Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 6, с. 513 – 518

Об универсальных свойствах стохастических процессов в присутствии оптимального пуассоновского перезапуска

С. Белан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", факультет физики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 ноября 2024 г.
После переработки 29 января 2025 г.
Принята к публикации 30 января 2025 г.

Пуассоновский перезапуск подразумевает, что стохастический процесс прерывается и стартует вновь в случайные моменты времени, обладающие пуассоновской статистикой. В большом числе работ было продемонстрировано, что такая процедура может минимизировать среднее время завершения в некоторых задачах случайного поиска. Более того, оказалось, что в условиях оптимально подобранной средней частоты перезапуска любой стохастический процесс независимо от его природы и статистических деталей удовлетворяет ряду универсальных соотношений на статистические моменты времени завершения. В этой статье мы описываем несколько новых универсальных свойств оптимально перезапускаемых процессов. Также мы получаем универсальное неравенство для квадратичных статистических моментов времени завершения в задаче оптимизации, где стохастический процесс имеет несколько возможных сценариев завершения.

DOI: 10.31857/S0370274X25030247, EDN: RQLBCJ

Введение. Перезапуск – резкое прерывание стохастического процесса, за которым следует старт его новой статистически независимой реализации – был предложен несколько десятилетий назад в информатике в качестве метода увеличения скорости вероятностных алгоритмов [1, 2]. Оказалось, что если флуктуации времени, требуемого для завершения рандомизированного алгоритма, достаточно велики, то перезапуск с правильно выбранной частотой повышает быстродействие алгоритма. Этот эффект имеет довольно простое объяснение: если текущая реализация рандомизированного алгоритма затянулась, то, может быть, выгоднее остановить ее и попробовать снова, нежели ждать завершения.

Позднее потенциал повышения скорости протекания случайных процессов путем их перезапуска был обнаружен в кинетике ферментативных превращений. Каждый элементарный акт ферментативной реакции начинается с обратимого связывания фермента с субстратом. С момента образования промежуточного комплекса фермент-субстрат требуется некоторое время для самого каталитического шага, в процессе которого исходный субстрат преобразуется в продукты реакции. Однако, обратимость связывания фермента с субстратом означает, что промежуточный комплекс может распасться до того как образовались продукты реакции. В последнем случае следующая попытка каталитического превращения может произойти только после того, как фермент снова соединится с каким-нибудь из имеющихся вокруг субстратов. Иными словами, диссоциация промежуточного соединения фермент-субстрат соответствует перезапуску ферментативной реакции, если рассматривать ее на уровне отдельно взятого фермента. В теоретических работах [3–6] было показано, что если промежуточный комплекс имеет несколько долгоживущих конформаций, имеющих достаточно сильно отличающиеся скорости образования продуктов реакции, то увеличение рейта распада промежуточного комплекса фермент–субстрат может вести к росту скорости реакции.

В зависимости от контекста, представляет интерес рассмотрение различных протоколов перезапуска. Скажем, в информатике чаще всего обсуждалась ситуация, когда рандомизированный алгоритм перезапускается согласно некоторому заранее заданному расписанию [7–15]. Напротив, в случае химических трансформаций, события перезапуска происходят в случайные моменты времени, так как распад промежуточного комплекса фермент–субстрат связан с тепловыми флуктуациями, см., например, [3–6].

Среди множества возможных типов перезапуска, наиболее подробно в литературе исследовался пуассоновский перезапуск: стохастический перезапуск в

1)e-mail: sergb27@yandex.ru

случайные моменты времени, имеющие пуассоновскую статистику, см., например, [16–27].

Среднее значение случайного времени завершения T_r процесса, перезапускаемого с рейтом (т.е. средней частотой) r дается простой формулой [5]

$$\langle T_r \rangle = \frac{1 - \tilde{P}(r)}{r\tilde{P}(r)}, \qquad (1)$$

где $\tilde{P}(r) = \int_0^\infty dT P(T) e^{-rT}$ – это преобразование Лапласа плотности вероятности $P(T)$ в отсутствии перезапуска.

