Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 10, с. 799 – 805 © 2025 г. 25 мая

Когерентное переходное излучение полого бесселева пучка

Д. Ю. Сергеева, *А. А. Тищенко*[1)]

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 2025 г.
После переработки 22 апреля 2025 г.
Принята к публикации 22 апреля 2025 г.

Теоретически исследовано переходное излучение бесселева пучка релятивистских электронов. Вычислен форм-фактор, определяющий возможность реализации интенсивного когерентного излучения от бесселева пучка. Сравниваются результаты для бесселевых и гауссовых полых пучков. Для анализа характеристик переходного излучения рассмотрена мишень в виде двумерного плоского фотонного кристалла.

DOI: 10.31857/S0370274X25050139, EDN: WILEON

1. Введение. Световые бесселевы пучки сегодня хорошо известны. В основном они изучаются в контексте закрученного излучения, т.е. фотонов, обладающих орбитальным угловым моментом. Интерес к бесселевым пучкам обусловлен их стабильностью и способностью самовосстанавливаться [1–3], а также невосприимчивостью к дифракции (в том смысле, что они не расширяются при распространении) [2, 4]. Однако функциями Бесселя можно описывать не только электромагнитные волны, но и заряженные частицы, в том числе полые электронные пучки [2, 5].

Полые электронные пучки занимают особое место в современной оптике, ускорительной и ядерной физике. Их уникальная структура, характеризующаяся отсутствием частиц в центральной области и наличием электронов в кольцевой области, открывает новые возможности для исследований в различных областях физики высоких энергий. Например, в аттосекундной оптике можно формировать аттосекундные электронные сгустки с помощью нановолокон, так что возникающие электронные сгустки будут существенно полыми [6]. Также, в пироэлектрических ускорителях формируются кольцеобразные электронные пучки [7]. Будучи драйверами для ионов, полые электронные пучки могут разгонять ионы в плазме до высоких скоростей [8, 9]. В ядерной физике полые электронные пучки известны как полые электронные линзы и используются для коллимации пучков протонов [10, 11].

2. Распределение электронов в бесселевом пучке. Бесселевы световые пучки рассматриваются преимущественно в рамках квантовой электродинамики, где функция Бесселя n-го порядка J_n определяет волновую функцию частицы ψ. Ввиду корпускулярно-волнового дуализма аналогичную волновую функцию записывают и для электронов. Для электрона, движущегося вдоль оси z, в цилиндрической системе координат имеем [2]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = J_n(\rho k_\rho) e^{in\varphi} e^{izk_z - i\omega t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$, n – целое число, k_z и k_ρ – продольная и перпендикулярная компоненты волнового вектора, $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 = 2m\omega/\hbar$, m – масса электрона, $\hbar$ – постоянная Планка, ω – частота.

Обсуждая бесселевы пучки, нередко имеют ввиду, что при $n > 0$ электроны обладают угловым моментом и имеют форму набора вложенных колец с нулевой плотностью вероятности в начале координат, т.е. являются полыми. В данной работе мы ограничимся рассмотрением полых бесселевых пучков без углового орбитального момента. Величина $\psi\psi^*$ определяет тогда распределение плотности вероятности, которая аналогична классической функции поперечного распределения электронов внутри аксиально симметричного пучка:

$$f_n(\boldsymbol{\rho}) = A_n J_n^2(\rho/\sigma), \tag{2}$$

$\boldsymbol{\rho} = (x, y) = \rho(\cos\varphi', \sin\varphi)$, A_n – нормировочный коэффициент, σ – геометрический параметр пучка.

В данной статье ограничимся рассмотрением только случая $n \geq 0$. При $n = 0$ эта функция описывает обычный сплошной в поперечном распределении пучок (так как $J_0(0) \neq 0$), для $n > 0$ – полый пучок (так как $J_{n>0}(0) = 0$). Параметр σ имеет размерность длины, для $n = 0$ он определяет характерный поперечный размер сплошного пучка,

[1)]e-mail: tishchenko@mephi.ru

для $n > 0$ он определяет толщину кольца пучка и размер внутренней полости, см. рис. 1a. От значения порядка функции Бесселя также зависит радиус кольца пучка, см. рис. 1b.

