\omega}{a}\left[\frac{\omega^2}{\omega_D^2} - 6\eta\frac{\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega_0^2-4\omega^2)}\right], \tag{8}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{\omega^2}{2\omega_D^2} + \eta\omega_0^2\frac{\omega_0^2+\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\right],$$

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{a}\left[1 + 2\frac{\omega^2}{2\omega_D^2} + \eta\omega_0^2\frac{\omega_0^2+4\omega^2}{(\omega_0^2-4\omega^2)^2}\right], \tag{9}$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{a}\left[\frac{1}{\omega_D^2} + 2\eta\omega_0^2\frac{3\omega_0^2+\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^3}\right],$$

$$\beta_2 = \frac{2\omega}{a}\left[\frac{1}{\omega_D^2} + 2\eta\omega_0^2\frac{3\omega_0^2+4\omega^2}{(\omega_0^2-4\omega^2)^3}\right], \tag{10}$$

$$\eta = \frac{g^2 n}{2\hbar\omega_0\rho a^2}(w_- - w_+). \tag{11}$$

Дисперсионные соотношения $k_{1,2} = k_{1,2}(\omega)$ получены, как обычно [31], приравниванием в левой и правой частях уравнения (1) коэффициентов при $\psi_{1,2}$.

При выводе уравнений (6) и (7) в нелинейных слагаемых мы, в силу приближения ММА, пренебрегли производными по времени от $\psi_{1,2}$.

С помощью известного фазового преобразования [32]

$$\Phi_1 = \psi_1, \quad \Phi_2 = \psi_2 e^{-i\delta x} \tag{12}$$

система уравнений (6), (7) сводится к более удобному автономному виду

$$i\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right) = -\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + \alpha\Phi_2^*\Phi_2, \tag{13}$$

$$i\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right) = \delta\Phi_2 - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + \alpha\Phi_1^2. \tag{14}$$

Дальнейшее исследование сводится к поиску солитоноподобных решений системы (13), (14).

3. Двухчастотные солитоны. Будем искать солитоноподобные решения системы (13), (14) в виде

$$\Phi_1 = F_1(t - x/v)e^{i(\Omega t - qx)},$$
$$\Phi_2 = F_1(t - x/v)e^{2i(\Omega t - qx)}, \tag{15}$$

где $F_{1,2}$ – неизвестные функции аргумента $t - x/v$, v – скорость распространения солитона, Ω и q – постоянные параметры, имеющие смысл аддитивных добавок к основной несущей частоте и к волновому числу соответственно.

Подставляя (15) в (13) и (14), после отделения друг от друга действительной и мнимой частей получим

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} + \beta_1\Omega, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_2} + 2\beta_2\Omega, \tag{16}$$

$$\beta_1\ddot{F}_1 = [\beta_1\Omega^2 + 2(\Omega/v_1 - q)]F_1 + 2\alpha F_1 F_2. \tag{17}$$

$$\beta_2 \ddot{F}_2 = 2[2(\beta_2\Omega^2 + \Omega/v_2 - q) + \delta]F_2 + 2\alpha F_1^2, \quad (18)$$

Здесь точка сверху обозначает производную по переменной $t - z/v$.

Ниже рассмотрим ситуацию, при которой

$$\beta_2 = 0. \quad (19)$$

В этом случае из (18) находим

$$F_2 = -\frac{\alpha}{2(\Omega/v_2 - q) + \delta} F_1^2. \quad (20)$$

Подстановка данного выражения в правую часть (17) приводит к дифференциальному уравнению для F_1:

$$\ddot{F}_1 = \left[\Omega^2 + \frac{2}{\beta_1}\left(\frac{\Omega}{v_1} - q\right)\right] F_1 - \frac{2\alpha^2 F_1^3}{\beta_1[2(\Omega/v_2 - q) + \delta]}. \quad (21)$$

Из (16) следует, что при условии (19) имеют место равенства

$$v = v_2, \quad \Omega = -\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right). \quad (22)$$