Работа Эванса и Маджумдара показала, что для одномерного диффузионного процесса поиска существует оптимальная средняя частота $r_* > 0$ пуассоновского перезапуска, минимизирущая математическое ожидание времени завершения. Вслед за этим, возможность аналогичной оптимизации была показана для многих других задач случайного поиска [18–20, 25–43]. Обобщая наблюдения, сделанные в частных случаях, в работе [5] Ревени строго показал, что любой стохастический процесс, для которого существует ненулевая оптимальная средняя частота r_* пуассоновского перезапуска, удовлетворяет универсальному соотношению

$$\frac{\sigma(T_{r_*})}{\langle T_{r_*} \rangle} = 1, \qquad (2)$$

где $\langle T_{r_*} \rangle$ и $\sigma(T_{r_*})$ – это средние значение и среднеквадратичное отклонение времени завершения рассматриваемого процесса в присутствии оптимального перезапуска.

Далее, в недавней публикации [44] было продемонстрировано, что оптимально перезапускаемые процессы также подчиняются следующему универсальному неравенству

$$\frac{\langle T_{r_*}^3 \rangle}{\langle T_{r_*} \rangle^3} \geq 6. \qquad (3)$$

Из результатов той же работы следует, что среднее время завершения случайного процесса в присутствии оптимального пуассоновского перезапуска не превышает четверти среднего геометрического времени завершения того же процесса в отсутствии перезапуска, т.е.

$$\langle T_{r_*} \rangle \geq \frac{1}{4} \langle T^{-1} \rangle^{-1}. \qquad (4)$$

Далее, если в отсутствии перезапуска случайное время завершения T имеет одновершинную плотность распределения вероятности $P(T)$, то справедливо неравенство [44]

$$\langle T_{r_*} \rangle \geq \frac{1}{4} M, \qquad (5)$$

где M – это вершина распределения, т.е. значение случайной величины T, реализующееся наиболее часто.

Отметим, что соотношения (2) и (3) являются следствием условий экстремальности $d\langle T_r \rangle / dr|_{r=r_*} = 0$ и $d^2 \langle T_r \rangle / dr^2|_{r=r_*} \geq 0$ соответственно. Что касается уравнений (4) и (5), то они справедливы не только для пуассоновского случая, но и для любой другой стратегии перезапуска. Доказательство этих результатов основано на особых свойствах периодического перезапуска, детали можно найти в работе [44].

Будучи нечувствительными к деталям конкретного процесса, соотношения (2), (3), (4) и (5) дают модельно-независимые предсказания касательно статистических характеристик случайных процессов самой различной природы в условиях оптимального пуассоновского перезапуска.

В этой работе мы выводим ряд новых соотношений, отражающих универсальность некоторых свойств оптимально перезапускаемых процессов. Более конкретно, мы получаем нижнюю границу для оптимального рейта перезапуска, верхнюю границу для результирующего среднего времени завершения, и нижнюю границу на коэффициенты эксцесса и асимметрии функции распределения случайного времени завершения. Помимо этого, мы выводим универсальное неравенство в задаче оптимизации вероятности успеха для процесса с двумя альтернативными сценариями завершения.

Нижняя граница на оптимальный рейт перезапуска. Если известно распределение $P(T)$, то минимизируя по r среднее время завершения $\langle T_r \rangle$, которое дается уравнением (1), можно определить оптимальный рейт перезапуска r_*. В ряде случаев, перечисленных в работе [4], такая задача имеет точное или приближенное аналитическое решение.

Возможно ли оценить оптимальную среднюю частоту r_*, не зная детальной статистики перезапускаемого процесса? Покажем, что на основе информации о первых трех статистических моментах $\langle T \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ и $\langle T^3 \rangle$ (предполагается, что таковые существуют) можно сконструировать нижнюю границу для r_*. Итак, из (1) мы находим:

$$\frac{d\langle T_r \rangle}{dr} = \frac{\tilde{P}^2(r) - \tilde{P}(r) - r\partial_r \tilde{P}(r)}{r^2 \tilde{P}^2(r)}. \qquad (6)$$

Оценивая Лаплас-образ и его производную при помощи неравенств $\tilde{P}(r) \leq 1 - r\langle T \rangle + \frac{r^2}{2} \langle T^2 \rangle$ [45] и