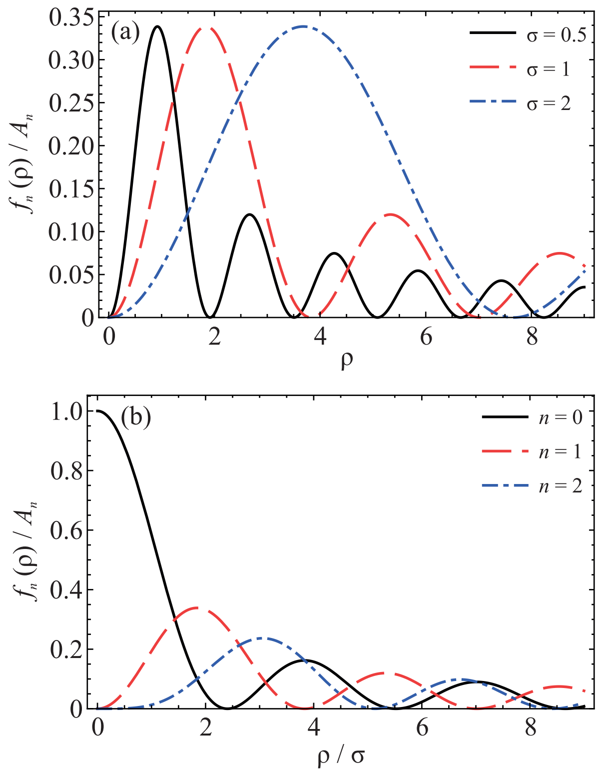

Рис. 1. (Цветной онлайн) График зависимости функции поперечного распределения электронов внутри бесселевого пучка (a) – от ρ для разных значений σ для $n = 1$, (b) – от ρ/σ для разных значений n

При описании бесселевых пучков есть ряд интересных деталей.

Первое, часто функции Бесселя используют для описания нерелятивистских электронных пучков. Однако классическое описание позволяет рассматривать также и релятивистские пучки. Существует также обобщение описания бесселевых пучков на языке уравнения Дирака [12], позволяющее учитывать эффекты квантовой электродинамики.

Второе, создать идеальный бесселев пучок невозможно, поскольку он не нормируется по мощности. На языке классической электродинамики это означает, что плотность вероятности (2) не нормируется на единицу. Поэтому обычно говорят о квазибесселевых пучках. В таком подходе тоже можно переходить к квазиклассическим пучкам, ограничивая нормировочный интеграл сверху. Выбирать это ограничение можно исходя из экспериментальных данных по генерации бесселевых электронных пучков, которые свидетельствуют о том, что на данный момент регистрируется только первых несколько колец распределения – от 1 до 5.

Нормировочный коэффициент A_n обычно находится из условия:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sigma\eta_n \to +\infty} d\rho\rho f_n(\boldsymbol{\rho}) = 1. \tag{3}$$

Однако для функции (2) такой коэффициент не может быть найден из-за бесконечности верхнего предела в интеграле по $d\rho$. Найдем условия, при которых можно ограничить этот интеграл сверху.

Для больших аргументов $\rho/\sigma \gg 1$ известна асимптотика для функции Бесселя:

$$J_n\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) \approx \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi\rho}} \cos\left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{4}$$

откуда можно получить приблизительные значения для нулей функции $f_n(\boldsymbol{\rho})$:

$$\eta_n = \frac{\rho_s}{\sigma} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi(3n+1), \tag{5}$$

где s – целое число, такое, что $s = 0$ определяет первый минимум в распределении (если пучок полый, то полость надо считать нулевым минимумом), т.е. $s+1$ – это номер минимума. Это приближение хорошо работает для $s \gg n$. Для определенности, положим $s = 3n+1$ (т.е. ограничим интеграл минимумом с номером $3n+2$), тогда можно ввести верхний предел для интегрирования в (3):

$$\sigma\eta_n \approx \sigma\frac{7\pi}{4}(1+2n). \tag{6}$$

Тогда, подставляя функцию (2) в (3), заменяя верхний бесконечный предел интегрирования на (6), получим нормировочный коэффициент:

$$A_n = \frac{1}{\pi\sigma^2\eta_n^2}(J_n^2(\eta_n) - J_{n+1}(\eta_n)J_{n-1}(\eta_n))^{-1}. \tag{7}$$

Так как η_n определению такое, что $J_n(\eta_n) \approx 0$, то первым слагаемым в (7) можно пренебречь. Тогда, пользуясь рекуррентными соотношениями, получим:

$$A_n = 1/(\pi\sigma^2\eta_n^2 J_{n+1}^2(\eta_n)). \tag{8}$$

Продольное распределение электронов в пучке не влияет на обсуждаемые в данной работе эффекты и может быть произвольным.

Вместо аналитически полученной в формуле (6) величины η_n можно выбирать любой ноль функции Бесселя, в зависимости от того, сколько вложенных колец содержит поперечный профиль электронного пучка.