Решив уравнение (21) при учете (20) и (22), запишем выражения для вещественных амплитуд двухчастотного солитона

$$F_1 = F_{1m}\mathrm{sech}\left(\frac{t - x/v_2}{\tau_p}\right),$$
$$F_2 = -F_{2m}\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - x/v_2}{\tau_p}\right). \quad (23)$$

При этом

$$F_{1m} = \frac{1}{\alpha\tau_p}\sqrt{\frac{\beta_1^2}{\tau_p^2} + \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)^2 + \beta_1\delta},$$
$$F_{2m} = \frac{\beta_1}{\alpha\tau_p^2}. \quad (24)$$

$$q = -\frac{\beta_1}{2\tau_p^2} - \frac{1}{2\beta_1}\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}\right) \approx -\frac{\beta_1}{2\tau_p^2} + \frac{\Omega}{a}. \quad (25)$$

При переходе в (25) к приближенному равенству учтена близость скоростей v_1 и v_2 к значению a, а также использовано второе соотношение (22).

Выражения (15), (22)–(25) представляют собой решение системы (13), (14) в виде светлых двухчастотных солитонов при условии (19). В качестве свободного параметра здесь выступает временная длительность τ_p компоненты солитона на основной частоте. Как видно из (23), длительность солитонной компоненты на частоте второй гармоники в два раза меньше длительности солитонной составляющей на основной частоте.

Полагая формально в (24) $\delta = 1/v_1 - 1/v_2 = 0$, будем иметь решение, которое обсуждалось в [13] и [33].

Перейдем к обсуждению полученного решения. Из (10) следует, что условие (19) реализуется при несущей частоте ω входного импульса, удовлетворяющей равенству

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4} + u}, \quad (26)$$

где u – постоянная, удовлетворяющая кубическому уравнению

$$u^3 - \sigma(u + 1) = 0, \quad (27)$$

$$\sigma = \eta\frac{\omega_D^2}{8\omega_0^2}. \quad (28)$$

В целях поиска решений кубического уравнения (27) без использования громоздких формул Кардано оценим величину параметра σ, используя данные экспериментов, связанных с акустикой парамагнитных кристаллов [4, 28, 29]. При температуре кристалла $T \sim 1\,\mathrm{K}$ и частоте зеемановского расщепления $\omega_0 \sim 10^{11}\,\mathrm{c}^{-1}$ имеем $\hbar\omega_0/k_BT \sim 1$, где k_B – постоянная Больцмана. Тогда в (11) в силу больцмановской статистики можно положить $w_- - w_+ \sim 0.5$. Взяв для парамагнитных ионов Fe^{2+} в кубическом кристалле $g \sim 10^{-13}$ эрг, $n \sim 10^{18}\,\mathrm{см}^{-3}$, $\rho \approx 3.6\,\mathrm{г/см}^3$, $a \sim 10^6\,\mathrm{см/с}$ [4], будем иметь из (11) $\eta \sim 10^{-5}$. Учитывая также, что $\omega_D \approx 5\cdot 10^{13}\,\mathrm{c}^{-1}$ [34], из (28) найдем $\sigma \sim 0.1$.

В рассмотренных выше условиях кубическое уравнение (27) можно решать методом последовательных приближений по параметру σ. Тогда во втором порядке получим

$$u = \sigma^{1/3} + \sigma^{2/3}/3. \quad (29)$$

Простая проверка показывает, что значения u, вычисленные по формуле (29), с погрешностью не более одного процента согласуются с соответствующими значениями, полученными по формуле Кардано для уравнения (27) в интервале значений параметра σ от нуля до пяти. Таким образом, в физически значимых случаях несущая частота ω входного акустического сигнала, при которой выполняется условие (19), вычисляется по формуле (26), где определяется выражением (29).