$\partial_r \tilde{P}(r) \geq -\langle T\rangle + r\langle T^2\rangle - \frac{r^2}{2}\langle T^3\rangle$ [44], мы можем записать

$$\frac{d\langle T_r\rangle}{dr} \leq \frac{(\frac{r}{2}\langle T^2\rangle - \langle T\rangle)^2 + \frac{r}{2}\langle T^3\rangle - \frac{1}{2}\langle T^2\rangle}{r^2\tilde{P}^2(r)}. \quad (7)$$

Далее, решая уравнение $(\frac{r}{2}\langle T^2\rangle - \langle T\rangle)^2 + \frac{r}{2}\langle T^3\rangle - \frac{1}{2}\langle T^2\rangle \leq 0$ относительно r, мы находим, что при $\sigma(T) > \langle T\rangle$ среднее время завершения $\langle T_r\rangle$ гарантированно убывает на интервале $0 < r < \sqrt{\frac{\langle T^3\rangle^2}{\langle T^2\rangle^4} - \frac{4\langle T\rangle\langle T^3\rangle}{\langle T^2\rangle^3} + \frac{2}{\langle T^2\rangle}} - \frac{\langle T^3\rangle}{\langle T^2\rangle^2} + \frac{2\langle T\rangle}{\langle T^2\rangle}$. Отсюда заключаем, что

$$r_* \geq \sqrt{\frac{\langle T^3\rangle^2}{\langle T^2\rangle^4} - \frac{4\langle T\rangle\langle T^3\rangle}{\langle T^2\rangle^3} + \frac{2}{\langle T^2\rangle}} - \frac{\langle T^3\rangle}{\langle T^2\rangle^2} + \frac{2\langle T\rangle}{\langle T^2\rangle}. \quad (8)$$

Обсудим область применимости этого результата. Неравенство $\sigma(T) > \langle T\rangle$, использованное при выводе ур. (8) представляет собой достаточное (но не необходимое) условие эффективности пуассоновского перезапуска [4, 5, 23]. Это условие гарантирует, что выражение в правой части ур. (8) вещественно и положительно. Таким образом, формула (8) не может быть использована в случаях, когда $\sigma(T) < \langle T\rangle$, но тем не менее существует ненулевой рейт перезапуска, при котором достигается глобальный минимум $\langle T_r\rangle$. Простой пример такого процесса дается следующей функцией плотности вероятности $P(T) = 0.5e^{-rT} + 0.5e^{-10rT}$. Далее, формула (8) неприменима, когда по крайней мере один из статистических моментов $\langle T\rangle$, $\langle T^2\rangle$ или $\langle T^3\rangle$ расходится. Последнее имеет место для распределений с достаточно тяжелыми "хвостами" распределения времени завершения, что свойственно многим вероятностным алгоритмам и процессам случайного поиска. Несмотря на отмеченные ограничения, неравенство (8), насколько нам известно, представляет собой первый строгий результат, позволяющий оценить снизу оптимальный рейт перезапуска, опираясь на информацию о конечном наборе статистических характеристик исходного процесса.

Возможно ли в дополнение к нижней границе (8) построить оценку сверху в форме $r_* \leq r_{\rm up}$, где $r_{\rm up}$ выражается через первые три момента $\langle T\rangle$, $\langle T\rangle$ и $\langle T^3\rangle$? Ответ на этот вопрос отрицательный, поскольку при фиксированных значениях указанных моментов оптимальный рейт r_* может быть сколь угодно большим, как это видно на следующем примере. Рассмотрим плотность вероятности $P(T) = p\delta(T - t_1) + (1 - p)\delta(T - t_2)$, где $t_2 = \frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu}$, $p = \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$, и $t_1 \to 0$. Легко проверить, что $\langle T\rangle = \mu$, $\langle T^2\rangle = \sigma^2 + \mu^2$ и $\langle T^3\rangle = \frac{(\mu^2+\sigma^2)^2}{\mu}$. Как следует из (1), если $\sigma > \mu$, то существует оптимальное значение $r_* \sim t_1^{-1} \to +\infty$, при котором $\langle T_r\rangle$ достигает минимума $\langle T_{r_*}\rangle$. Таким образом, задание тройки $(\langle T\rangle,\langle T^2\rangle,\langle T^3\rangle)$ не влечет за собой никакой нетривиальной верхней границы для r_*.