3. Форм-факторы пучка. Интенсивность переходного излучения в условиях полной временной когерентности можно представить в виде [13, 14]:

$$I_N \approx I_1 N^2 F, \tag{9}$$

где I_1 – интенсивность излучения от одного электрона, F – форм-фактор пучка, N – число электронов в пучке, такое, что $N \gg 1$. В общем случае функция F определяется распределением электронов в продольном и поперечном направлении относительно скорости пучка. В условиях полной временной когерентности, которые реализуются, когда длина пучка много меньше длины волны, влиянием продольного распределения можно пренебречь и тогда форм-фактор рассчитывается по формуле [13, 14]:

$$F \approx F_{\rm tr} = \left| \int d^2\rho f_n(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho}} \right|^2, \tag{10}$$

где $\mathbf{k}_\rho$ – компонента волнового вектора излучения, перпендикулярная скорости пучка.

Подставляя (2) и (7) в (10), получим:

$$F_{\rm tr} = \left| A_n \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sigma\eta_n} d\rho\rho J_n^2(\rho/\sigma) e^{-ik_\rho\rho\cos\varphi} \right|^2. \tag{11}$$

После интегрирования по азимутальному углу получим:

$$F_{\rm tr} = \left| \frac{2}{\eta_n^2 J_{n+1}^2(\eta_n)} \int\limits_0^{\eta_n} d\tilde{\rho}\tilde{\rho} J_n^2(\tilde{\rho}) J_0(k_\rho\sigma\tilde{\rho}) \right|^2. \tag{12}$$

Здесь была проведена замена переменных: $\tilde{\rho} = \rho/\sigma$.

Далее, воспользуемся известными разложениями:

$$J_n^2(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta J_{2n}(2\tilde{\rho}\sin\theta), \tag{13}$$

$$J_0(k_\rho\sigma\tilde{\rho}) J_{2n}(2\tilde{\rho}\sin\theta) = \frac{\tilde{\rho}^{2n}\sin^{2n}\theta}{\Gamma(2n+1)} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\sigma k_\rho \tilde{\rho})^{2s}}{2^{2s} s! \Gamma(s+1)} F\left(-s, -s, 2n+1, \left(\frac{2\sin\theta}{\sigma k_\rho}\right)^2\right), \tag{14}$$

где Γ – гамма-функция, $F = {}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Вычисляя интегралы, получим

$$F_{\rm tr} = \left| \frac{\eta_n^{2n}}{2^{2n}(n!)^2 J_{n+1}^2(\eta_n)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\sigma k_\rho \eta_n)^{2s}}{2^{2s}(s!)^2(1+n+s)} \times \right.$$
$$\left. \times {}_3F_2\left[n+\frac{1}{2}, -s, -s; n+1, 2n+1; \frac{4}{\sigma^2 k_\rho^2}\right] \right|^2. \tag{15}$$

На рисунке 2 представлены графики зависимости поперечного форм-фактора от параметра $k_\rho\sigma$ для разных значений n. Из графика видно, что полная пространственная когерентность излучения (другими словами, $F_{\rm tr} \approx 1$) для полого пучка достигается для меньшего диапазона параметров, чем для сплошного пучка. С другой стороны, характер зависимости форм-фактора от длины волны (или частоты), которая содержится в k_ρ, для полого пучка и сплошного совпадает: форм-фактор убывает от единицы до нуля в обоих случаях, осциллируя на больших частотах.

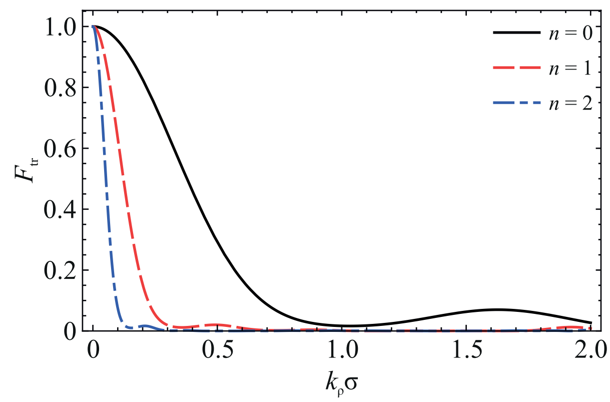

Рис. 2. (Цветной онлайн) График зависимости поперечного форм-фактора бесселевого пучка от $k_\rho\sigma$ для разных значений порядка функции Бесселя n