Приближение ММА, при использовании которого получена система (13), (14) и ее обсуждаемое здесь решение справедливы при непременных условиях $\Omega \ll \omega$ и $q \ll \omega/a$. Из (25) видно, что эти условия согласуются друг с другом. Для выполнения данных условий, как следует из (22), параметр β_1 должен быть как можно больше. В свою очередь, из первого выражения (10) видно, что для этого несущая частота ω должна быть близка к ω_0. В то же время должны выполняться условия (3). Из (26) следует, что условие резонанса $\omega = \omega_0$ выполняется при $u = 3/4$. Тогда, используя (27), будем иметь $\sigma \approx 0.24$. Заметим, что если в (29) положить $u = 3/4$, то из него находится такое же значение параметра σ. Это значение вполне согласуется с приведенной выше оценкой $\sigma \sim 0.1$. В силу неравенств (3) спин-фононное взаимодействие не должно быть резонансным. Иначе принятая здесь модель, содержащая в волновых уравнениях нелинейность только второй степени, теряет силу. Поэтому значение параметра σ должно немногим отличаться от 0.24. Из (11) и (28) видно, что управлять величиной данного параметра можно с помощью внешнего магнитного поля, которое вызывает зеемановское расщепление частоты ω_0.

Итак, для эффективной генерации второй акустической гармоники в солитонном режиме при условии (19) необходима близость несущей частоты входного импульса к частоте зеемановского перехода ω_0 с одновременным выполнением неравенств (3). Учитывая данное обстоятельство из (8)–(10), будем иметь приближенные выражения для β_1, а также для параметров фазовой δ и групповой $1/v_1 - 1/v_2$ отстроек:

$$\beta_1 \approx \frac{2\omega_0^4}{a\omega_D^2(\omega_0-\omega)^3}, \tag{30}$$

$$\delta \approx \frac{2\omega_0^4}{a\omega_D^2(\omega_0-\omega)}, \ \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \approx \frac{2\omega_0^4}{a\omega_D^2(\omega_0-\omega)^2}. \tag{31}$$

Здесь мы с хорошей точностью положили $\sigma \approx 0.25$.

Подставляя (30) и (31) в (22), (24) и (25) при учете (3), получим

$$\Omega \approx \frac{\omega-\omega_0}{2}, \ \ q \approx \frac{\Omega}{a}\left[1 + \left(\frac{2}{\omega_D\tau_p}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega_0-\omega}\right)^4\right], \tag{32}$$

$$F_{1m} \approx \frac{\sqrt{5}}{\Gamma(\omega_0-\omega)\tau_p}\left(\frac{\omega_0}{\omega_D}\right)^2\frac{\omega_0}{\omega_0-\omega}, \tag{33}$$

$$F_{2m} \approx \frac{2}{\Gamma(\omega_0-\omega)^2\tau_p^2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_D}\right)^2\frac{\omega_0}{\omega_0-\omega}. \tag{34}$$

Приведем численные оценки выписанных параметров. Добавляя к экспериментальным данным, приведенным после формулы (28), значения следующих параметров $T_2^* = 10^{-8}$ с [4], $|\omega - \omega_0| = 0.05\omega_0$, $\tau_p = 10^{-9}$ с, будем иметь $|\omega-\omega_0|\tau = 5$, $|\omega-\omega_0|T_2^* = 50$, что находится в соответствии с условиями (3). Тогда из (32) находим $\Omega \approx 2\cdot 10^9\,\text{с}^{-1}$. Учитывая, что параметр Грюнайзена для широкого класса кристаллов порядка единицы [35], из (33) и (34) получим $F_{1m} \sim 10^{-5}$, $F_{2m} \sim 10^{-6}$, что вполне допустимо с точки зрения возможных экспериментов.

Из (33) и (34) имеем

$$\left(\frac{F_{2m}}{F_{1m}}\right)^2 \sim \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2\tau_p^2}.$$

Отсюда и из (3) видно, что $(F_{2m}/F_{1m})^2 \ll 1$. Таким образом, при наличии фазовой и групповой отстроек интенсивность солитонной компоненты на частоте второй гармоники значительно меньше интенсивности, составляющей на основной частоте. В присутствии же фазового и группового синхронизмов амплитуды обеих солитонных компонент приблизительно одного порядка [33]. Как и следовало ожидать, фазовая и групповая отстройки уменьшают эффективность генерации второй гармоники в солитонном режиме.