Границы на среднее время завершения в условиях оптимального перезапуска. В дополнение к ранее известному неравенству (4), задающему нижнюю границу на $\langle T_{r_*}\rangle$, возможно также определить верхний предел. Как было показано в работе [46], если выполнено условие $\sigma(T) > \langle T\rangle$, то перезапуск с рейтом $r_0 = \frac{1}{\langle T\rangle} - \sqrt{\frac{1}{\langle T\rangle^2} - \frac{3\langle T^2\rangle}{\langle T\rangle\langle T^3\rangle} + \frac{6\langle T\rangle}{\langle T^3\rangle}}$ гарантировано уменьшает среднее время завершения процесса, и при этом $\langle T_{r_0}\rangle \leq \frac{3\langle T^2\rangle - 2\langle T^3\rangle r_0}{6\langle T\rangle}$. По определению оптимальной средней частоты для любого $r \geq 0$ справедливо $\langle T_{r_*}\rangle \leq \langle T_r\rangle$, что означает

$$\langle T_{r_*}\rangle \leq \frac{\langle T^2\rangle}{2\langle T\rangle} - \frac{\langle T^3\rangle}{3\langle T\rangle^2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\langle T^3\rangle^2}{\langle T\rangle^4} - \frac{3\langle T^2\rangle\langle T^3\rangle}{\langle T\rangle^3} + \frac{6\langle T^3\rangle}{\langle T\rangle}}. \quad (9)$$

Это и есть анонсированное выше ограничение сверху на среднее время завершения в присутствии оптимального пуассоновского перезапуска. Подчеркнем, что выражение в правой части (9) не превышает $\langle T\rangle$, если выполнено достаточное условие эффективности перезапуска $\sigma(T) > \langle T\rangle$.

Как и формула (8), соотношение (9) становится неинформативным в ситуации, когда один или несколько из первых трех статистических моментов не существуют. В этой связи представляет интерес построение верхней границы на $\langle T_{r_*}\rangle$, которая хорошо определена для любого процесса. Покажем, что такая граница может быть выражена через медианное время завершения исходного процесса m, определенное через равенство $\int_0^m P(T)dT = 1/2$.

Поскольку $1 - \tilde{P}(r) < 1$ и $\tilde{P}(r) \geq \int_0^{r^{-1}} P(T)e^{-rT}dT \geq e^{-1}\int_0^{r^{-1}} P(T)dT$, то, учитывая ур. (1), мы находим $\langle T_r\rangle < \frac{e}{r\int_0^{r^{-1}} P(T)dT}$. Подставляя $r = m^{-1}$ и вспоминая, что $\langle T_{r_*}\rangle \leq \langle T_r\rangle$ для любого $r \geq 0$, окончательно получаем неравенство

$$\langle T_{r_*}\rangle \leq 2em. \quad (10)$$

Заметим, что в работе [44] схожий результат был получен для периодического перезапуска: $\langle T_{\tau_*}\rangle \leq 2m$, где T_τ – это случайное время завершения процесса, перезапускаемого каждые τ единиц времени, а $\tau_* \geq 0$ – это оптимальный период перезапуска, минимизирующий среднее время завершения.

Неравенство (10) позволяет сформулировать новое достаточное условие эффективности пуассоновского перезапуска. А именно, если

$$\langle T \rangle > 2em, \tag{11}$$

то нулевая средняя частота $r = 0$ не может быть оптимальной, и, следовательно, существует значение $r_* > 0$, которое сокращает математическое ожидание времени завершения процесса. Легко увидеть, что этот критерий не эквивалентен вышеобозначенному достаточному условию $\sigma(T) > \langle T \rangle$. В самом деле, если $P(T) = 0.6e^{-rT} + 0.4e^{-10rT}$, то $\langle T \rangle > 2em$, в то время как $\sigma(T) < \langle T \rangle$.

Заметим также, что из (11) следует простой конструктивный критерий [46] эффективности перезапуска: если выполнено неравенство $\langle T \rangle > 2em$, то любое значение r, принадлежащее интервалу $2e\langle T \rangle^{-1} \le r \le m^{-1}$, ведет к сокращению среднего времени завершения.

