Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.12, стр.673 - 675 25 июня 1992 г.

ПЛОТНАЯ (2+1)-МЕРНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вад.Ю.Цейтлин

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
117924, Москва

Поступила в редакцию 30 апреля 1992 г.

Вычислено эффективное действие КЭД$_{2+1}$ с ненулевым химическим потенциалом во внешнем магнитном поле. Показано, что условие электронейтральности $\frac{\partial L}{\partial \mu}=0$ имеет множество решений, и когда оно выполнено, минимум плотности энергии $\mathcal{E}$ достигается при $B \neq 0$.

Последнее время большое внимание привлекает изучение квантовой теории поля в (2+1)-мерном пространстве [1]. Интерес подогревается тем, что в рамках планарной теории можно описать некоторые реальные эффекты в твердых телах, такие, как дробный эффект Холла [2] и высокотемпературную сверхпроводимость [3]. Так как ненулевая плотность зарядов и наличие магнитного поля при этом существенны, нам представляется небезынтересным изучение (2+1)-мерной электродинамики (КЭД$_{2+1}$) с отличным от нуля химическим потенциалом во внешнем магнитном поле.

Плотная КЭД$_{2+1}$ описывается лагранжианом[1)]

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\bar{\psi}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu-m)\psi \tag{1}$$

где μ-химический потенциал, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$, $\not{A}=A_\mu\gamma^\mu$, $\gamma_0=\sigma_3$, $\gamma_{1,2}=\imath\sigma_{1,2}$, σ_i - матрицы Паули.

Мы остановимся на вычислении однопетлевого эффективного действия S^{eff} плотной КЭД$_{2+1}$

$$\begin{aligned}
&S^{eff}=-\imath\ln\mathrm{Det}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu-m)=\\
&-\tfrac{1}{2}(\ln\mathrm{Det}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu-m)+\ln\mathrm{Det}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu+m))-\\
&-\ \tfrac{1}{2}(\ln\mathrm{Det}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu-m)-\ln\mathrm{Det}(\imath\not{\partial}-e\not{A}-\gamma_0\mu+m))=\\
&S^{eff}_{even}+S^{eff}_{odd}
\end{aligned} \tag{2}$$

[1)] Сюда может быть добавлен черн-саймоновский член $\frac{\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\mu\nu}A^\alpha$ [1]

во внешнем магнитном поле B, задаваемом вектор-потенциалом $A_0 = A_2 = 0$, $A_1 = x_2 B$ (подчеркнем, что второе слагаемое в правой части (2) в КЭД$_{2+1}$ нарушает P- и T-четность [1,4,5]).

Для вычисления $S^{eff}_{even} = \int d^3x L^{eff}_{even}$ можно непосредственно использовать метод собственного времени Фока-Швингера, модифицированный на случай плотной среды [6]:

$$L^{eff}_{even} = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-m^2 s}(eBs\coth(eBs) - 1) \tag{3}$$

(L^{eff}_{even} не зависит от μ и совпадает с полученным в [4] при $\mu = 0$).

Чтобы вычислить $S^{eff}_{odd} = \int d^3x L^{eff}_{odd}$ найдем вначале ток $\int d^3x I_\mu = \frac{\delta S}{\delta A^\mu}$, а затем восстановим соответствующий член в действии [4]. Ток можно выразить через функцию Грина фермиона $G(x, y)$:

$$\int d^3x I_\mu = \frac{\delta S}{\delta A^\mu} = \imath e \mathrm{Tr}(\gamma_\mu G(x = y)) = \frac{\imath e}{(2\pi)^3} \int d^3p Tr \gamma_\mu G(p) \tag{4}$$

которая для плотной КЭД$_{2+1}$ во внешнем магнитном поле B имеет вид[2)]

$$\begin{aligned} &G(p, \mu) = \\ &-\imath\theta((p_0 - \mu)\mathrm{sign}p_0) \int\limits_0^\infty ds\{\not p' + m - (\gamma^1 p_2 - \gamma^2 p_1)\tan(eBs)\}\times \\ &\times(1 - \imath\sigma_3 \tan(eBs)) \exp\{\imath s(p'^2_0 - \vec p^2 \tfrac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2 + \imath\varepsilon)\} + \\ &+\imath\theta(-(p_0 - \mu)\mathrm{sign}p_0) \int\limits_0^\infty ds\{\not p' + m + (\gamma^1 p_2 - \gamma^2 p_1)\tan(eBs)\}\times \\ &\times(1 + \imath\sigma_3 \tan(eBs)) \exp\{-\imath s(p'^2_0 - \vec p^2 \tfrac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2 - \imath\varepsilon)\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $p' = (p_0 - \mu, \vec p)$, а 1 - единичная диагональная матрица 2×2.