Выражения (23) показывают, что скорость распространения рассмотренных здесь двухчастотных солитонов равна линейной групповой скорости v_2 на частоте второй гармоники. В свою очередь, из второго выражения (9) видно, что данная скорость при приведенных выше значениях параметров реального кристалла очень близка к линейной скорости звука a ввиду слабой дисперсии на частоте второй гармоники. Поэтому в обеих выражениях (23) можно с хорошей точностью положить $v_2 = a$.

Солитоны формируются на дистанции порядка дисперсионной длины $l_{\text{dis}} = 2\tau_p^2/|\beta_1|$. Подставляя приведенные выше численные параметры в формулу (30), найдем $|\beta_1| \sim 10^{-18}\,\text{с}^2/\text{см}$. Тогда $l_{\text{dis}} = 1$ см. При этом не должны дать о себе знать поперечные эффекты, включая дифракционную расходимость. Взяв для поперечного диаметра D входного акустического импульса $D \sim 1$ мм, будем иметь $l_{\text{dif}} \sim \omega D^2/a \sim 10^3$ см, где l_{dif} – дифракционная длина. Таким образом, условие $l_{\text{dis}} \ll l_{\text{dif}}$ выполняется с хорошим запасом. Суммируя сказанное в данном абзаце, можно сказать, что двухчастотные акустические субтерагерцовые солитоны могут быть обнаружены в парамагнитных образцах оксида магния длиной порядка 10 см при температурах жидкого гелия, как это имело место при обнаружении акустической СИП [4, 6].

Из (32) следует, что $\operatorname{sgn}\Omega = \operatorname{sgn}(\omega-\omega_0)$. Таким образом, несущая частота $\omega + \Omega$ основной компоненты сформировавшегося двухчастотного солитона отстоит дальше от резонанса, чем несущая частота ω входного сигнала как при $\omega < \omega_0$, так и при $\omega > \omega_0$. Данное обстоятельство является дополнительным аргументом в пользу принятого здесь подхода, при котором пренебрегается изменениями населенностей зеемановских подуровней парамагнитных ионов. Причем в случае $\omega < \omega_0$, как видно из (30), имеем $\beta_1 > 0$, а при $\omega > \omega_0$ параметр ДГС на основной частоте $\beta_1 < 0$. Именно во втором случае возможно формирование пространственно-временных оптических солитонов (световых пуль) [14–23]. Поэтому в дальнейшем имеет смысл исследовать возможность формирования в аналогичной ситуации двухчастотных пространственно-временных акустических солитонов.

4. Заключительные замечания. Таким образом, здесь получены аналитические солитоноподобные решения уравнений, описывающих импульсный режим генерации второй субтерагерцовой акустической гармоники при отсутствии фазового и группового синхронизмов. В настоящей работе рассмотрен случай, когда параметр ДГС на частоте второй гармонике равен нулю (см. (19)). Данное обстоятельство, с одной стороны, позволило получить точные аналитические решения нелинейных волновых уравнений (13), (14). С другой же стороны, это внесло ограничения на несущую частоту ω входного сигнала. Как результат, данная входная частота зависит от параметров кристалла. Эта зависимость определяется выражениями (26), (28) и (29). Более того, оказалось, что условием применимости использованного здесь стандартного приближения ММА является относительная близость несущей частоты ω входного сигнала к частоте взаимодействующего с гиперзвуком зеемановского перехода при одновременном выполнении неравенств (3).

Приведенные выше численные оценки показывают, что рассмотренный здесь двухчастотный гиперзвуковой солитон может быть обнаружен экспериментально в парамагнитном кристалле длиной в несколько сантиметров в направлении, перпендикулярном к внешнему магнитному полю, при температурах жидкого гелия.

Развитие субтерагерцовой и терагерцовой нелинейной акустики кристаллов может существенно дополнить актуальные на сегодняшний день исследования нелинейного взаимодействия с веществом терагерцового электромагнитного излучения [36–41]. В значительной степени это может коснуться, например, проводящих сред, где гиперзвуковые импульсы, в отличие от электромагнитных, не испытывают сильного поглощения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств государственного задания Национального исследовательского центра "Курчатовский институт".