Нижняя оценка для коэффициентов асимметрии и эксцесса плотности распределения случайного времени T_{r_*}. Как показали предыдущие исследования, в условиях оптимально подобранной средней частоты перезапуска различные процессы становятся похожими друг на друга [5]. А именно, при оптимальном рейте r_* относительная флуктуация времени завершения любого процесса равна единице, см. ур. (2). Можно вспомнить, что единичная относительная флуктуация – это свойство экспоненциально распределенных случайных величин. Этот факт в совокупности с наблюдением, что пуассоновский перезапуск превращает степенные "хвосты" плотности вероятности времени завершения в экспоненциально затухающие [18], может показаться указанием на экспоненциальность статистики любого стохастического процесса, перезапускаемого с оптимальным рейтом. Этот вывод, однако, опровергается контрпримерами, см. [5].

Полная статистика случайной переменной T_{r_*} оказывается неуниверсальной. Ее интегральные характеристики тем не менее заключены в хорошо определенных пределах. Введем двумерное конфигурационное пространство, где каждый закон распределения характеризуется двумя параметрами: коэффициентами асимметрии и эксцесса, которые определены как стандартизованные моменты

$$A_r = \frac{\langle (T_r - \langle T_r \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3(T_r)}, \tag{12}$$

и

$$K_r = \frac{\langle (T_r - \langle T_r \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4(T_r)} \tag{13}$$

соответственно. Первая из этих метрик играет роль степени асимметрии одновершинной плотности вероятности относительно среднего значения. Вторая метрика количественно характеризует степень экстремальности отклонений случайной величины от ее среднего значения. В описательной статистике коэффициенты асимметрии и эксцесса часто используются, чтобы оценить возможные отклонения статистики исследуемых данных от нормальной. В силу сказанного выше, в нашей задаче более интересно вести сравнение со случаем экспоненциальной статистики, в котором $A_{\exp} = 2$ и $K_{\exp} = 9$ [47, 48]. Отметим, что для полунормального распределения $A \approx 1$ и $K_{\mathrm{norm}} \approx 3.87$, в то время как в общем случае $-\infty < A < \infty$, $K \ge A^2 + 1$ [47, 48].

Продемонстрируем, что соотношения (2) и (3) накладывают ограничение снизу на A_{r_*} и K_{r_*}. В самом деле, из (2), (3) и (12) мы находим

$$A_{r_*} = \frac{\langle T_{r_*}^3 \rangle - 3\langle T_{r_*} \rangle \sigma^2(T_{r_*}) - \langle T_{r_*} \rangle^3}{\sigma^3(T_{r_*})} \ge 2. \tag{14}$$

Далее, при $r = r_*$ в силу неравенства $K_r \ge A_r^2 + 1$ и ур. (14) получаем

$$K_{r_*} \ge 5. \tag{15}$$

Оптимизация вероятности успеха. Помимо оптимизации среднего времени завершения, стохастический перезапуск может быть также использован для контроля вероятности получения желаемого исхода случайного процесса, обладающего двумя альтернативными сценариями завершения – успех и неудача [49–53]. При оптимально подобранном рейте перезапуска r_*, минимизирующем вероятность успеха p_r, справедливо следуюшее универсальное соотношение (см. [49])

$$\langle T_{r_*}^s \rangle = \langle T_{r_*}^f \rangle, \tag{16}$$

где $\langle T_{r_*}^s \rangle$ и $\langle T_{r_*}^f \rangle$ обозначают среднее время завершения соответственно успешных и неуспешных реализаций процесса. Ниже мы показываем, что в дополнение к ур. (16), в условиях оптимального перезапуска также справедливо следующее неравенство для квадратичных моментов времени завершения

$$\langle T_{r_*}^{s\,2} \rangle \le \langle T_{r_*}^{f\,2} \rangle. \tag{17}$$

Итак, выведем ур. (17). Функция распределения плотности вероятности случайного процесса с двумя альтернативами завершения может быть представлена как $P(T) = P^s(T) + P^f(T)$, где слагаемые $P^s(T)$ и $P^f(T)$ соответствуют вкладам успешных и неуспешных попыток соответственно. В отсутствии перезапуска вероятность успеха тогда выражается как $p = \int_0^\infty P^s(T)dT$, а среднее время завершения успешных реализаций процесса есть $\langle T^s \rangle = p^{-1} \int_0^\infty P^s(T) T dT$. В присутствии стохастического перезапуска с рейтом r, вероятность успеха становится равной (см. [49])

$$p_r = \frac{\tilde{P}^s(r)}{\tilde{P}(r)}. \qquad (18)$$

Здесь $\tilde{P}^s(r)$ и $\tilde{P}(r)$ обозначают Лаплас-образы функций $P^s(T)$ и $P(T)$. Соотношение (16) следует из ур. (18) и условия экстремальности $dp_r/dr|_{r=r_*} = 0$.