Теперь рассмотрим три бесселевых пучка, которые имеют только одно кольцо/пятно и имеют приблизительно одинаковый внешний радиус: с $n = 0$ (сплошной) и два полых: с $n = 1$ и $n = 2$. Такие пучки описываются функциями распределения:

$$f_0(\boldsymbol{\rho}; \sigma) = A_0(\sigma) J_0^2\left(\frac{\rho}{\sigma}\right), \tag{16}$$

$$f_1(\boldsymbol{\rho}; 0.63\sigma) = A_1(0.63\sigma) J_1^2\left(\frac{\rho}{0.63\sigma}\right), \tag{17}$$

$$f_2(\boldsymbol{\rho}; 0.47\sigma) = A_2(0.47\sigma) J_2^2\left(\frac{\rho}{0.47\sigma}\right), \tag{18}$$

где множители 0.63 и 0.47 обусловлены отношением первых нулей функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, и $J_2(x)$. Так как пучки имеют одинаковый внешний радиус, функции (16)–(18) определены на интервале ρ от 0 до $\sigma\eta_0$, где $\eta_0 = 2.4$ и нормированы на единицу. Функции распределения таких пучков изображены на рис. 3a, а поперечные форм-факторы – на рис. 3b.

Видно, что в целом форм-факторы достаточно близки, что качественно совпадает с анализом в [15], проведенным для гауссовых сплошного и полого пучков. Это согласуется с тем обстоятельством, что если ограничиться рассмотрением полых электронных

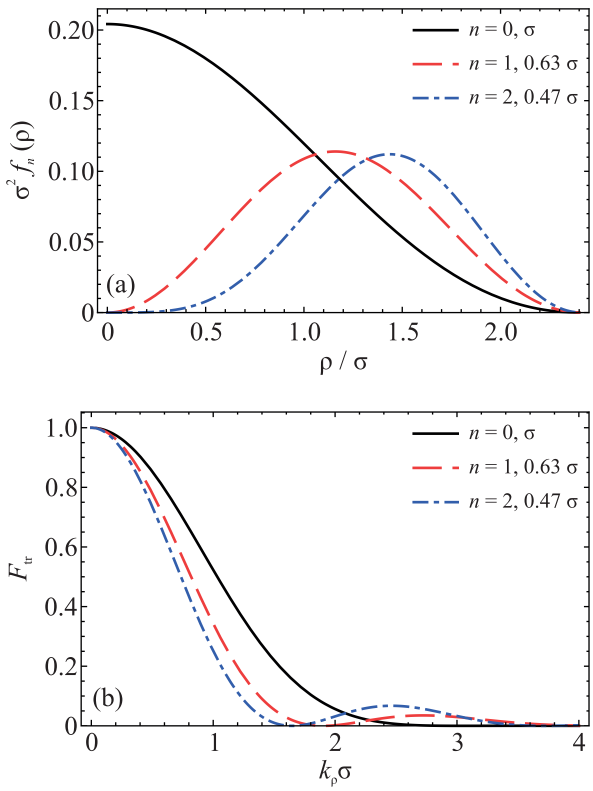

Рис. 3. (Цветной онлайн) (a) – Функции распределения пучков с одинаковым внешним радиусом, см. (16)–(18); (b) – зависимости поперечного форм-фактора от $k_\rho\sigma$ для этих пучков

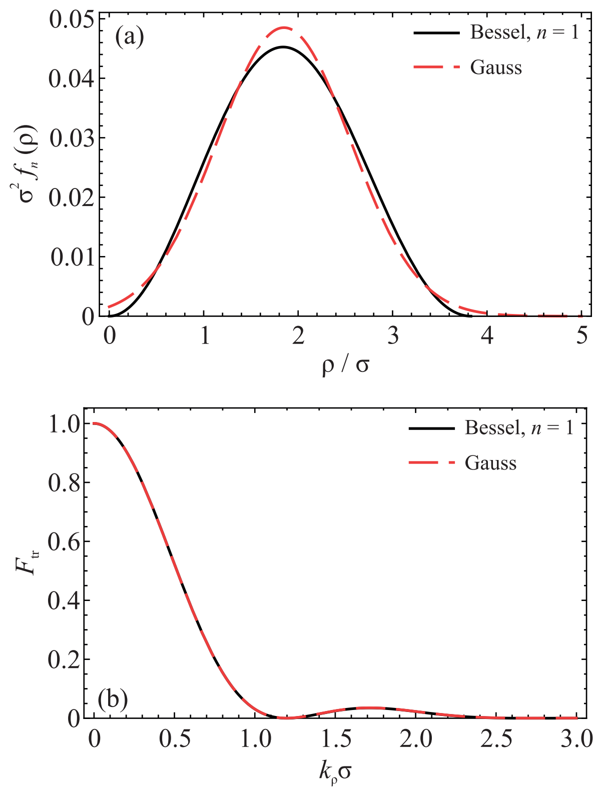

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Сравнение функции распределения полого электронного пучка, определяемой функцией Бесселя (черная сплошная кривая) и гауссовой экспонентой (красная пунктирная кривая) при $\mu = 1.85$ (примерно половина от нуля функции Бесселя); (b) – форм-факторы для этих сгустков