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Soviet Phys.-Uspekhi **29**, 607 (1986)].
2. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
3. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
4. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
5. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
6. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
7. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001) [S. V. Voronkov and S. V. Sazonov, JETP **93**, 236 (2001)].
8. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 560 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP **96**, 496 (2003)].
9. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **77**, 464 (2003)].
10. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **136**, 67 (2009) [S. V. Sazonov, JETP **109**, 57 (2009)].
11. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ **20**, 734 (1974) [Yu. N. Karamzin and A. P. Sukhorukov, JETP Lett. **20**, 339 (1974)].
12. А. П. Сухоруков, Вестник МГУ, Сер. 3: Физика. Астрономия **6**, 32 (1996).
13. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*, Наука, М. (1988), 232 с.
14. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
15. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
16. X. Liu, K. Beckwitt, and F. Wise, Phys. Rev. E **62**, 1328 (2000).
17. R. Šuminas, G. Tamošauskas, G. Valiulis, and A. Dubietis, Opt. Lett. **41**, 2097 (2016).
18. H. Leblond, D. Kremer, and D. Mihalache, Phys. Rev. A **80**, 053812 (2009).
19. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, L. Torner, B. A. Malomed, and F. Lederer, Phys. Rev. E **62**, 7340 (2000).

20. P. Y. P. Chen and B. A. Malomed, Opt. Commun. **282**, 3804 (2009).
21. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Opt. Soc. Am. B **29**, 2741 (2012).
22. B. A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Berntson, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **56**, 4725 (1997).
23. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
24. А. П. Абрамов, И. Н. Абрамова, И. Я. Герловин, И. К. Разумова, ФТТ **27**, 18 (1985).
25. С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, УФН **162**, 3 (1992) [S. A. Akhmanov and V. E. Gusev, Phys.-Uspekhi **35**, 153 (1992)].
26. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **96**, 263 (2012)].
27. В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, М. (1991), 304 с.
28. Дж. Такер, В. Рэмптон, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М. (1975) [J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Microwave Ultrasonics in Solid State Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1972)].
29. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М. (1977).
30. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **139**, 464 (2011) [A. N. Bugai and S. V. Sazonov, JETP **112**, 401 (2011)].
31. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
32. K. Hayata and M. Koshiba, Phys. Rev. Lett. **71**, 3275 (1993).
33. С. В. Сазонов, М. В. Комиссарова, Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, JETP Lett. **111**, 320 (2020)].
34. H.-Y. Hao and H. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
35. В. Н. Беломестных, Письма в журнал технической физики **30**, 14 (2004) [V. N. Belomestnykh, Tech. Phys. Lett. **30**, 91 (2004)].
36. А. Н. Бугай, ЭЧАЯ **50**, 185 (2019) [A. N. Bugay, Physics of Particles and Nuclei **50**, 210 (2019)].
37. А. А. Дроздов, С. А. Козлов, Известия РАН. Сер. физическая **86**, 907 (2022) [A. A. Drozdov and S. A. Kozlov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 760 (2024)].
38. Б. В. Румянцев, А. В. Пушкин, Д. З. Сулейманова, Н. А. Жидовцев, Ф. В. Потемкин, Письма в ЖЭТФ **117**, 571 (2023) [B. V. Rumyantsev, A. V. Pushkin, D. Z. Suleimanova, N. A. Zhidovtsev, and F. V. Ptemkin, JETP Lett. **117**, 566 (2023)].
39. С. Ю. Стремоухов, Известия РАН. Сер. физическая **88**, 941 (2024) [S. Yu. Stremoukhov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **88**, 896 (2024)].
40. А. А. Калинович, С. В. Сазонов, Известия РАН. Сер. физическая **88**, 60 (2024) [A. A. Kalinovich and S. V. Sazonov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **88**, 49 (2024)].
41. А. В. Митрофанов, М. В. Рожко, М. М. Назаров, Н. В. Якушкин, А. А. Воронин, А. Б. Федотов, Д. А. Сидоров-Бирюков, Письма в ЖЭТФ **119**, 166 (2024) [A. V. Mitrofanov, M. V. Rozhko, M. M. Nazarov, N. V. Yakushkina, A. A. Voronina, A. B. Fedotov, and D. A. Sidorov-Biryukov, JETP Lett. **119**1, 166 (2024)].