Предположим теперь, что к процессу, который уже перезапускается с оптимальным рейтом r_*, дополнительно применяется перезапуск с дифференциально малым рейтом δr. Благодаря аддитивности потоков событий с пуассоновской статистикой и условию $dp_r/dr|_{r=r_*} = 0$, можно тогда записать

$$p_{r_*+\delta r} = p_{r_*} + \frac{\delta r^2}{2}\frac{d^2 p_r}{dr^2}|_{r_*} + o(\delta r^2). \qquad (19)$$

В то же время из (18) мы находим

$$p_{r_*+\delta r} = \frac{\tilde{P}^s_{r_*}(\delta r)}{\tilde{P}_{r_*}(\delta r)} = \frac{\int_0^\infty dT e^{-\delta r T} P^s_{r_*}(T)}{\int_0^\infty dT e^{-\delta r T} P_{r_*}(T)} = \qquad (20)$$

$$= \frac{1 - \delta r\langle T^s_{r_*}\rangle + \frac{\delta r^2}{2}\langle T^{s2}_{r_*}\rangle + o(\delta r^2)}{1 - \delta r\langle T_{r_*}\rangle + \frac{\delta r^2}{2}\langle T^2_{r_*}\rangle + o(\delta r^2)} p = \qquad (21)$$

$$= p_{r_*} + \frac{\delta r^2}{2} p_{r_*}(1-p_{r_*})(\langle T^{s\ 2}_{r_*}\rangle - \langle T^{f\ 2}_{r_*}\rangle) + \qquad (22)$$

$$+ o(\delta r^2), \qquad (23)$$

где $\tilde{P}_{r_*}(r)$ и $\tilde{P}^s_{r_*}(r)$ обозначают преобразования Лапласа функций распределения времени завершения $P_{r_*}(T)$ и $P^s_{r_*}(T)$ в присутствии рейта перезапуска r_* и мы использовали очевидное тождество $\langle T^2_r\rangle = p\langle T^{s2}_r\rangle + (1-p)\langle T^{f\,2}_r\rangle$. Сравнивая (19) и (22), мы находим $d^2p_r/dr^2|_{r=r_*} = p_{r_*}(1-p_{r_*})(\langle T^{s\ 2}_{r_*}\rangle - \langle T^{f\ 2}_{r_*}\rangle)/2$. Точка максимума удовлетворяет условию $d^2p_r/dr^2|_{r=r_*} \le 0$, которое немедленно приводит к ур. (17). Таким образом, в условиях оптимального перезапуска, время завершения успешных реализаций процесса в сравнении с неуспешными реализациями характеризуется относительно меньшими флуктуациями.

Если случайный эксперимент с двумя альтернативными исходами повторяется снова и снова, то метрикой, которую следует оптимизировать, является темп получения желаемых исходов ν_r, а не вероятность успеха в отдельном испытании p_r. Указанная метрика дается формулой

$$\nu_r = \frac{N^s_r(t)}{t}, \qquad (24)$$

в которой $N^s_r(t)$ – это число успешных реализаций $N^s_r(t)$ за достаточно большой интервал времени $t \gg \langle T\rangle$. Благодаря закону больших чисел, $N^s_r = p_r N_r$ и $t = N_r(t)\langle T\rangle$, где $N(t)$ – это полное число реализаций за время t, так что

$$\nu_r = \frac{p_r}{\langle T\rangle}. \qquad (25)$$

Далее, подставляя соотношения (1) и (18) в (25), мы получаем

$$\nu_r = \frac{r\tilde{P}^s(r)}{1-\tilde{P}^s(r)}. \qquad (26)$$

Если r_* – это оптимальный рейт перезапуска, обеспечивающий максимальное значение для ν_r, то