пучков с одним кольцом плотности, то функция распределения хорошо аппроксимируется гауссовым полым распределением, см. рис. 4a и [15]:

$$f_{\mathrm{Gauss}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\exp\left[-(\rho-\mu)^2\right]}{\pi\sigma^2(\sqrt{\pi}\mu[1+\mathrm{erf}(\mu)] + e^{-\mu^2})}, \qquad (19)$$

где $\mu = r_0/\sigma$, r_0 – радиус кольца, а σ характеризует толщину кольца. В таком случае поперечные форм-факторы бесселева и гауссова пучков/распределений полностью совпадают, см. рис. 4b. Для вычисления форм-фактора пучка с бесселевой функцией распределения верхний предел интегрирования равен первому нулю функции Бесселя ($\eta_1 = 3.83$).

4. Решеточное переходное излучение. До сих пор мы анализировали поведение форм-фактора F. Это ключевая величина, позволяющая описать особенности когерентного режима излучения. Однако экспериментально наблюдается переходное излучение, определяемое формулой (9), в котором форм-фактор умножается на интенсивность излучения от отдельного электрона. Мы рассмотрим более детально переходное излучение от плоского двумерного фотонного кристалла, поскольку классическое переходное излучение уже очень хорошо изучено.

Для одиночного электрона теория переходного излучения, генерируемого от плоского двумерного фотонного кристалла, была построена в [16, 17]. Для удобства, ниже мы кратко приведем основные положения теории.

Плоский двумерный фотонный кристалл представляет собой набор одинаковых субволновых частиц, расположенных в одной плоскости. Частицы могут быть любой формы и из любого материала, но существенно, что их характерный размер L намного меньше длины волны излучения λ:

$$L \ll \lambda. \qquad (20)$$

Все свойства частиц, важные для рассматриваемой задачи, описываются функцией поляризуемости $\alpha(\omega)$, которая описывает, как частица реагирует на внешнее поле. Здесь ω – частота излучения. Число частиц кристалла ограничено и равно P. Все частицы расположены в плоскости, а положение p-й частицы определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}_p =$

$= (X_p, Y_p, Z_p)$. Для конкретного случая, когда частицы находятся в узлах прямоугольной решетки в выбранной системе координат, см. рис. 5, можно записать:

$$X_p = p_x d_x \cos\chi,$$
$$Y_p = (p_y + 1/2)d_y, \tag{21}$$
$$Z_p = -p_x d_x \sin\chi,$$

где d_x, d_y – периоды решетки в соответствующем направлении, p_x и p_y – целые числа, отсчитывающие частицы в соответствующих направлениях, χ – угол падения электрона на фотонный кристалл. Добавка $1/2$ в Y_p выбрана из соображений, чтобы электрон не пересекал ни одну частицу. Электрон с зарядом e движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси x.

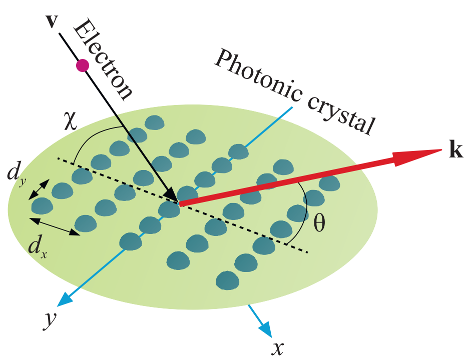

Рис. 5. (Цветной онлайн) Схема генерации решеточного переходного излучения

Для рассматриваемого фотонного кристалла поле излучения описывается формулой:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{ie\omega}{\pi\nu^2\gamma}\alpha(\omega)\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{p_x=-P_{1x}}^{P_{2x}}\sum_{P_y=-P_{1y}}^{P_{2y}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_p}e^{i\frac{\omega}{\nu}X_p}\times$$
$$\times\left[\mathbf{k},\left[\mathbf{k},\frac{\mathbf{v}}{\nu\gamma}K_0\left(\frac{\omega R_{p\perp}}{\nu\gamma}\right)+i\frac{\mathbf{R}_{p\perp}}{R_{p\perp}}K_1\left(\frac{\omega R_{p\perp}}{\nu\gamma}\right)\right]\right], \tag{22}$$