Легко видеть, что после интегрирования по $\vec p$ пространственные компоненты тока I_j обращаются в ноль. Вместо I_0 рассмотрим фермионную плотность $\rho(B, \mu) = \frac{\partial L}{\partial \mu}$, отличающуюся от I_0 множителем e. Используя (5), получаем:

$$\begin{aligned} &\rho(B, \mu) = \\ &\rho(B) + \tfrac{1}{4\pi^3} \int\limits_0^\mu dx \int \vec p \int_0^\infty ds\{(x + \imath m \mathrm{tg}(eBs)) \exp\{\imath s(x^2 - \vec p^2 \tfrac{\mathrm{tg}(eBs)}{eBs} - m^2 + \imath\varepsilon)\} + \\ &+(x - \imath m tg(eBs)) \exp\{-\imath s(x^2 - \vec p^2 \tfrac{tg(eBs)}{eBs} - m^2 - \imath\varepsilon)\}\} \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\rho(B)$ соответствует аномальному току, возникающему в КЭД$_{2+1}$ во внешнем поле [4,7], и связанному с асимметрией спектра фермионов, $\rho(B) = \frac{eB}{4\pi}$ (функция Грина фермиона в КЭД$_{2+1}$ при $\mu = 0$ имеет полюсы при $p_0 = -m$, $p_0 = \pm(m^2 + 2eBn)^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$[8]; здесь и далее считается, что $eB, m > 0$).

Вычисляя интеграл в (6), приходим к окончательному ответу:

$$\rho(B, \mu) = \frac{eB}{4\pi} + \frac{\mu^2 - m^2}{4\pi}\theta(|\mu| - m) sign \mu + n\frac{eB}{2\pi} \tag{7}$$

где

$$n = \begin{cases} -1 - [\frac{\mu^2 - m^2}{2eB}], & \mu > m; \\ 0, & |\mu| < m; \\ [\frac{\mu^2 - m^2}{2eB}], & \mu < -m. \end{cases} \tag{8}$$

[2)]При ненулевом химическом потенциале изменяется правило обхода полюсов функции Грина и соответствующее обобщение является нетривиальной задачей [6]

([...] означает целую часть числа).

Последний член в (7) возникает при обходе полюсов в подынтегральном выражении в (6), совпадающих с полюсами функции Грина при $\mu = 0$ [8] (выражение (7) можно также получить, используя метод, развитый Ниеми [9]).

Важным следствием из (7),(8) является то, что в КЭД$_{2+1}$ возможна ситуация, когда среда электронейтральна, $\frac{\partial L}{\partial \mu} = \rho = 0$, при отличном от нуля химическом потенциале, а именно $\mu = \pm(m^2 + (2n+1)eB)^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Восстанавливая L^{eff}_{odd}, получаем, что, например, для $m < \mu < (m^2 + 2eB)^{1/2}$,

$$L^{eff}_{odd} = \frac{1}{4\pi}\left(eBm + \frac{\mu^3 - m^3}{3} - m^2(\mu - m) - eB(\mu - m)\right). \qquad (9)$$

Наложив теперь условие электронейтральности $\mu^2 - m^2 = eB$ и перейдя к пределу $\frac{eB}{m^2} \ll 1$ (что необходимо для вычисления интеграла в (3)), получаем следующее выражение для эффективного лагранжиана:

$$L^{eff} = \frac{e^2}{m}\frac{B^2}{24\pi} + \frac{eBm}{4\pi}. \qquad (10)$$

Плотность энергии, соответственно, равна:

$$\mathcal{E}(B) = -L = -L^{classical} - L^{eff} = \frac{B^2}{2}\left(1 - \frac{e^2}{12\pi m}\right) - \frac{|eB|m}{4\pi} \qquad (11)$$

Из (11) следует, что минимум энергии достигается при $B \approx \pm\frac{em}{4\pi}$ и $\mathcal{E}_{min} = -\frac{e^2m^2}{32\pi^2} < 0$, что говорит о возникновении намагниченности.

Выше была рассмотрена только одно решение уравнения электронейтральности, но аналогичный анализ может быть проведен для каждого решения. При этом величина $\mathcal{E}_{min}$ всюду одинакова, что объясняется тем, что в используемом приближении член $\frac{eBm}{4\pi}$ доминирует в L^{eff}_{odd}.

Таким образом, мы показали, что в плотной КЭД$_{2+1}$, помещенной во внешнее магнитное поле возможна ситуация, когда несмотря на то, что $\mu \neq 0$ среда электрически нейтральна, а минимум энергии достигается при $B \neq 0$.

Автор глубоко признателен И.А.Баталину, Д.А.Киржницу, О.И.Лойко, В.В.Лосякову, В.В.Скалозубу и А.Е.Шабаду за обсуждения и ценные замечания.

---

1. S.Deser, R.Jackiw, and S.Templeton Ann. Phys. **140**, 372 (1982).
2. Quantum Hall effect. Eds. R.E.Prangle, and S.M.Girvin, New York: Springer-Verlag, 1987.
3. A.L.Fetter, C.B.Hanna, and R.B.Laughlin Phys.Rev. **B40**, 8745 (1989); Y.-H.Chen, F.Wilczek, E.Witten, and B.Halperin, Int. J. Mod. Phys. **B3**, 1001 (1989); S.Randjbar-Daemi, A.Salam, and J.Strathdee, Nucl. Phys. **B340**.403 (1990); J.E.Hetrick, Y.Hosotani, and B.-H.Lee, Ann.Phys. **209**, 151 (1991).
4. A.Redlich, and Phys.Rev. **D29**, 2366 (1984).
5. T.Lee, J.Math.Phys. **27**, 2434 (1986).
6. A.Chodos, E.Everdin, and D.Owen, Phys. Rev. **D42**, 2881 (1990).
7. A.Niemi, and G.Semenoff, Phys.Rev.Lett. **51**, 2077 (1983).
8. Вад.Ю.Цейтлин, ЯФ **49**, 712 (1989).
9. A.Niemi, Nucl.Phys. **B251**, 155 (1985).