$$\nu_{r_*+\delta r} = \frac{\delta r\tilde{P}^s_{r_*}(\delta r)}{1-\tilde{P}^s_{r_*}(\delta r)} = \qquad (27)$$

$$= \frac{1 - \delta r\langle T^s_{r_*}\rangle + \frac{\delta r^2}{2}\langle T^{s2}_{r_*}\rangle + o(\delta r^2)}{1 - \frac{\delta r}{2}\frac{\langle T^2_{r_*}\rangle}{\langle T_{r_*}\rangle} + \frac{\delta r^2}{6}\frac{\langle T^3_{r_*}\rangle}{\langle T_{r_*}\rangle} + o(\delta r^2)} \frac{p_{r_*}}{\langle T_{r_*}\rangle} = \qquad (28)$$

$$= \left[1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\langle T^2_r\rangle}{\langle T_r\rangle} - \langle T^s_r\rangle\right)\delta r + \right. \qquad (29)$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\frac{\langle T^2_r\rangle^2}{\langle T_r\rangle^2} - \frac{1}{2}\frac{\langle T^2_r\rangle\langle T^s_r\rangle}{\langle T_r\rangle} + \frac{1}{2}\langle T^{s2}_r\rangle - \right. \qquad (30)$$

$$\left. \left. - \frac{1}{6}\frac{\langle T^3_r\rangle}{\langle T_r\rangle}\right)\delta r^2 + o(\delta r^2)\right]\frac{p_{r_*}}{\langle T_{r_*}\rangle}. \qquad (31)$$

Накладывая условия $d\nu_r/dr|_{r=r_*} = 0$ и $d^2\nu_r/dr^2|_{r=r_*} \le 0$, мы легко находим равенство

$$\langle T^s_{r_*}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\langle T^2_{r_*}\rangle}{\langle T_{r_*}\rangle}, \qquad (32)$$

и неравенство

$$\langle T^s_{r_*}\rangle^2 \le \frac{1}{3}\frac{\langle T^3_{r_*}\rangle}{\langle T_{r_*}\rangle}. \qquad (33)$$

Заключение. Наш анализ вносит вклад в описание универсальных черт, присущих случайным процессам в присутствии оптимального пуассоновского перезапуска. Основные результаты работы даются формулами (8), (9), (10), (14), (15) и (17). Полезным следствием этих результатов служит новый критерий эффективности пуассоновского перезапуска, см. ур. (11). Будущие исследования должны ответить на вопрос, достигаются ли границы, диктуемые полученными здесь неравенствами. Кроме того, с практической точки зрения важным является вопрос о том, как представленные выводы изменятся, если учесть ненулевое время, требуемое для перезапуска процесса.