где $\mathbf{R}_{p\perp} = Y_p\mathbf{e}_y + Z_p\mathbf{e}_z$, $K_{0,1}$ – модифицированные функции Бесселя, γ – Лоренц-фактор электрона, $P_{1x}+P_{2x}+1$ – число частиц вдоль оси x, $P_{1y}+P_{2y}+1$ – число частиц вдоль оси y, так что $P = (P_{1x}+P_{2x}+1)\times\times(P_{1y}+P_{2y}+1)$. Такой выбор числа частиц в каждом ряду не является единственно возможным и не влияет на результаты.

Хотя выражение (22) записано только для невзаимодействующих частиц фотонного кристалла, хорошее соответствие между экспериментом и теорией в [14] позволяет нам утверждать, что вне резонансных условий [16, 17] приближение невзаимодействующих частиц можно считать достаточно надежным для использования при анализе решеточного переходного излучения.

Измеряемой величиной является спектрально-угловое распределение излучаемой энергии:

$$I_1 \equiv \frac{dW(\mathbf{n},\omega)}{d\hbar\omega d\Omega} = \frac{c}{\hbar}r^2|\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)|^2, \tag{23}$$

где c – скорость света в вакууме, $\hbar$ – постоянная Планка.

Из-за кристаллической структуры мишени, которая создает решеточное переходное излучение, спектральные распределения от одиночного электрона представляют собой набор пиков и впадин, аналогично тому, как это происходит при рассеянии гауссова светового пучка на поверхности такого кристалла [18]. Максимумы приблизительно определяются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} d_x(\beta^{-1}\cos\chi - n_x\cos\chi + n_z\sin\chi) = m\lambda, \\ d_y n_y = (l+1/2)\lambda, \end{cases} \tag{24}$$

где $l = 0, \pm1, \ldots$ и $m = 0, \pm1, \ldots$ Между максимумами, которые описываются этими уравнениями, в распределениях находятся минимумы.

Введем углы наблюдения, см. рис. 5:

$$n_x = \cos\theta\cos\chi + \sin\theta\cos\varphi\sin\chi,$$
$$n_y = \sin\theta\sin\varphi, \tag{25}$$
$$n_z = -\cos\theta\sin\chi + \sin\theta\cos\varphi\cos\chi.$$

На рисунке 6 приведены графики зависимости спектрально-углового распределения излученной энергии на один электрон от полого пучка для разных значений параметра σ.

Вертикальными линиями на рис. 6 отмечены значения частоты и угла, которые соответствуют гармоникам из уравнений (24) – черные линии для m, красные линии для l. Видно, что в основном максимумы наблюдаются вблизи условий (24). Наибольшей интенсивностью обладают максимумы, для которых конкретные m и l совпадают или близки. В некоторых ситуациях вместо ожидаемого максимума наблюдается минимум, см., например, вблизи линии $m = -2$ на рис. 6а. Это происходит из-за второго уравнения в (24): оно определяет максимумы, между которыми должен находиться минимум, и этот минимум “уничтожает” максимум $m = -2$, описываемый первым уравнением.

Для построения графиков рассматривался бесселев пучок с $n = 1$ (функция распределения пропорциональна J_1) с двумя кольцами, а в качестве предела интегрирования η_n в интеграле (12) выбирался соответствующий ноль функции Бесселя J_1. Графики приведены в сравнении с излучением от одного электрона (черная сплошная кривая). Эта же кривая соответствует идеальному случаю полной пространственной когерентности излучения (так как графики на рис. 6 построены для спектрально-углового распределения энергии, деленной на N^2).

При построении графиков для конкретности была выбрана мишень, состоящая из сферических частиц с радиусом L, состоящих из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Для таких частиц функция поляризуемости может быть записана как:

$$\alpha(\omega) = L^3(\varepsilon(\omega) - 1)/(\varepsilon(\omega) + 2). \tag{26}$$

Как следует из анализа форм-фактора выше, при увеличении σ уменьшается степень пространственной когерентности излучения. На рис. 6 этот факт выражается в том, что при увеличении σ распределения на больших частотах по форме все меньше становятся похожи на форму черной кривой и количество излучаемой энергии уменьшается.