Финансирование работы. Работа была поддержана Российским научным фондом (РНФ), проект 22-72-10052.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. H. Alt, L. Guibas, K. Mehlhorn, R. Karp, and A. Wigderson, Technical Report TR-91-057 (1991).
2. M. Luby, A. Sinclair, and D. Zuckerman, Inf. Process. Lett. **47**, 173 (1993).
3. S. Reuveni, M. Urbakh, and J. Klafter, Proceedings of the National Academy of Sciences **111**, 4391 (2014).
4. T. Rotbart, S. Reuveni, and M. Urbakh, Phys. Rev. E **92**, 060101 (2015).
5. S. Reuveni, Phys. Rev. Lett. **116**, 170601 (2016).
6. A.M. Berezhkovskii, L. Dagdug, and S.M. Bezrukov, J. Chem. Phys. **147** (2017).
7. H. Wu and P. Beek, in *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2007), p. 81.
8. J. Lorenz, in *International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics* (2018), p. 493.
9. J. Lorenz, Theory of Computing Systems **65**, 1143 (2021).
10. C. Schulte, G. Tack, and M.Z. Lagerkvist, *Modeling and programming with gecode*, Gecode (2010), p. 160.
11. A. Cire, S. Kadioglu, and M. Sellmann, in *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, AAAI, Washington, DC (2014), v. 28.
12. R. Amadini, M. Gabbrielli, and J. Mauro, Theory and Practice of Logic Programming **18**, 81 (2018).
13. A.P. van Moorsel and K. Wolter, IEEE Trans. Softw. Eng. **32**, 547 (2006).
14. M. Wallace, *Building decision support systems: using MiniZinc*, Springer (2020), p. 165.
15. M. Schroeder and L. Buro, in *Proceedings of the Workshop on Infrastructure for Agents, MAS, and Scalable MAS at the Conference Autonomous Agents* (2001).
16. M. Evans and S. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **106**, 160601 (2011).
17. M.R. Evans, S.N. Majumdar, and G. Schehr, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 193001 (2020).
18. M.R. Evans and S.N. Majumdar, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **44**, 435001 (2011).
19. M.R. Evans and S.N. Majumdar, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 285001 (2014).
20. M.R. Evans and S.N. Majumdar, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51**, 475003 (2018).
21. O. Blumer, S. Reuveni, and B. Hirshberg, Nat. Commun. **15**, 240 (2024).
22. P. Julián-Salgado, L. Dagdug, and D. Boyer, Phys. Rev. E **109**, 024134 (2024).
23. A. Pal, S. Kostinski, and S. Reuveni, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 021001 (2022).
24. A. Pal and V. Prasad, Phys. Rev. E **99**, 032123 (2019).
25. O.L. Bonomo and A. Pal, Phys. Rev. E **103**, 052129 (2021).
26. S. Ray and S. Reuveni, J. Chem. Phys. **152**, 234110 (2020).
27. S. Ray, D. Mondal, and S. Reuveni, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **52**, 255002 (2019).
28. J. Whitehouse, M.R. Evans, and S.N. Majumdar, Phys. Rev. E **87**, 022118 (2013).
29. L. Kusmierz, S.N. Majumdar, S. Sabhapandit, and G. Schehr, Phys, Rev. Lett. **113**, 220602 (2014).
30. Ł. Kuśmierz and E. Gudowska-Nowak, Phys. Rev. E **92**, 052127 (2015).
31. P. Singh, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 405005 (2020).
32. S. Ahmad and D. Das, Phys. Rev. E **102**, 032145 (2020).
33. M. Radice, Phys. Rev. E **104**, 044126 (2021).
34. F. Faisant, B. Besga, A. Petrosyan, S. Ciliberto, and S.N. Majumdar, J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2021**, 113203 (2021).
35. I. Abdoli and A. Sharma, Soft Matter **17**, 1307 (2021).
36. I. Santra, U. Basu, and S. Sabhapandit, J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2020**, 113206 (2020).
37. G.R. Calvert and M.R. Evans, Eur. Phys. J. B **94**, 1 (2021).
38. G. Mercado-Vásquez and D. Boyer, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **54**, 444002 (2021).
39. G. Tucci, A. Gambassi, S.N. Majumdar, and G. Schehr, Phys. Rev. E **106**, 044127 (2022).
40. H. Chen and F. Huang, Phys. Rev. E **105**, 034109 (2022).
41. S. Ahmad, K. Rijal, and D. Das, Phys. Rev. E **105**, 044134 (2022).
42. A. Pal, V. Stojkoski, and T. Sandev, in *Target Search Problems*, Springer, N.Y. (2024), p. 323.
43. M. Radice, Phys. Rev. E **107**, 024136 (2023).
44. D. Starkov and S. Belan, Phys. Rev. E **107**, L062101 (2023).
45. A. Zubkov, Theory Probab. Appl. **43**, 676 (1999).
46. I. Nikitin and S. Belan, Phys. Rev. E **109**, 054117 (2024).
47. K. Pearson, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character **216**, 429 (1916).
48. R. Sharma and R. Bhandari, Rocky Mountain J. Math. **45**(5), 1639 (2015).
49. S. Belan, Phys. Rev. Lett. **120**, 080601 (2018).
50. A. Pal and V. Prasad, Phys. Rev. E **99**, 032123 (2019).
51. R. Singh, T. Sandev, and S. Singh, in *Target Search Problems*, Springer, N.Y. (2024), p. 323.
52. A. Chechkin and I. Sokolov, Phys. Rev. Lett. **121**, 050601 (2018).
53. R. Singh, T. Sandev, and S. Singh, Phys. Rev. E **108**, L052106 (2023).