Из графиков на рис. 6 следует, что излучение остается эффективным, т.е. его интенсивность не слишком мала по сравнению со случаем полной пространственной когерентности, только когда параметр σ, характеризующий поперечный размер пучка, остается меньше, чем расстояние между соседними частицами фотонного кристалла. Если же поперечное сечение электронного пучка в плоскости фотонного кристалла накрывает больше одного периода решетки, излучение становится резко пространственно-некогерентным. Такой же вывод можно сделать из следующих качественных соображений. Из формул (24) для большинства значений углов χ, θ и φ для релятивистских электронов следует, что d_x и d_y должно быть больше, чем длина волны излучения λ:

$$d_{x,y} > \lambda. \tag{27}$$

В этом случае будет наблюдаться хотя бы один собственный дифракционный порядок излучения от фотонного кристалла. С другой стороны, из выражения для форм-фактора (15) можно получить, пусть и грубую, но корректную оценку: форм-фактор остается близок к единице, пока σ меньше или много меньше λ:

$$\sigma < \lambda. \tag{28}$$

Из этих двух неравенств следует, что когерентное излучение будет наблюдаться при

$$\sigma < d_{x,y}. \tag{29}$$

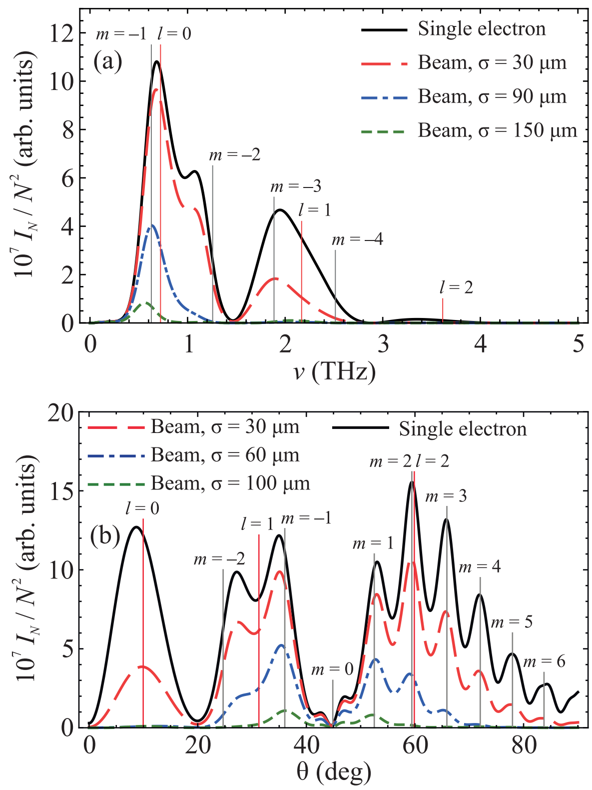

Рис. 6. (Цветной онлайн) (a) – Спектральное распределение. (b) – Угловое распределение излученной энергии на один электрон от полого бесселева пучка от фотонного кристалла для разных значений параметра пучка σ по сравнению с излучением от одного электрона (черная сплошная кривая). Здесь $\chi = 45°$, $\gamma = 15$, $n = 1$, $\eta_n = 7$, решетка состоит из 9×8 сферических частиц с радиусом 0.1 мм, сделанных из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2.1$, периоды решетки $d_x = d_y = 3$ мм, для (a) – $\theta = 29.8°$, $\varphi = 8°$, для (b) – $\nu = 1$ ТГц, $\varphi = 16.8°$. Линиями на рисунках отмечены значения частоты и угла, которые соответствуют гармоникам из уравнений (24)

Этот качественный вывод совпадает с результатами анализа выражений, полученных выше.

Если условие (29) не выполнено, то излучение все равно может быть достаточно интенсивным для наблюдения, но оно не будет являться гармониками излучения от фотонного кристалла. В таком случае нет особого смысла удерживать в теоретическом описании кристаллическую структуру мишени, можно описывать ее как аморфную структуру в рамках классической макроскопической электродинамики.

5. Заключение. В данной работе исследованы теоретически характеристики излучения, которое возбуждается при падении полого электронного пучка на поверхность двумерного плоского фотонного кристалла – решеточного переходного излучения. Поперечное распределение электронов в пучке описывается функциями Бесселя. Для произвольного порядка функции Бесселя вычислен форм-фактор сгустка, определяющий возможность генерации когерентного излучения от такого электронного пучка. Вычисления проведены для коротких пучков, т.е. в условиях полной продольной когерентности излучения (продольный множитель форм-фактора, зависящий от длины сгустка, с высокой точностью равен единице).

Анализ форм-фактора полого бесселева пучка показал, что характер его зависимости от частоты или параметра поперечного размера пучка σ полностью совпадает с таковым для пучков с более простыми распределениями – равномерным или гауссовым: при росте частоты или σ форм-фактор убывает от единицы до нуля. Показано, что для квази-бесселевых полых пучков, имеющих только одно кольцо электронной плотности, форм-факторы близки, если пучки имеют одинаковый внешний радиус, но имеют распределения электронов, описывающиеся функциями Бесселя разного порядка. При одинаковом внешнем радиусе форм-факторы для полого и сплошного бесселевых пучков, и даже для полого гауссова и полого бесселева пучков, практически неотличимы. Тем не менее описание поперечного распределения электронов в пучке бесселевыми функциями остается более выгодным, чем описание с помощью гауссовского распределения, так как позволяет учитывать наличие большего числа колец электронной плотности.

Рассчитаны характеристики переходного излучения от плоского фотонного кристалла: получены выражения для поля и спектрально-углового распределения излученной энергии в дипольном приближении в приближении невзаимодействующих частиц кристалла. Приведены уточненные дисперсионные уравнения, которые определяют спектральные и угловые положения максимумов излучения. На примере пучков с двумя кольцами показано, что даже в условиях полной продольной когерентности, при увеличении параметра σ на больших частотах излучение перестает обладать пространственной когерентностью: поперечная часть форм-фактора становится существенно меньше единицы и подавляет интенсивность излучения. При этом меняется и сам характер спектральных и угловых распределений. Показано, что заметно когерентным остается излучение дифракционных порядков от фотонного кристалла в случае, когда весь поперечный срез электронного пучка не превышает периода фотонного кристалла. Если же поперечное сечение пучка становится больше периода решетки, то излучение все равно может быть достаточно интенсивным для наблюдения, но оно не будет являться гармониками излучения от фотонного кристалла.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках работ по гранту # 23-1-3-2-1 Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. F. O. Fahrbach and A. Rohrbach, Nat. Commun. **3**, 632 (2012).
2. V. Grillo, E. Karimi, G. C. Gazzadi, S. Frabboni, M. R. Dennis, and R. W. Boyd, Phys. Rev. X **4**, 011013 (2014).
3. D. McGloin and K. Dholakia, Contemp. Phys. **46**, 15 (2005).
4. M. V. Berry and N. L. Balazs, Am. J. Phys. **47**, 264 (1979).
5. K. Y. Bliokh, I. P. Ivanov, G. Guzzinati, L. Clark, R. van Boxem, A. Beche, R. Juchtmans, M. A. Alonso, P. Schattschneider, F. Nori, and J. Verbeeck, Phys. Rep. **690**, 1 (2017).
6. L.-X. Hu, T.-P. Yu, Z.-M. Sheng, J. Vieira, D.-B. Zou, Y. Yin, P. McKenna, and F.-Q. Shao, Sci. Rep. **8**, 7282 (2018).
7. P.G. Shapovalov, A. N. Oleinik, and P. V. Karataev, J. Instrum. **19**, C09001 (2024).
8. G. J. Cao, C. A. Lindstrom, E. Adli, S. Corde, and S. Gessner, Phys. Rev. Accel. Beams **27**, 034801 (2024).
9. N. Jain, Phys. Plasmas **26**, 023107 (2019).
10. S. Redaelli, R. B. Appleby, R. Bruce, O. Bruning, A. Kolehmainen, G. Ferlin, A. Foussat, M. Giovannozzi, P. Hermes, D. Mirarchi, D. Perini, A. Rossi, and G. Stancari, J. Instrum. **16**, P03042 (2024).
11. X. Gu, W. Fischer, Z. Altinbas et al. (Collaboration), J. Instrum. Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 031001 (2020).
12. K. Y. Bliokh, M. R. Dennis, and F. Nori, Relativistic Phys. Rev. Lett. **107**, 174802 (2011).
13. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B **309**, 189 (2013).
14. А. А. Тищенко, Д. Ю. Сергеева, Письма в ЖЭТФ **110**, 636 (2019).
15. Д. Ю. Сергеева, А. А. Тищенко, Письма в ЖЭТФ **117**, 492 (2023).
16. D. Yu. Sergeeva, A. S. Aryshev, A. A. Tishchenko, K. E. Popov, N. Terunuma, and J. Urakawa, Opt. Lett. **46**, 544 (2021).
17. D. Yu. Sergeeva, D. I. Garaev, and A. A. Tishchenko, JOSA B **39**, 3275 (2022).
18. Д. Ю. Сергеева, И. В. Бекренев, А. А. Тищенко, Письма в ЖЭТФ **121**, 625 (2025).